

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

А.Ф. Горюнов

УРАВНЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
Часть II

*Рекомендовано УМО „Ядерные физика и технологии”
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 517.958(075)

ББК 22.161.1я7

Г41

Горюнов А.Ф **Уравнения математической физики в примерах и задачах. Часть 2.**: Учебное пособие. — М.: МИФИ, 2008. — 528 с.

Учебное пособие состоит из двух частей одинаковой структуры. Пособие ориентировано на специальности "Прикладная математика и информатика", "Физика", "Механика", "Физика атомного ядра и частиц" и др. и представляет собой сборник задач по уравнениям математической физики с примерами, демонстрирующими методику решения задач. Основой формирования сборника послужили модернизированные курсы уравнений математической физики, читаемые преподавателями кафедры "Прикладная математика" МИФИ. Во второй части сборника демонстрируется метод потенциалов, метод функции Грина, метод характеристик и др. В отличие от аналогичных сборников в данном пособии заново разработан или существенно расширен ряд тем: применение конформных отображений, построение решений нелинейных уравнений и др.; значительную часть сборника составляют задачи с физическим содержанием. При решении задач используется аппарат обобщенных функций.

Пособие адресовано студентам, изучающим математическую и теоретическую физику; некоторые главы могут привлечь внимание аспирантов, инженерно-технических и научных работников, интересующихся данной областью знаний.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент проф., д-р физ.-мат. наук Д.Б. Рогозкин

© *Московский инженерно-физический институт*
(государственный университет), 2008

ISBN 978-5-7262-1048-3 (ч. 2)

ISBN 978-5-7262-1047-6

Оглавление

Предисловие.	5
Глава 5. ПОТЕНЦИАЛЫ	
5.1. Вычисление потенциалов	9
5.2. Решение задач методом потенциала.	32
5.3. Ответы.	42
Глава 6. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА	
6.1. Задачи для волнового уравнения	59
6.2. Задачи для уравнения теплопроводности.	72
6.3. Функция Грина задачи Дирихле.	97
6.4. Функция Грина одномерной краевой задачи.	117
6.5. Ответы.	133
Глава 7. МЕТОД	КОНФОРМНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ	
7.1. Решение задачи Дирихле	161
7.2. Потенциал точечного источника.	181
7.3. Комплексный потенциал точечного вихря	229
7.4. Ответы.	242
Глава 8. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК	
8.1. Линейные гиперболические уравнения	265
8.2. Квазилинейные уравнения	303
8.3. Гиперболические системы.	316
8.4. Ответы.	338

Глава 9. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.1. Метод обратной задачи рассеяния	371
9.2. Метод преобразований Бэклунда	399
9.3. Метод Хироты	408
9.4. Другие методы построения точных решений	420
9.5. Ответы	440

Глава 10. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

10.1. Обобщенные функции в $\mathbf{R}^n$	481
10.2. Обобщенные функции в области	497
10.3. Ответы	510

Основные формулы	516
----------------------------	-----

Список литературы	524
-----------------------------	-----

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вторая часть учебного пособия конструктивно устроена так же, как и предыдущая, является ее непосредственным продолжением и содержит главы с пятой по десятую.

Пятая глава знакомит с методом потенциалов. С физической точки зрения имеются в виду потенциалы электростатических (гравитационных) полей. Задачи этой главы разбиты на две части. Сначала проводится вычисление и изучение свойств потенциалов различных систем зарядов (объемные потенциалы, потенциалы простого и двойного слоя), затем потенциалы применяются для решения краевых задач. В главе используются системы криволинейных ортогональных координат.

На задачах шестой главы демонстрируется метод функции Грина. Здесь собраны задачи для уравнений гиперболического, параболического, эллиптического типов, а также одномерные краевые задачи.

Эффективным средством изучения плоских стационарных полей является метод конформных отображений. Он применим к задачам электро- и магнитостатики, гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости, теплопроводности, фильтрации и др. Метод основан на построении аналитической функции — комплексного потенциала соответствующего векторного поля. Упражнения на эту тему помещены в седьмой главе.

Для решения задач восьмой главы применяется метод характеристик. В сферу его действия входят задачи Коши и Гурса для

линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа, задачи для гиперболических систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. На ряде задач демонстрируется метод Римана. Предлагаются задачи газо- и гидродинамики, в которых исследуются ударные волны.

В последние десятилетия происходит интенсивное развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными. В девятой главе рассмотрены методы построения решения задачи Коши, а также солитонных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Приведены некоторые методы построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений математической физики.

При решении задач используется аппарат обобщенных функций, которым отведена десятая глава. Этот раздел математики не является частью математической физики, поэтому данную главу следует считать дополнением, сохраняющим (в какой-то мере) автономность пособия. Являясь дополнительной, глава не носит, тем не менее, справочного характера: основные свойства обобщенных функций излагаются в форме примеров и задач. Для чтения этой главы желательно владеть элементами функционального анализа. В крайнем случае можно ограничиться лишь δ -функцией (именно она главным образом используется при решении задач), основываясь на ее физическом определении.

Значительная часть задач данного сборника доступна студентам, имеющим физико-математическую подготовку по учебным программам вузов РФ. Для решения ряда задач требуется более высокий уровень знаний физики и математики: здесь автор руководствовался программой подготовки специалистов, которую реализует Московский инженерно-физический институт (государственный университет).

Глава 5

ПОТЕНЦИАЛЫ

Потенциалом в пространстве $\mathbf{R}^3$ называется интеграл

$$u(M) = \int_{\Omega} \frac{\rho(P)}{r_{MP}} d\mathbf{r},$$

где Ω — ограниченная область, r_{MP} — расстояние между точками M и P , $\rho(P) \in C(\overline{\Omega})$. Потенциалами простого и двойного слоя в $\mathbf{R}^3$ называются соответственно интегралы

$$v(M) = \int_S \frac{\sigma(P)}{r_{MP}} ds, \quad w(M) = \int_S \frac{\nu(P) \cos \varphi_{PM}}{r_{MP}^2} ds.$$

Здесь S — поверхность Ляпунова, $\sigma(P)$ и $\nu(P)$ — непрерывные на S функции, φ_{PM} — угол между внешней нормалью к S в точке P и вектором $\mathbf{r}_{PM}$. Физический смысл потенциалов: $u(M)$ представляет собой электростатический потенциал зарядов, распределенных по области Ω с плотностью $\rho(P)$; $v(M)$ — потенциал зарядов, распределенных на поверхности S с плотностью $\sigma(P)$; $w(M)$ является потенциалом поля диполей, распределенных на поверхности S и направленных по внешней нормали, $\nu(P)$ — плотность дипольного момента. Потенциалы обладают следующими свойствами.

Объемный потенциал $u(M) \in C^1(\mathbf{R}^3)$; если $\rho \in C^1(\Omega)$, то $u(M)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = \begin{cases} -4\pi \rho(M), & M \in \Omega, \\ 0, & M \in \overline{\Omega}; \end{cases}$$

при фиксированном значении Q

$$u(M) = \frac{1}{r_{MQ}} \int_{\Omega} \rho(P) d\mathbf{r} + O\left(\frac{1}{r_{MQ}^2}\right), \quad M \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

Потенциал простого слоя $v(M) \in C(\mathbf{R}^3)$ вне S удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u=0$, нормальные производные имеют разрыв 1-го рода при переходе через поверхность S

$$\left(\frac{\partial v(M)}{\partial n}\right)\Big|_{\pm} = \int_S \frac{\sigma(P) \cos \varphi_{r_{MP}}}{r_{MP}^2} ds \mp 2\pi\sigma(M), \quad (5.2)$$

где знаками $+$ и $-$ отмечены предельные значения нормальной производной в точке $M \in S$ извне и изнутри соответственно; при $M \rightarrow \infty$

$$v(M) = \frac{1}{r_{MQ}} \int_S \sigma(P) ds + O\left(\frac{1}{r_{MQ}^2}\right).$$

Потенциал двойного слоя $w(M)$ определен всюду, непрерывен на S , вне S удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta w=0$, имеет разрыв 1-го рода при переходе через поверхность S

$$w_{\pm}(M) = \int_S \frac{\nu(P) \cos \varphi_{PM}}{r_{MP}^2} ds \pm 2\pi\nu(M), \quad M \in S; \quad (5.3)$$

если $M \rightarrow \infty$, то

$$w(M) = O\left(\frac{1}{r_{MQ}^2}\right).$$

Аналогично определяются потенциалы, называемые логарифмическими, в пространстве R^2 (логарифмический потенциал области, логарифмические потенциалы простого и двойного слоя). Они и их свойства получаются из вышеприведенных выражений и свойств заменами $1/r_{MP}$ на $\ln(1/r_{MP})$, r_{MP}^2 на r_{MP} , 2π на π , при этом Ω — плоская область, $S=\partial\Omega$ — плоская кривая. Логарифмические потенциалы с множителем 2 представляют собой потенциалы электростатического поля зарядов, заполняющих бесконечный цилиндр с осью $0z$, поперечным сечением которого является область Ω , либо зарядов или диполей, расположенных на поверхности цилиндра, с плотностями $\rho(P)$, $\sigma(P)$, $\gamma(P)$, не зависящими от z .

Потенциалы применяются для решения краевых задач математической физики.

Литература к главе: [72], [60], [50].

5.1. Вычисление потенциалов

Пример 5.1. Найти объемный потенциал $u(r)$ равномерно заряженного шара, радиус которого r_0 , плотность заряда ρ_0 .

1-й способ. Пусть M — произвольная точка, расстояние которой до центра шара равно r . В сферической системе координат с началом в центре шара, ось $0z$ которой проходит через точку M , расстояние между точками M и $P(R, \theta, \varphi)$ равно $r_{MP} = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}$; по определению

$$u(r) = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} R^2 dR \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} =$$

$$= 2\pi\rho_0 \int_0^{r_0} R^2 dR \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}}{Rr} \Big|_0^\pi = \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^{r_0} R(R + r - |R - r|) dR.$$

Если $r \geq r_0$, то $u(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^{r_0} 2R^2 dR = \frac{4\pi\rho_0^3}{3} \frac{1}{r}$;

если $r < r_0$, то $u(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r} \left[\int_0^r 2R^2 dR + \int_r^{r_0} 2Rr dR \right] = 2\pi\rho_0 \left(r_0^2 - \frac{r^2}{3} \right).$

2-й способ. Свойства объемного потенциала позволяют трактовать его как решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{du}{dr} &= -4\pi\rho_0, & \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{du}{dr} &= 0, \\ 0 < r < r_0, & & r_0 < r, \\ |u(0)| < \infty, & & u(\infty) = 0, \\ u(r_0 - 0) &= u(r_0 + 0), \\ u_r(r_0 - 0) &= u_r(r_0 + 0). \end{aligned}$$

Условиям при $r=0$ и $r=\infty$ удовлетворяет решение

$$u(r) = \begin{cases} -\frac{2\pi\rho_0 r^2}{3} + C_1, & r < r_0, \\ \frac{C_2}{r}, & r > r_0. \end{cases}$$

Чтобы найти константы C_1 и C_2 , достаточно воспользоваться непрерывностью $u(r)$ и $u_r(r)$ при $r=r_0$. Константу C_2 можно определить непосредственно с помощью свойства (5.1).

5.1. Найти объемный потенциал шара, радиус которого r_0 , если плотность ρ равна:

$$1) \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha; \quad 2) \rho_0 e^{-\frac{\alpha r}{r_0}}; \quad 3) \rho_0 \cos \theta; \quad 4) \rho_0 \frac{r}{r_0} \sin \theta \cos \varphi; \quad \alpha \geq 0.$$

5.2. Два равномерно заряженных шара, радиусы которых r_0 , могут проникать друг в друга, при этом плотность заряда каждого шара не меняется. Найти силу взаимодействия шаров, если их заряды Q_1 и Q_2 .

Решить задачи 5.3 – 5.7 для объемных тел, плотность заряда которых постоянна и равна ρ_0 .

5.3. Найти потенциал полушара ($x^2+y^2+z^2 < r_0^2, z > 0$) на оси Oz .

5.4. Вычислить потенциал на оси цилиндра ($x^2+y^2 < r_0^2, |z| < l$).

5.5. Найти потенциал на оси конуса, боковая поверхность которого получена вращением отрезка прямой $z = ctg \alpha$, $0 < z < h$, $0 < \alpha < \pi/2$ около оси Oz .

5.6. Найти потенциал на оси параболоида, боковая поверхность которого получена вращением части параболы $x^2=2pz$, $0<z<h$ около оси Oz .

5.7. Найти потенциал на оси гиперболоида, боковая поверхность которого получена вращением части гиперболы $z^2-x^2=a^2$, $a<z<b$ около оси Oz .

5.8. Найти потенциал на оси цилиндра ($r=r_0$, $0<\varphi\leq 2\pi$, $|z|<h$), плотность заряда боковой поверхности которого σ_0 .

5.9. Найти потенциал на оси сферического сегмента, полученного вращением части окружности $z^2+x^2=r_0^2$, $r_0\operatorname{ctg}\alpha<z<r_0$ около оси Oz , если плотность заряда поверхности сегмента σ_0 .

5.10. Найти потенциал на оси конуса, поверхность которого получена вращением отрезка прямой $z=\operatorname{ctg}\alpha x$, $0<z<h$, $0<\alpha<\pi/2$ около оси Oz , если плотность заряда боковой поверхности σ_0 .

5.11. Найти потенциал простого слоя, распределенного на сфере, радиус которой r_0 , с плотностью:

$$1) \sigma_0; \quad 2) \sigma_0 \cos \theta; \quad 3) \sigma_0 \sin^3 \theta \cos 3\varphi; \quad 4) \sigma_0 \eta(\theta_0 - \theta).$$

5.12. Найти потенциал равномерно заряженного тонкого диска, радиус которого r_0 , заряд Q .

5.13. Решить задачу 2.504, исходя из выражения для потенциала в виде интеграла.

5.14. Если плотность токов в области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ равна $\mathbf{j}(P)$, то векторный потенциал магнитного поля

$$\mathbf{A}(M) = \int_{\Omega} \frac{\mathbf{j}(P) d\mathbf{r}}{r_{MP}}.$$

Представить векторный потенциал кругового тока J , радиус которого r_0 , в виде ряда по присоединенным функциям Лежандра.

5.15. Найти потенциал электростатического поля зарядов, расположенных с постоянной плотностью q 1) на отрезке $[-l, l]$ оси Oz ; 2) на положительной части оси Oz ; 3) на оси Oz .

5.16. Найти потенциал двойного слоя, распределенного на сфере, радиус которой r_0 , с плотностью:

$$1) \nu_0; \quad 2) \nu_0 \cos \theta; \quad 3) \nu_0 \sin 2\theta \cos \varphi; \quad 4) \nu_0 \eta(\theta_0 - \theta).$$

5.17. Определить потенциал двойного слоя, распределенного на диске, радиус которого r_0 , с постоянной плотностью момента ν_0 .

5.18. Дипольный момент единицы длины отрезка $[-l, l]$ оси Ox пространства $\mathbf{R}^3$ равен $\nu_0 \mathbf{e}_z$. Найти потенциал.

5.19. Найти логарифмический потенциал круга, радиус которого r_0 , если плотность заряда

$$1) \rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha, \quad \alpha \geq 0; \quad 2) \rho = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \sin 2\varphi.$$

5.20. Найти потенциал электрического поля бесконечно длинной трубы ($r_1 < r < r_2$), объемная плотность заряда которой ρ_0

5.21. Найти логарифмический потенциал простого слоя, распределенного на окружности, радиус которой r_0 , с плотностью:

$$1) \sigma_0; \quad 2) \sigma_0 \cos \varphi; \quad 3) \sigma_0 \cos^2 \varphi; \quad 4) \sigma_0 \sin \frac{\varphi}{2}; \quad 5) \sigma_0 \eta(\varphi_0 - |\varphi|).$$

5.22. Найти потенциал электрического поля зарядов, расположенных с плотностью σ_0 на 1) полосе ($-l < x < l, y=0, -\infty < z < \infty$); 2) полуплоскости ($0 < x, y=0, -\infty < z < \infty$); 3. плоскости $y=0$.

5.23. Найти логарифмический потенциал двойного слоя, распределенного на окружности, радиус которой r_0 , с плотностью:

$$1) \nu_0 \quad 2) \nu_0 \sin \varphi; \quad 3) \nu_0 \cos m\varphi; \quad 4) \nu_0 \eta(\varphi_0 - |\varphi|).$$

5.24. Двойной слой, плотность момента которого постоянна и равна $\nu_0 \mathbf{e}_z$, расположен 1) на полосе ($|x| < l, y=0, -\infty < z < \infty$) 2) на полуплоскости ($0 < x, y=0, -\infty < z < \infty$); 3) на плоскости $y=0$. Найти потенциал электростатического поля этих систем зарядов.

5.25. Равномерно заряженный цилиндрический слой ограничен двумя подобными эллиптическими цилиндрами с общей осью. Доказать, что потенциал электростатического поля во внутренней полости постоянен.

5.26. Найти плотность заряда на поверхности проводящего эллиптического цилиндра

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (5.4)$$

заряд единицы длины которого q .

5.27. Определить плотность заряда на тонкой проводящей полосе шириной $2a$, заряд единицы длины которой q .

5.28. В ограниченной области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ с диаметром d расположены точечные заряды q_k , координаты которых $\mathbf{r}_k(x_{k1}; x_{k2}; x_{k3})$, где $k = 1, 2, \dots, n$; полный заряд Q и дипольный момент $\mathbf{p}$ системы зарядов равны нулю. Показать, что при $|\mathbf{r}(x_1; x_2; x_3)| \gg d$ потенциал этой системы

$$(\mathbf{r}) = \sum_{i,j=1}^3 \frac{D_{ij}x_ix_j}{r^5} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

где $D_{ij} = \sum_{k=1}^n q_k(3x_{ki}x_{kj} - r_k^2)$ — симметричный тензор, называемый квадрупольным моментом системы зарядов; проверить, что $\sum_{j=1}^3 D_{jj} = 0$.

5.29. Объемная плотность заряда области $\Omega \in \mathbf{R}^3$ с диаметром d — ограниченная интегрируемая функция $\rho(\mathbf{r})$; полный заряд области Q , дипольный момент $\mathbf{p}$. Получить асимптотическое разложение потенциала:

$$u(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} - \mathbf{p} \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{D_{ij}x_ix_j}{r^5} + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

где $Q = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, $\mathbf{p} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) \mathbf{r} d\mathbf{r}$, $D_{ij} = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) (3x_ix_j - r^2 \delta_{ij}) d\mathbf{r}$.

5.30. Симметричный тензор D_{ij} можно привести к главным осям. Если система зарядов аксиально симметрична относительно оси $0z$, то эта ось является главной, а две другие, взаимно перпендикулярные, произвольным образом расположены в плоскости $x0y$. Показать, что в этом случае (см. задачу 5.29)

$$D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}, \quad D_{xy} = D_{yz} = D_{zx} = 0,$$

$$u_3(\mathbf{r}) = \frac{D_{zz}}{2} \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3}, \quad \cos \theta = (\mathbf{e}_r \mathbf{e}_z).$$

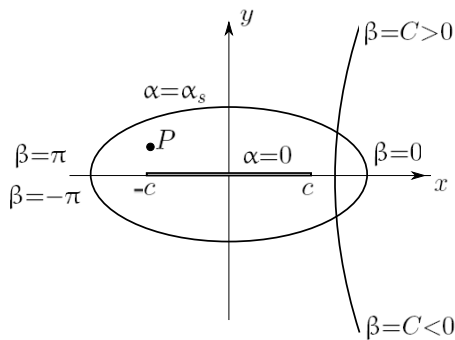


Рис. 5.1

Пример 5.2. Внутри полого проводящего заземленного цилиндра, поперечным сечением которого является эллипс (5.4), параллельно его оси расположена бесконечная нить, координаты которой (т.е. координаты ее следа P на плоскости $x0y$) $x=d$, $y=0$, $0 \leq d < c$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Определить потенциал внутри цилиндра, если линейная плотность заряда нити q (рис. 5.1).

Потенциал $u(x, y)$ является решением задачи Дирихле

$$\Delta u = -4\pi q \delta(x - d) \cdot \delta(y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (5.5)$$

$$u|_S = 0,$$

для уравнения Пуассона в области Ω , ограниченной эллипсом $S = \partial\Omega$. Геометрия задачи обуславливает применение эллиптических координат, которые вводятся с помощью функции

$$F(\mathbf{r}, s) = \frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} - 1, \quad 0 < b < a, \quad \mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y.$$

При фиксированном $\mathbf{r}$ эта функция зависит от одного аргумента s ; ее график пересекает ось $0x$ в двух точках $s=\xi$ и $s=\eta$ (рис.5.2). Числа ξ, η называются эллиптическими координатами точки $\mathbf{r}$.

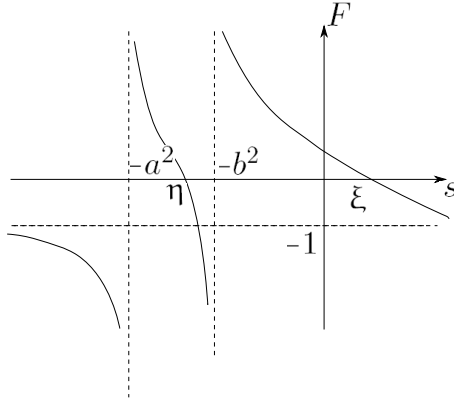


Рис. 5.2

Уравнения $\xi(x, y) = \xi_0$ и $\eta(x, y) = \eta_0$ задают семейства софокусных эллипсов и гипербол соответственно. Из уравнений $F(\mathbf{r}, \xi) = 0$ и $F(\mathbf{r}, \eta) = 0$ следует, что

$$x^2 = \frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - b^2}, \quad y^2 = \frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)}{b^2 - a^2}. \quad (5.6)$$

Используются также безразмерные эллиптические координаты (α, β) , связанные с (ξ, η) соотношениями

$$\xi + a^2 = c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha, \quad \eta + b^2 = -c^2 \sin^2 \beta,$$

где $c^2 = a^2 - b^2$. Подстановка ξ и η в выражения (5.6) преобразует их к виду

$$x = c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \quad y = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta, \quad 0 \leq \alpha, \quad |\beta| < \pi. \quad (5.7)$$

Координатные линии $\alpha(x, y) = C_1$ и $\beta(x, y) = C_2$ — семейства софокусных эллипсов и гипербол, образующих ортогональную сетку. Это вытекает из соотношений (5.7), записанных в форме

$x+iy=c\,ch(\alpha+i\beta)$. Так как $\gamma=\alpha+i\beta$ — аналитическая функция переменной $z=x+iy$, то согласно условиям Коши-Римана

$$(\nabla\alpha, \nabla\beta) = \alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y = \alpha_x\beta_y + (-\beta_x)\alpha_y = 0.$$

Следовательно, $dl^2 = dx^2 + dy^2 = h_\alpha^2 d\alpha^2 + h_\beta^2 d\beta^2$, откуда для коэффициентов Ламе и оператора Лапласа получаются выражения

$$h_\alpha = \sqrt{x_\alpha^2 + y_\alpha^2} = c\sqrt{ch^2\alpha - \cos^2\beta}, \quad h_\beta = \sqrt{x_\beta^2 + y_\beta^2} = h_\alpha.$$

$$\Delta = \frac{1}{c^2(ch^2\alpha - \cos^2\beta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} \right).$$

Эллиптические координаты (α, β) трансформируются в полярные (r, β) при $c \rightarrow 0$, $\alpha \rightarrow \infty$, $c\,ch\alpha \rightarrow r$.

В координатах (α, β) задача (5.5) запишется в виде (см.(10.36))

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - 4\pi q\delta(\alpha) \cdot \delta(\beta - \beta_0), \quad 0 < \alpha < \alpha_S, \quad |\beta| < \pi, \quad (5.8)$$

$$u(\alpha_S, \beta) = 0, \quad u(\alpha, -\pi) = u(\alpha, \pi), \quad u_\beta|_{\beta=-\pi} = u_\beta|_{\beta=\pi}, \quad (5.9)$$

где $\alpha = \alpha_S$, $-\pi < \beta \leq \pi$ — уравнение эллипса (5.4) с полуосями $a=c\,ch\alpha_S$ и $b=c\,sh\alpha_S$, $(0, \beta_0)$ — координаты точки P , $c\cos\beta_0=d$. Условия при $\beta=\pm\pi$ вытекают из непрерывности функции u и ее производной.

Построение решения $u(\alpha, \beta)$ осуществляется методом Фурье по схеме, изложенной в примере 2.12. Источником собственных функций служит задача Штурма-Лиувилля

$$\begin{aligned} Y''(\beta) + \lambda Y(\beta) &= 0, \quad -\pi < \beta < \pi, \\ Y(-\pi) &= Y(\pi), \quad Y'(-\pi) = Y'(\pi), \end{aligned} \quad (5.10)$$

которая получается в результате подстановки $u=X(\alpha)Y(\beta)$ в однородное уравнение, соответствующее уравнению (5.8), и в граничные условия (5.9) при $\beta=\pm\pi$. Эта задача при $\lambda_n=n^2$ имеет нетривиальные решения

$$Y_n(\beta) = A_n \cos n\beta + B_n \sin n\beta, \quad n \in N_0.$$

Результат достигается быстрее, если учесть, что потенциал — четная функция y , поэтому $u_y(x, 0)=0$ при $x \neq d$, или

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0} = 0, \quad \beta \neq \beta_0, \quad \frac{\partial u}{\partial\beta}\Big|_{\beta=0;\pm\pi} = 0, \quad 0 < \alpha < \alpha_S.$$

Итак, неоднородность в уравнении (5.8) нужно разложить в ряд по собственным функциям

$$-4\pi q\delta(\alpha) \cdot \delta(\beta - \beta_0) = -4\pi q\delta(\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(\beta)Y_n(\beta_0)}{\|Y_n\|^2}$$

и отыскивать решение задачи также в форме ряда

$$u(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha)Y_n(\beta). \quad (5.11)$$

Таким образом, коэффициенты $u_n(\alpha)$ определяются условиями

$$u_n'' - n^2 u_n = -4\pi \frac{Y_n(\beta_0)}{\|Y_n\|^2} \delta(\alpha), \quad 0 < \alpha < \alpha_S,$$

$$u_n(\alpha_S) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_n}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Из эквивалентной формы этой задачи (см.гл.10, §2)

$$u_n'' - n^2 u_n = 0, \quad 0 < \alpha < \alpha_S,$$

$$u_n(\alpha_S) = 0, \quad \left. \frac{\partial u_n}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = -4\pi q \frac{Y_n(\beta_0)}{\|Y_n\|^2}$$

следует, что

$$u_0(\alpha) = 2q(\alpha_S - \alpha), \quad u_n(\alpha) = 4q \frac{sh n(\alpha_S - \alpha) \cos n\beta_0}{n ch n\alpha_S}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Решение задачи получается подстановкой $u_0(\alpha)$ и $u_n(\alpha)$ в (5.11):

$$u(\alpha, \beta) = 2q \left(\alpha_S - \alpha + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh n(\alpha_S - \alpha) \cos n\beta_0 \cos n\beta}{n ch n\alpha_S} \right).$$

Иной подход к задаче (5.8), (5.9) состоит в выделении частного решения уравнения Пуассона в виде потенциала нити

$$= v + 2q \ln \frac{1}{r_{MP}},$$

где r_{MP} — расстояние между точками M и P , а v — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta v(\alpha, \beta) = 0, \quad \alpha < \alpha_S, \quad -\pi < \beta < \pi, \quad (5.12)$$

$$v(\alpha_S, \beta) = -2q \ln \frac{1}{r_{MP}} \Big|_{M \in S}. \quad (5.13)$$

После подстановки $v = X(\alpha)Y(\beta)$ в уравнение (5.12) и определения собственных функций $Y_n(\beta)$ для $X_n(\alpha)$ получается уравнение $X_n'' - n^2 X_n = 0$, общее решение которого

$$X_0(\alpha) = A_0 + B_0\alpha, \quad X_n(\alpha)A_n ch n\alpha + B_n sh n\alpha, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Четное относительно β решение задачи (5.12), (5.13)

$$v(\alpha, \beta) = A_0 + B_0\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n ch n\alpha + B_n sh n\alpha) \cos n\beta. \quad (5.14)$$

Производные

$v_x = v_\alpha \alpha_x + v_\beta \beta_x = \frac{1}{c(ch^2\alpha - \cos^2\beta)} (sh\alpha \cos\beta v_\alpha - ch\alpha \sin\beta v_\beta)$,
 $v_y = v_\alpha \alpha_y + v_\beta \beta_y = \frac{1}{c(ch^2\alpha - \cos^2\beta)} (ch\alpha \sin\beta v_\alpha + sh\alpha \cos\beta v_\beta)$
должны быть ограничены в Ω (поле $\mathbf{E}_\sigma = -\nabla v$ зарядов, индуцированных на проводнике ограничено), поэтому $B_n=0$ при $n \in \mathbf{N}_0$. Для определения коэффициентов A_n проще всего разложить в ряд по собственным функциям логарифмическую функцию, входящую в (5.13). Так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} r_{MP}^2 &= \frac{1}{c^2} [(x-d)^2 + y^2] = \\ &= ch^2\alpha - 2ch\alpha \cos\beta \cos\beta_0 + \cos^2\beta_0 - \sin^2\beta = \\ &= (ch\alpha - \cos(\beta + \beta_0))(ch\alpha - \cos(\beta - \beta_0)) = \\ &= \frac{e^{2\alpha}}{4} [1 - 2e^{-\alpha} \cos(\beta + \beta_0) + e^{-2\alpha}] [1 - 2e^{-\alpha} \cos(\beta - \beta_0) + e^{-2\alpha}], \end{aligned}$$

то на основании формулы

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\psi}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cos n\psi}{n}, \quad |t| < 1 \quad (5.15)$$

получается разложение

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{r_{MP}} &= \ln \frac{2e^{-\alpha}}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\beta + \beta_0) + \cos n(\beta - \beta_0)}{n} e^{-n\alpha} = \\ &= \ln \frac{2}{c} - \alpha + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\alpha} \frac{\cos n\beta \cos n\beta_0}{n}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Для определения A_n достаточно сравнить ряды (5.14) и (5.16) при условии (5.13). В итоге

$$u(\alpha, \beta) = 2q \left(\ln \frac{c}{2r_{MP}} + \alpha_S - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha} S ch n\alpha \cos n\beta_0 \cos n\beta}{n ch n\alpha_S} \right).$$

5.31. Определить потенциал вне проводящего эллиптического цилиндра (5.4), заряд единицы длины которого q , и получить для плотности заряда формулу (5.35).

5.32. Проводящий эллиптический цилиндр (5.4) внесен в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, перпендикулярное оси цилиндра и направленное под углом φ к оси Ox . Определить потенциал результирующего поля и плотность заряда на цилиндре.

5.33. Эллиптический цилиндр (5.4), диэлектрическая проницаемость которого ε , помещен в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, перпендикулярное оси цилиндра и направленное под углом φ к оси Ox . Определить поле внутри цилиндра.

5.34. Найти потенциал эллиптического цилиндра (5.4), объемная плотность заряда которого ρ_0 , и определить нормальную E_n и тангенциальную E_τ компоненты поля на поверхности цилиндра.

5.35. Эллиптическая пластинка (полуоси эллипса a и b), толщина которой d , изготовлена из материала с проводимостью σ . Постоянный ток J втекает и вытекает через образующие $x=-a$, $y=0$ и $x=a$, $y=0$ соответственно, вдоль которых плотность тока постоянна. Определить потенциал электрического поля и объемную плотность тока в пластинке.

5.36. Получить решение предыдущей задачи, если ток втекает через образующую $x=0$, $y=-b$ и вытекает через образующую $x=0$, $y=b$.

5.37. Пусть (α, β) и (α_0, β_0) — эллиптические координаты точек M и P соответственно. Доказать, что

$$\ln \frac{1}{r_{MP}} \begin{cases} \ln \frac{2}{c} - \alpha_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha_0}}{n} f_n(\alpha), & \alpha < \alpha_0, \\ \ln \frac{2}{c} - \alpha + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha}}{n} f_n(\alpha_0), & \alpha > \alpha_0, \end{cases} \quad (5.17)$$

где $f_n(\alpha) = ch n\alpha \cos n\beta_0 \cos n\beta + sh n\alpha \sin n\beta_0 \sin n\beta$.

5.38. Внутри проводящего заземленного цилиндра (5.4) параллельно оси расположена нить с зарядом q на единицу длины. Определить плотность заряда на цилиндре, если координаты нити $x_0=d$, $y_0=0$, $0<d<c$ (см. рис.5.1).

5.39. Найти силу, действующую на единицу длины нити при условиях предыдущей задачи.

5.40. Найти силу, действующую на единицу длины нити (см. задачу 5.38), если ее координаты $x_0=0$, $y_0=d$, $0<d<b$.

5.41. Нить, заряд единицы длины которой q , расположена вне проводящего заземленного цилиндра (5.4) параллельно его оси. Найти потенциал вне цилиндра, плотность заряда на поверхности цилиндра, а также силу, действующую на единицу длины нити, если ее координаты $x_0=d>a$, $y_0=0$.

5.42. Решить предыдущую задачу для нити, расположенной вне цилиндра, координаты нити $x_0=0$, $y_0=d>b$.

5.43. Нить, координаты которой $x_0=d>0$, $y_0=0$, заряд единицы длины q , расположена вне проводящего незаземленного незаряженного цилиндра (5.4) параллельно его оси. Найти потенциал электрического поля вне цилиндра, плотность заряда на поверхности цилиндра, и силу, действующую на единицу длины нити.

5.44. Решить предыдущую задачу для нити, координаты которой $x_0=0$, $y_0=d>b$.

5.45. Нить расположена параллельно проводящей заземленной полосе ($|x|<a$, $y=0$, $-\infty<z<\infty$). Найти плотность заряда на полосе, и силу, действующую на единицу длины нити, если линейная плотность заряда нити q , а ее координаты $x_0=d>a$, $y_0=0$.

5.46. Решить предыдущую задачу для бесконечной нити, координаты которой $x_0=0$, $y_0=d>0$.

5.47. Нить расположена параллельно проводящей незаземленной незаряженной полосе ($|x| < a$, $y=0$, $-\infty < z < \infty$). Найти плотность заряда на полосе, и силу, действующую на единицу длины нити, если заряд единицы длины нити q , ее координаты $x_0=d>a$, $y_0=0$.

5.48. Решить предыдущую задачу для нити, координаты которой $x_0=0$, $y_0=d>0$.

5.49. В среде с диэлектрической проницаемостью ϵ имеется полость в форме эллиптического цилиндра (5.4), внутри которой параллельно оси цилиндра расположена бесконечная нить с зарядом q на единицу длины. Какова линейная плотность силы, действующей на нить, если координаты нити $x_0=0$, $y_0=d$, $0 < d < b$?

5.50. Слой из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ , ограниченный двумя эллиптическими цилиндрами

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} = 1,$$

где $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $a_1^2 - b_1^2 = a_2^2 - b_2^2 = c^2$, внесен в однородное электрическое поле $E_0 \mathbf{e}_z$. Определить поле в слое.

5.51. Параллельно оси эллиптического цилиндра (5.4), магнитная проницаемость которого μ , расположен прямой ток $J \mathbf{e}_z$. Найти магнитное поле, если координаты тока $x_0=d>a$, $y_0=0$.

5.52. Прямой ток $J \mathbf{e}_z$ расположен вне эллиптического цилиндра (5.4), магнитная проницаемость которого $\mu \gg 1$. Найти силу, действующую на единицу длины тока, если его координаты 1) $x_0=d$, $y_0=0$; 2) $x_0=0$, $y_0=d$.

5.53. Слой, ограниченный двумя подобными эллипсоидами с общим центром, называется гомеоидом. Доказать, что во внутренней полости равномерно заряженного гомеоида потенциал электрического поля постоянен.

5.54. Пусть S — поверхность эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (5.18)$$

(S, dp) — бесконечно тонкий гомеоид, внутренняя поверхность которого S , толщина dp , а внешняя поверхность получена из S преобразованием подобия с коэффициентом $1 + dk$. Показать, что 1) длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на касательную плоскость к поверхности S в точке (x, y, z)

$$p = \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{-\frac{1}{2}};$$

2) толщина гомеоида

$$dp = p dk; \quad (5.19)$$

3) объем гомеоида

$$dV = 4\pi abc dk. \quad (5.20)$$

5.55. Показать, что плотность заряда на поверхности проводящего эллипсоида (5.18), заряд которого Q ,

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi abc \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}. \quad (5.21)$$

5.56. Найти плотность заряда на тонком проводящем эллиптическом диске (5.4), заряд которого Q .

Пример 5.3. Для решения задач, связанных с эллипсоидом, используются эллипсоидальные координаты. Они вводятся с помощью дробно-рациональной функции

$$F(\mathbf{r}, s) = \frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} - 1, \quad 0 < c < b < a,$$

знаменатель которой

$$R^2(s) = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s).$$

При каждом фиксированном $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$, где $xyz \neq 0$, функция $F(\mathbf{r}, s)$ имеет три вещественных нуля ξ, η, ζ (рис.5.3).

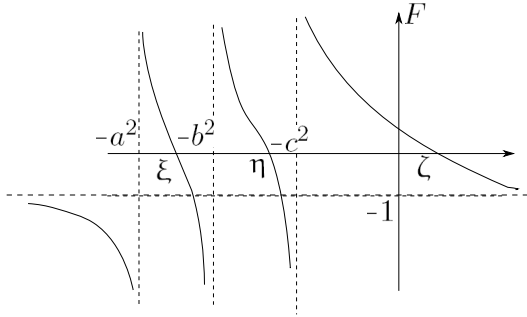


Рис. 5.3

Числа ξ , η , ζ называются эллипсоидальными координатами точки $\mathbf{r}$. Уравнения $\xi(\mathbf{r})=C_1$, $\eta(\mathbf{r})=C_2$, $\zeta(\mathbf{r})=C_3$ описывают семейства эллипсоидов, однополостных и двухполостных гиперболоидов, софокусных базисному эллипсоиду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad 0 < c < b < a, \quad (5.22)$$

уравнение которого в эллипсоидальных координатах $\xi(\mathbf{r})=0$. Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности из каждого семейства и эти поверхности взаимно ортогональны (см задачу 5.59). Результатом совместного решения уравнений $F(\mathbf{r}, \xi)=0$, $F(\mathbf{r}, \eta)=0$, $F(\mathbf{r}, \zeta)=0$ являются формулы, связывающие декартовы и эллипсоидальные координаты:

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}, \\ y^2 &= \frac{(\xi + b^2)(\eta + b^2)(\zeta + b^2)}{(c^2 - b^2)(a^2 - b^2)}, \\ z^2 &= \frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)(\zeta + c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

В задачах теории потенциала встречается интеграл

$$M_0(\xi) = \frac{abc}{2} \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{R(s)}. \quad (5.24)$$

В частности, через $M_0(0)=M_0$ выражается потенциал $u(\mathbf{r})$ в центре $\mathbf{r}=0$ равномерно заряженного эллипсоида (5.22). В сферических координатах потенциал в центре

$$\begin{aligned} u(0) &= \int_{\Omega} \rho_0 \frac{d\mathbf{r}}{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{r(\theta, \varphi)} \rho_0 r dr = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_0 \sin \theta r^2(\theta, \varphi) d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \times \\ &\times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho_0 d\varphi}{\left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) \cos^2 \varphi + \left(\frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) \sin^2 \varphi} = \\ &= 2\pi \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\left(\frac{\sin^2 \theta}{a^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) \left(\frac{\sin^2 \theta}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right)}}. \end{aligned}$$

Подстановка $s=c^2 tg^2 \theta$ преобразует интеграл к виду

$$u(0) = \pi abc \rho_0 \int_0^{\infty} \frac{ds}{R(s)} = 2\pi \rho_0 M_0.$$

5.57. Выразить M_0 через эллиптический интеграл:

$$M_0 = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - c^2}} F(\varphi, k), \quad \cos \varphi = \frac{c}{a}, \quad k = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

5.58. Определить потенциал во внутренней полости равномерно заряженного 1) гомеоида, ограниченного эллипсоидами с полуосями a, b, c и ka, kb, kc , $k>0$, заряд которого Q ; 2) бесконечно тонкого гомеоида, заряд которого dQ .

5.59. Доказать ортогональность эллипсоидальных координат и получить следующие выражения для коэффициентов Ламе и оператора Лапласа:

$$h_\xi = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R(\xi)}, \quad h_\eta = \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R(\eta)}, \quad h_\zeta = \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R(\zeta)};$$

$$\Delta = \frac{4}{(\xi-\eta)(\eta-\zeta)(\zeta-\xi)} \left[(\eta-\zeta)R(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(R(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \right. \\ \left. + (\zeta-\xi)R(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(R(\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + (\xi-\eta)R(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(R(\zeta) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right].$$

5.60. Определить потенциал вне проводящего эллипсоида (5.18), заряд которого Q , и получить формулу (5.21).

5.61. Внешними потенциальными факторами называются интегралы

$$M_{lmn}(\xi) = (-1)^{l+m+n} \left(\frac{\partial}{\partial a} \frac{1}{a} \right)^l \left(\frac{\partial}{\partial b} \frac{1}{b} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial c} \frac{1}{c} \right)^n M_0(\xi), \quad (5.25)$$

где $M_0(\xi) = M_{000}(\xi)$ — интеграл (5.24). Доказать, что

$$M_{100}(\xi) + M_{010}(\xi) + M_{001}(\xi) = \frac{abc}{R(\xi)}, \quad (5.26)$$

$$a^2 M_{100}(\xi) + b^2 M_{010}(\xi) + c^2 M_{001}(\xi) = M_0(\xi) - \frac{abc}{R(\xi)} \xi. \quad (5.27)$$

5.62. Внутренними потенциальными факторами называются интегралы (5.25) при $\xi=0$. Если $l+m+n=1$, то три величины $M_{lmn}(0)$ называются также коэффициентами размагничивания (или коэффициентами деполяризации) и обозначаются символами $M_{100}(0)=M_a$, $M_{010}(0)=M_b$, $M_{001}(0)=M_c$. Показать, что коэффициенты деполяризации выражаются через эллиптические интегралы следующим образом:

$$M_a = \frac{abc}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}} [F(\varphi, k) - E(\varphi, k)],$$

$$M_b = -\frac{abc}{(a^2-b^2)\sqrt{a^2-c^2}} F(\varphi, k) + \frac{abc\sqrt{a^2-c^2}}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)} E(\varphi, k) - \frac{c^2}{b^2-c^2},$$

$$M_c = -\frac{abc}{(b^2-c^2)\sqrt{a^2-c^2}}E(\varphi, k) + \frac{b^2}{b^2-c^2},$$

где $F(\varphi, k)$ и $E(\varphi, k)$ — эллиптические интегралы соответственно 1-го и 2-го рода, $\varphi = \arccos \frac{c}{a}$, $k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$.

5.63. Вычислить внешние потенциальные факторы $M_{lmn}(\xi)$, определенные в (5.25), при $l+m+n \leq 1$, если 1) $a > b = c$; 2) $a = b > c$.

5.64. Решить задачу 5.60 для вытянутого эллипсоида вращения с полуосями $a > b = c$.

5.65. Найти потенциал и плотность заряда металлической иглы, заряд которой Q . Игла занимает отрезок $[-a, a]$ оси Oz .

5.66. Решить задачу 5.60 для сплюснутого эллипсоида вращения с полуосями $a = b > c$.

5.67. Найти потенциал металлического диска, радиус которого r_0 , заряд Q . Диск расположен на плоскости $z=0$, его центр находится в начале координат.

5.68. Проводящий эллипсоид (5.18) помещен в однородное электрическое поле $E_0 \mathbf{e}_x$. Определить потенциал вне эллипсоида.

5.69. Определить плотность заряда, индуцированного на поверхности проводящего эллипсоида (5.18), помещенного в однородное электростатическое поле $\mathbf{E}_0 = E_{0x} \mathbf{e}_x + E_{0y} \mathbf{e}_y + E_{0z} \mathbf{e}_z$.

5.70. Тонкий проводящий эллиптический диск (полуоси эллипса a и b , $a > b$) находится в однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$, направленном 1) по большой оси; 2) по малой оси диска. Найти плотность заряда на диске.

5.71. Круглый тонкий проводящий диск, радиус которого r_0 , находится в продольном электрическом поле $\mathbf{E}$. Определить плотность заряда на диске.

5.72. Проводящий вытянутый (вдоль оси Ox) эллипсоид с полуосями $a > b = c$ находится в однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$. Найти потенциал вне эллипсоида и плотность заряда на его поверхности, если 1) $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$; 2) $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$.

5.73. Проводящий сплюснутый (вдоль оси Oz) эллипсоид с полуосями $a = b > c$ находится в однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$. Определить плотность заряда на эллипсоиде в следующих случаях: 1) $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_x$; 2) $\mathbf{E}_0 = E_0 \mathbf{e}_z$.

5.74. Эллипсоид (5.18) с магнитной проницаемостью μ находится в однородном магнитном поле $\mathbf{H}_0 = H_{0x} \mathbf{e}_x + H_{0y} \mathbf{e}_y + H_{0z} \mathbf{e}_z$. Определить поле $\mathbf{H}$ внутри эллипсоида.

5.75. Вытянутый (вдоль оси Ox) эллипсоид вращения с полуосями $a > b = c$ помещен в однородное поле $E_0 \mathbf{e}_z$. Найти поле $\mathbf{E}$ внутри эллипсоида, если его диэлектрическая проницаемость ϵ .

5.76. Сплюснутый (вдоль оси Oz) эллипсоид вращения с полуосями $a = b > c$, магнитная проницаемость которого μ , находится в однородном поле $H_0 \mathbf{e}_z$. Найти поле $\mathbf{H}$ внутри эллипсоида.

5.77. Точки $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$, принадлежащие эллипсоидам S и S' , уравнения которых соответственно

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

называются взаимными, если

$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{a'}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{b'}, \quad \frac{z}{c} = \frac{z'}{c'}. \quad (5.28)$$

1) Пусть dp и dp' — толщины, $\Delta V = dp \Delta S$ и $\Delta V' = dp' \Delta S'$ элементарные объемы, dV и dV' — объемы бесконечно тонких гомеоидов (S, dp) и (S', dp') (см. задачу 5.54). Доказать, что если границы элементарных площадок ΔS и $\Delta S'$ состоят из взаимных точек, то

$$\frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{dV}{dV'}. \quad (5.29)$$

2) Пусть $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}'_1$ — две пары взаимных точек на эллипсоидах S и S' . Доказать, что если эллипсоиды софокусны, то

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1| = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|. \quad (5.30)$$

5.78. Пусть (S, dp) и (S', dp') — софокусные гомеоиды (см. задачу 5.54), объемы которых dV и dV' , плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$ и $\rho'(\mathbf{r})$, потенциалы $du(\mathbf{r})$ и $du'(\mathbf{r})$ соответственно. Доказать следующее свойство потенциалов (теорема взаимности): если $dV=dV'$, $\rho(\mathbf{r})=\rho'(\mathbf{r}')$, где $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — взаимные точки, то

$$du(\mathbf{r}') = du'(\mathbf{r}). \quad (5.31)$$

5.79. 1. Найти потенциал внешнего поля равномерно заряженного гомеоида (S, dp) (см. задачу 5.54), полный заряд которого dQ . 2. Получить формулу (5.38). 3. Показать, что эквипотенциальными поверхностями внешнего поля равномерно заряженного гомеоида (S, dp) являются софокусные с S эллипсоиды. 4. Доказать, что внешние поля двух равномерно заряженных софокусных гомеоидов (S_1, dp_1) и (S_2, dp_2) с одинаковыми зарядами равны.

5.80. Найти потенциал и напряженность электростатического поля вне и внутри равномерно заряженного эллипсоида с полуосями a, b, c ($a > b > c$), объемная плотность заряда которого ρ_0 .

5.81. Найти квадрупольный момент равномерно заряженного эллипсоида с полуосями a, b, c , заряд которого Q .

5.82. Если базисный эллипсоид (5.22) представляет собой тело вращения относительно оси $0z$ ($a=b>c$), то координата ζ (пример 5.3) вырождается в константу $-a^2$. Вместо ζ вводят полярный угол φ в плоскости $x0y$, полагая

$$\cos^2 \varphi = \frac{\zeta + a^2}{a^2 - b^2},$$

(так как $-a^2 < \zeta < -b^2$, то $0 < \zeta + a^2 < a^2 - b^2$). Значения $\cos \varphi$ при $b \rightarrow a$ определяются характером стремления величины ζ к $-a^2$. Числа (ξ, η, φ) называются сплюснутыми сфероидальными координатами точки $\mathbf{r}$. Связь между декартовыми координатами (x, y, z) и сфероидальными координатами (ξ, η, φ) устанавливается формулами (5.23):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z^2 = \frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2}, \quad (5.32)$$

где $\rho = \left[\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2} \right]^{\frac{1}{2}}$. Переход к безразмерным сфероидальным координатам (α, β, φ) по формулам

$$\xi = d^2 \operatorname{ch}^2 \alpha - a^2, \quad \eta = -d^2 \cos^2 \beta - c^2, \quad d^2 = a^2 - c^2,$$

преобразует соотношения (5.32) к виду

$$x = d \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = d \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = d \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, \\ 0 \leq \alpha < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

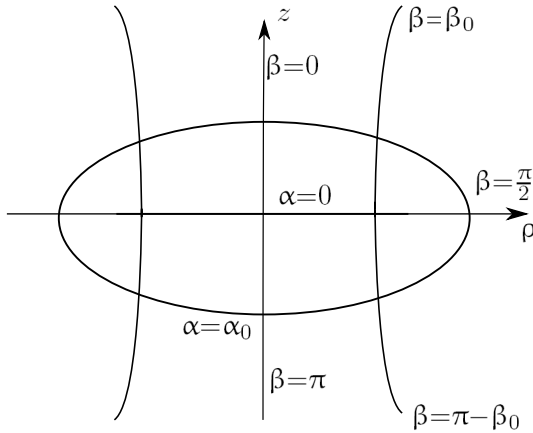


Рис. 5.4

Показать, что 1) система координат (α, β, φ) ортогональна;

2) поверхности $\alpha=\alpha_0$ — сплюснутые эллипсоиды вращения, а поверхности $\beta=\beta_0$ — однополостные гиперboloиды вращения, поверхности $\varphi=\varphi_0$ — плоскости (рис.5.4); 3) коэффициенты Ламе и оператор Лапласа имеют вид:

$$h_\alpha = h_\beta = d \sqrt{ch^2 \alpha - \sin^2 \beta}, \quad h_\varphi = d ch \alpha \sin \beta,$$

$$\Delta = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \left[\frac{1}{ch \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} ch \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{ch^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

5.83. Потенциал поверхности сплюснутого эллипсоида вращения является аксиально симметричной функцией относительно оси вращения. Найти потенциал внутри и вне эллипсоида.

5.84. Решить предыдущую задачу, если потенциал поверхности равен u_1 при $z < 0$, u_2 при $z > 0$.

5.85. Решить задачу 5.83 для проводящего эллипсоида, потенциал которого u_0 ; определить плотность заряда на поверхности эллипсоида и его емкость.

5.86. Тонкий металлический диск, радиус которого r_0 , заряжен до потенциала u_0 . Определить плотность заряда и емкость диска.

5.87. Постоянный ток J втекает в полупространство $z > 0$, проводимость которого σ , через проводник в форме сплюснутого полуэллипсоида вращения ($\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z < 0, a > c$). Определить потенциал электрического поля в полупространстве, плотность тока на поверхности S проводника, сопротивление проводника.

5.88. Если $a > b = c$, то эллипсоидальные координаты (ξ, η, ζ) (см. пример 5.3) вырождаются. Показать, что

1) можно ввести так называемые вытянутые сфероидальные координаты (α, β, φ) , которые связаны с декартовыми координатами (x, y, z) соотношениями (см. задачу 5.82)

$$x = d sh \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = d sh \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = d ch \alpha \cos \beta,$$

$$0 \leq \alpha < \infty, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$

где $d = \sqrt{a^2 - b^2}$, и представляют собой ортогональную координатную систему;

2) координатными поверхностями являются вытянутые (вдоль оси $0z$) эллипсоиды вращения ($\alpha = \alpha_0$), двуполостные гиперболоиды вращения ($\beta = \beta_0$), плоскости ($\varphi = \varphi_0$), проходящие через ось $0z$ (рис.5.5); 3) коэффициенты Ламе и оператор Лапласа имеют вид:

$$h_\alpha = h_\beta = d \sqrt{sh^2 \alpha + \sin^2 \beta}, \quad h_\varphi = d sh \alpha \sin \beta,$$

$$\Delta = \frac{1}{h_\alpha h_\beta} \left[\frac{1}{sh \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} sh \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \left(\frac{1}{sh^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

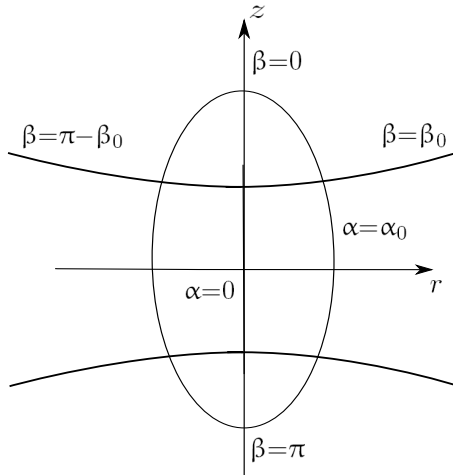


Рис. 5.5

5.89. Потенциал поверхности сплюснутого эллипсоида вращения — аксиально симметричная функция относительно оси вращения. Найти потенциал внутри и вне эллипсоида.

5.90. Решить предыдущую задачу для проводящего эллипсоида, потенциал которого u_0 . Каковы плотность заряда и емкость эллипсоида?

5.91. Решить задачу 5.87 для проводника, имеющего форму вытянутого полуэллипсоида вращения

$$(x, y, z : \frac{x^2+y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1, z > 0).$$

5.2. Решение задач методом потенциала.

Пример 5.4. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в шаре B радиуса r_0 , если $u(r_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$, где $f(\theta, \varphi) = u_0 \cos \theta$.

Потенциал двойного слоя

$$u(M) = \int_S \frac{u(P) \cos \varphi_{PM}}{r_{MP}^2} ds,$$

где $S = \partial B$, является гармонической функцией в шаре и может служить решением задачи Дирихле. При стремлении M к точке на S непрерывная в $\overline{B}$ функция $u \rightarrow f$; соотношение (5.3) приводит к интегральному уравнению

$$\gamma(M) = \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\gamma(P) \cos \varphi_{PM}}{r_{MP}^2} ds - \frac{1}{2\pi} f(M), \quad M \in S$$

для неизвестной плотности $\gamma(P)$. Так как (рис.5.6)

$$r_{MP} = 2r_0 \cos(\pi - \varphi_{PM}), \quad r_{MP}^2 = 2r_0^2(1 - \cos \gamma),$$

то интегральное уравнение преобразуется к виду

$$\gamma(\theta, \varphi) = -\frac{1}{4\sqrt{2}\pi r_0^2} \int_S \frac{\gamma(\theta', \varphi') ds}{\sqrt{1 - \cos \gamma}} - \frac{u_0}{2\pi} \cos \theta.$$

Отсюда (задача 4.239)

$$\gamma = -\frac{3u_0 \cos \theta}{8\pi},$$

следовательно, решение задачи Дирихле в шаре

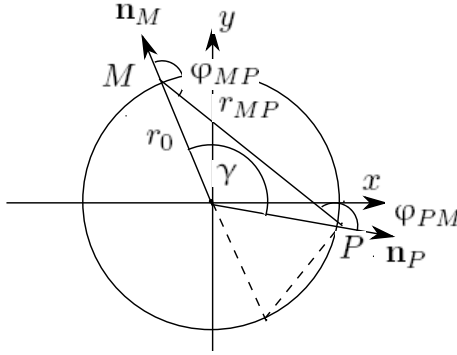


Рис. 5.6

$$u(M) = -\frac{3u_0}{8\pi} \int_{S_1} \frac{\cos \theta' \cos \varphi_{PM}}{r_{MP}^2} r_0^2 ds.$$

Координаты точек $P(r_0, \mathbf{s}') \in S$ и $M(r, \mathbf{s}) \in B$, где $\mathbf{s}' = \mathbf{s}'(\theta', \varphi')$ и $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\theta, \varphi)$ — единичные векторы, связаны соотношениями (см. рис.5.6):

$$r \cos \gamma + r_{MP} \cos(\pi - \varphi_{PM}) = r_0, \quad r_{MP}^2 = r_0^2 + r^2 - 2r r_0 \cos \gamma,$$

поэтому при $\frac{r}{r_0} = t < 1$

$$\begin{aligned} \frac{r_0^2 \cos \varphi_{PM}}{r_{MP}^2} &= \frac{t \cos \gamma - 1}{(1 + t^2 - 2t \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= -\frac{d}{dt} \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 - 2t \cos \gamma}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n P_n(\cos \gamma). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u(M) = \frac{3u_0}{8\pi} \int_{S_1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) t^n P_n(\cos \gamma).$$

Ряд под интегралом равномерно сходится на S_1 и его можно

почленно интегрировать. Этим оправдано применение формулы

$$\int_{S_1} P_k(\cos \gamma) Y_n(\mathbf{s}' ds') = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n(\mathbf{s}) \delta_{kn},$$

на основании которой

$$u = \frac{u_0 r}{r_0} \cos \theta.$$

5.92. Решить внутреннюю задачу Дирихле для шара, радиус которого r_0 , если $u(r_0, \theta, \varphi) = u_0 \sin \theta \sin \varphi$.

5.93. Решить внутреннюю задачу Дирихле для шара, радиус которого r_0 , если $u(r_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$.

5.94. Найти решение внешней задачи Дирихле для шара, радиус которого r_0 , при условии $u(r_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$. Рассмотреть частный случай $f(\theta, \varphi) = u_0 \sin^2 \theta \cos 2\varphi$.

5.95. Решить внутреннюю задачу Дирихле для круга, радиус которого r_0 , если $u(r_0, \varphi) = f(\varphi)$. Рассмотреть случай $f(\varphi) = u_0 \sin m\varphi$.

5.96. Решить внешнюю задачу Дирихле для круга, радиус которого r_0 , если $u(r_0, \varphi) = f(\varphi)$. Рассмотреть случай $u(r_0, \varphi) = u_0 \cos^2 \varphi$.

5.97. Решить задачу Дирихле в полуплоскости $y > 0$ при условии $u(x, 0) = f(x)$. Рассмотреть случаи:

$$1) f(x) = u_0 \eta(x); \quad 2) f(x) = u_0 \sin x; \quad 3) f(x) = \frac{u_0}{1+x^2}.$$

5.98. Найти стационарную температуру внутри двугранного угла ($0 < x, 0 < y$), если грань $y=0$ имеет температуру u_1 , а грань $x=0$ — температуру u_2 .

5.99. Найти стационарную температуру внутри двугранного угла ($0 < x, 0 < y$), если грань $y=0$ имеет температуру $u_0 \eta(l-x)$, а грань $x=0$ — температуру $u_0 \eta(l-y)$.

5.100. Найти стационарную температуру внутри двугранного угла ($0 < \varphi < \alpha$), грань $\varphi=0$ которого поддерживается при температуре $u_0 \eta(l-r)$, а грань $\varphi=\alpha$ — при нулевой температуре.

5.101. Решить задачу Дирихле в полупространстве $z > 0$, если на границе решение равно $f(x, y)$. Рассмотреть случаи:

- 1) $f(x, y) = u_0 \eta(x) \eta(y)$; 3) $f(x, y) = u_0 \eta(y - kx)$;
 2) $f(x, y) = u_0 \eta(xy)$; 4) $f(x, y) = u_0 \cos(\alpha x + \beta y)$.

5.102. Найти стационарное распределение температуры внутри двугранного угла ($0 < x, 0 < y, -\infty < z < \infty$), грань $x=0$ которого имеет нулевую температуру, а грань $y=0$ — температуру $u_0 \operatorname{sign} z$.

5.103. Грань $z=0$ октанта ($0 < x, 0 < y, 0 < z$) имеет температуру u_2 , а грани $x=0$ и $y=0$ — температуру u_1 . Найти стационарную температуру октанта.

Пример 5.5. Через круглую пластинку ($r < r_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, |z| < h$), проводимость которой σ , протекает постоянный ток J . Ток втекает через образующую $A(r=r_0, \varphi=\pi, |z| < h)$, вытекает через образующую $B(r=r_0, \varphi=0, |z| < h)$, вдоль которых он распределен равномерно. Найти объемную плотность тока в пластинке.

Плотность тока не зависит от z . Действительно, пластинку можно считать частью бесконечного цилиндра, в котором течет ток, распределенный равномерно вдоль образующих A и B . Плотность тока $\mathbf{j}$ и потенциал связаны соотношением $\mathbf{j} = -\sigma \nabla u$; так как $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, то u — решение задачи для уравнения Лапласа в круге $B(r_0)$:

$$\Delta u(r, \varphi) = 0, \quad (r, \varphi) \in B(r_0),$$

$$|u| < \infty, \quad u_r(r_0, \varphi) = -\frac{J}{hr_0\sigma} \left[\delta(\varphi - \frac{\pi}{2}) - \delta(\varphi - \pi) \right] \equiv f(\varphi).$$

Если решение представить в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_S \sigma(P) \ln \frac{1}{r_{MP}} ds, \quad S = \partial B(r_0),$$

который является гармонической функцией в круге, то из свойства (5.2) нормальной производной вытекает интегральное уравнение

$$f(M) = \int_S \frac{\sigma(P) \cos \varphi_{MP}}{r_{MP}} ds + \pi \sigma(M), \quad M \in S.$$

Решение этого уравнения имеет вид (см. задачу 4.209.2)

$$\sigma(\varphi) = C + \frac{1}{\pi} f(\varphi),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} u &= Cr_0 \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \psi)}} d\psi - \\ &- \frac{J}{\pi\sigma h} \int_0^{2\pi} \left[\delta\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) - \delta(\psi) \right] \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \psi)}} d\psi. \end{aligned}$$

Интеграл в первом слагаемом равен $-2\pi \ln r_0$ (для его вычисления следует употребить разложение (5.15)), так что

$$u(r, \varphi) = C_1 + \frac{J}{2\pi\sigma h} \ln \frac{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \sin \varphi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \varphi}.$$

5.104. Решить задачу Неймана для полуплоскости $y > 0$ при условии $u_y(x, 0) = f(x)$. Рассмотреть случай $f(x) = -\frac{\alpha x}{(1+x^2)^2}$.

5.105. Решить задачу Неймана в полупространстве $z > 0$ при условии $u_z(x, y, 0) = f(x, y)$.

5.106. Ток J втекает в полупространство $z > 0$ через отрезок $[-l, l]$ оси Oz . Определить плотность тока в полупространстве, если вдоль отрезка он распределен равномерно.

5.107. Решить внутреннюю задачу Неймана в круге радиуса r_0 , если

$$u_r(r_0, \varphi) = f(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

5.108. Найти стационарную концентрацию газа, диффундирующего в длинном цилиндре, радиус которого r_0 , если плотность потока газа на поверхности цилиндра равна $-q_0 \sin 2\varphi \mathbf{e}_r$.

5.109. Решить задачу Неймана вне круга, радиус которого r_0 , при условии

$$u_r(r_0, \varphi) = f(\varphi), \quad \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0.$$

5.110. Найти стационарную температуру вне бесконечного цилиндра, радиус которого r_0 , если плотность теплового потока, поступающего через поверхность цилиндра во внешнее пространство, равна $q_0 \cos \varphi$.

5.111. Решить задачу Неймана в шаре, радиус которого r_0 , если

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi), \quad \int_{S_1} f ds = 0.$$

Рассмотреть частный случай $f(\theta, \varphi) = q_0 \sin \theta \cos \varphi$.

5.112. Через однородный шар, радиус которого r_0 , протекает постоянный ток J , точки входа и выхода которого находятся в концах одного и того же диаметра. Найти электростатический потенциал внутри шара, если проводимость шара σ .

5.113. Решить задачу Неймана вне шара, радиус которого r_0 , если

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi).$$

5.114. С помощью потенциала свести краевую задачу для уравнения Пуассона в области Ω с границей S

$$\Delta u(M) = F(M), \quad M \in \Omega, \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})|_S = f,$$

к краевой задаче для уравнения Лапласа, если Ω принадлежит пространству 1) R^2 ; 2) R^3 .

5.115. На оси полого проводящего цилиндра, радиус которого r_0 , находится нить, несущая диполи, линейная плотность момента которых $\mathbf{p}$, где $\mathbf{p}$ — постоянный вектор, перпендикулярный нити. Определить потенциал внутри цилиндра и плотность заряда на его поверхности.

5.116. В центре проводящей сферы, радиус которой r_0 , расположен точечный диполь с моментом p . Определить потенциал внутри сферы и плотность заряда на ней.

5.117. На поверхности шара, радиус которого r_0 , происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, температура которой $f(\theta, \varphi)$. Найти стационарное распределение температуры в шаре. Рассмотреть частный случай: $f(\theta, \varphi) = u_0 Y_n^m(\theta, \varphi)$.

5.118. В неограниченной среде имеется сферическая полость радиусом r_0 , температура которой $f(\theta, \varphi)$. Определить стационарную температуру среды, если на границе с полостью происходит теплообмен по закону Ньютона. Рассмотреть частный случай: $f(\theta, \varphi) = u_0 Y_n^m(\theta, \varphi)$.

Пример 5.6. Проводник, занимающий область $\Omega \in R^3$ с гладкой границей S , внесен в электростатическое поле $\mathbf{E}$ с потенциалом v_E . Определить плотность заряда на проводнике.

Заряд на поверхности проводника создает поле с потенциалом

$$v_\sigma = \int_S \frac{\sigma(P) ds}{r_{MP}}.$$

По свойству (5.2)

$$\left(\frac{\partial v_\sigma(M)}{\partial n} \right)_- \int_S \frac{\sigma(P) \cos \varphi_{MP}}{r_{MP}^2} ds + 2\pi\sigma(M), \quad M \in S.$$

Поле в проводнике равно нулю; с другой стороны, оно является суперпозицией внешнего поля $\mathbf{E}$ и поля $\mathbf{E}_\sigma = -\nabla v_\sigma$ зарядов на

проводнике. Следовательно,

$$\left[E_n - \left(\frac{\partial v_\sigma(M)}{\partial n} \right) \right] \Big|_S = 0.$$

Таким образом, функция $\sigma(P)$ является решением интегрального уравнения

$$\sigma(M) = \frac{E_n(M)}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\sigma(P) \cos \varphi_{MP}}{r_{MP}^2} ds, \quad M \in S. \quad (5.33)$$

Применение соотношения $2r_0 \cos(\pi - \varphi_{MP}) = r_{MP}$ (см. рис.1.19), преобразует уравнение (5.33) к виду

$$\sigma(M) = \frac{E_n(M)}{2\pi} + \frac{1}{4\pi r_0} \int_S \frac{\sigma(P) ds}{r_{MP}}, \quad M \in S.$$

Поскольку потенциал проводника $v_S = v_\sigma + v_E$, то

$$\sigma(M) = \frac{E_n(M)}{2\pi} + \frac{v_S - v_E}{4\pi r_0}. \quad (5.34)$$

Если сфера заземлена, то $v_S=0$; если сфера изолирована и имеет заряд Q , то v_S определяется из уравнения

$$Q = v_S r_0 - \frac{1}{4\pi r_0} \int_S v_E ds,$$

которое получается интегрированием соотношения (5.34) по сфере (интегрирование первого слагаемого в правой части дает нуль в силу теоремы Гаусса). В обоих случаях формула (5.34) является решением поставленной задачи для сферы.

5.119. Отрезок $M_1 M_2$ с зарядом q на единицу длины расположен над проводящей плоскостью $z=0$. Найти плотность заряда на плоскости, если

- 1) $M_1=(0, 0, l_1)$, $M_2=(0, 0, l_2)$, $0 < l_1 < l_2$;
- 2) $M_1=(-l_1, 0, l_2)$, $M_2=(l_1, 0, l_2)$, $0 < l_2$.

5.120. На расстоянии h от проводящей заземленной плоскости расположен точечный диполь с моментом p , параллельным плоскости. Определить плотность заряда на плоскости.

5.121. Определить плотность заряда на проводящей заземленной сфере, помещенной в однородное электрическое поле E_0 .

5.122. Проводящая незаземленная сфера, радиус которой r_0 , заряд Q , помещена в однородное поле E_0 . Какова плотность заряда на сфере?

5.123. Найти плотность заряда на проводящей заземленной сфере, радиус которой r_0 , на расстоянии d от центра которой находится точечный заряд q . Рассмотреть случаи 1) $d < r_0$; 2) $d > r_0$.

5.124. Точечный заряд q расположен на расстоянии d от центра незаземленной проводящей сферы, радиус которой r_0 , заряд Q . Найти плотность заряда на сфере в случаях 1) $d < r_0$; 2) $d > r_0$.

5.125. Незаземленная проводящая сфера, радиус которой r_0 , заряд Q , находится в поле бесконечной нити, заряд единицы длины которой q . Определить плотность заряда на сфере, если ее центр отстоит от нити на расстоянии $d > r_0$.

5.126. Вне проводящей сферы, радиус которой r_0 , на расстоянии d от центра расположен точечный диполь с моментом $\mathbf{p} = p \frac{\mathbf{d}}{d}$. Найти плотность заряда на сфере, если она 1) заземлена; 2) незаземлена и имеет заряд Q .

5.127. Вне проводящей сферы, радиус которой r_0 , на расстоянии d от ее центра O в точке M расположен диполь с моментом p , перпендикулярным вектору OM . Найти плотность заряда на сфере, если она 1) заземлена; 2) незаземлена и имеет заряд Q .

5.128. Проводящая цилиндрическая поверхность, поперечным сечением которой является односвязная область, ограниченная замкнутым контуром Γ , параллельна оси Oz . Показать, что плотность заряда σ , индуцированного на поверхности электрическим

полем $\mathbf{E}(x, y)$, перпендикулярным оси Oz , удовлетворяет интегральному уравнению

$$\sigma(M) = \frac{E_n(M)}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P) \cos \varphi_{MP}}{r_{MP}} d\gamma, \quad M \in \Gamma.$$

5.129. Проводник, заполняющий полупространство $z < 0$, находится в электрическом поле, напряженность которого в отсутствии проводника $\mathbf{E}(x, y)$. Определить плотность заряда на плоскости $z=0$.

5.130. Определить плотность заряда на поверхности проводящего незаземленного цилиндра, внесенного в плоское поле $\mathbf{E}$, перпендикулярное оси цилиндра.

5.131. Проводящий цилиндр, радиус которого r_0 , и заряд q на единицу длины, внесен в однородное поле E_0 , перпендикулярное оси цилиндра. Найти плотность заряда на поверхности цилиндра.

5.132. Параллельно оси полого проводящего цилиндра, радиус которого r_0 , на расстоянии $d > r_0$ от оси расположена нить с зарядом q на единицу длины. Найти плотность заряда на поверхности цилиндра, если его собственный заряд на единицу длины q_0 .

5.133. Параллельно проводящей заземленной плоскости на расстоянии h от нее расположена нить, плотность дипольного момента которой $\mathbf{p}$. Найти плотность заряда на плоскости, если вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярен плоскости и направлен к ней.

5.134. Нить, дипольный момент единицы длины которой $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_\varphi$, расположена параллельно проводящему цилиндру радиуса r_0 на расстоянии $d > r_0$ от его оси. Найти плотность заряда на поверхности цилиндра, если цилиндр 1) заземлен; 2) изолирован и имеет заряд q на единицу длины.

5.135. Между проводящими плоскостями $y = \pm h$ на одинаковом расстоянии от них расположена нить с линейной плотностью заряда q . Найти плотность заряда на плоскостях.

5.136. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно ребру двугранного угла ($r > 0 \leq \varphi < 3\pi/2, -\infty < z < \infty$), образованного двумя проводящими полуплоскостями (рис.??); координаты нити $r=r_0, \varphi=4\pi/4$.) Найти плотность заряда на гранях угла.

5.137. Параллельно краю проводящей полуплоскости ($x > 0, y=0, -\infty < z < \infty$) помещена нить, координаты которой $x = -d, d > 0, y=0$, заряд единицу длины q . Найти плотность заряда на полуплоскости.

5.3. Ответы

$$\begin{aligned}
 5.1. \quad & 1) u(r) = 4\pi\rho_0 r_0^2 \begin{cases} \frac{1}{\alpha+2} \left[1 - \frac{1}{\alpha+3} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\alpha+2} \right], & r \leq r_0, \\ \frac{r_0}{(\alpha+3)r}, & r_0 \leq r; \end{cases} \\
 & 2) u(r) = 4\pi\rho_0 r_0^2 \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{2r_0}{\alpha r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r}{r_0}} \right) - e^{-\frac{\alpha r}{r_0}} - (1+\alpha)e^{-\alpha} \right], & r \leq r_0, \\ \frac{2r_0}{\alpha^3 r} \left[1 - \left(1 + \alpha + \frac{1}{2}\alpha^2 \right) e^{-\alpha} \right], & r_0 \leq r; \end{cases} \\
 & 3) u(r, \theta) = \pi\rho_0 r_0^2 \begin{cases} \left(\frac{4}{3} - \frac{r}{r_0} \right) \frac{r}{r_0} \cos \theta, & r \leq r_0, \\ \frac{r_0^2}{3r^2} \cos \theta, & r_0 \leq r; \end{cases} \\
 & 4) u(r, \theta, \varphi) = 2\pi\rho_0 r_0^2 \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5r_0^2} \right) \frac{r}{r_0} \sin \theta \cos \varphi, & r \leq r_0, \\ \frac{4\pi\rho_0 r_0^4}{15r^2} \sin \theta \cos \varphi, & r_0 \leq r. \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$5.2. \quad F = \begin{cases} \frac{Q_1 Q_2 r}{r_0^3} \left(1 - \frac{9r}{16r_0} + \frac{r^3}{32r_0^3} \right), & r \leq 2r_0, \quad r - \text{расстояние} \\ \frac{Q_1 Q_2}{4r^2}, & 2r_0 \leq r, \quad \text{между центрами шаров.} \end{cases}$$

$$5.3. \quad u(z) = \frac{2\pi\rho_0}{3z} \left[(r_0^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} + g(z) \right], \quad g(z) = \begin{cases} -r_0^3 + z^3 + \frac{3}{2}r_0^2 z, & z \leq 0, \\ -r_0^3 - 2z^3 + \frac{3}{2}r_0^2 z, & 0 \leq z \leq r_0, \\ r_0^3 - z^3 - \frac{3}{2}r_0^2 z, & r_0 \leq z. \end{cases}$$

$$5.4. \quad u(z) = \pi\rho_0 \left[(l+z)\sqrt{(l+z)^2 + r_0^2} + (l-z)\sqrt{(l-z)^2 + r_0^2} + \right. \\
 \left. + r_0^2 \ln \frac{\sqrt{(l-z)^2 + r_0^2} + l - z}{\sqrt{(l+z)^2 + r_0^2} - l - z} - 2g(|z|) \right], \quad g(z) = \begin{cases} l^2 + z^2, & 0 \leq z \leq l, \\ 2lz, & l \leq z. \end{cases}$$

$$5.5. \quad u(z) = \pi\rho_0 \left\{ \cos \alpha \left[(l - z \cos \alpha) \sqrt{z^2 - 2lz + l^2} + z|z| + \right. \right. \\
 \left. \left. + z^2 \sin^2 \alpha \ln \frac{l - z \cos \alpha + \sqrt{z^2 - 2lz + l^2}}{|z| - z \cos \alpha} \right] - z^2 + (z - h)^2 \operatorname{sign}(z - h) \right\}, \quad l \cos \alpha = h.$$

$$5.6. \quad u(z) = \pi \rho_0 \left[(h+p-z) \sqrt{(z-h)^2 + 2hp} - (p-z)|z| + \right. \\ \left. + p(2z-p) \ln \frac{h+p-z+l-z \cos \alpha + \sqrt{(z-h)^2 + 2hp}}{p+|z|-z} - z^2 + (z-h)^2 \operatorname{sign}(z-h) \right].$$

$$5.7. \quad u(z) = 2\pi \rho_0 \left[(b - \frac{z}{2}) \sqrt{(z-b)^2 + b^2 - a^2} - (a - \frac{z}{2})|z-a| + \right. \\ \left. + \frac{z^2 - 2a^2}{2\sqrt{2}} \ln \frac{2b-z+\sqrt{2}\sqrt{(z-b)^2 + b^2 - a^2}}{2a-z+\sqrt{2}|z-a|} \right].$$

$$5.8. \quad u(z) = \frac{2\pi\sigma_0 r_0}{z} (|z+r_0| - \sqrt{z^2 + r_0^2 + 2zr_0 \cos \alpha}).$$

$$5.9. \quad u(z) = 2\pi\sigma_0 \sin \alpha \left(\sqrt{z^2 - 2zh + l^2} - |z| + z \cos \alpha \ln \frac{l-z \cos \alpha + \sqrt{z^2 - 2zh + l^2}}{|z|-z \cos \alpha} \right).$$

$$5.10. \quad u(z) = 2\pi r_0 \sigma_0 \ln \frac{\sqrt{(z-h)^2 + r_0^2} - z + h}{\sqrt{(z-h)^2 + r_0^2} - z + h}.$$

$$5.11. \quad \begin{aligned} 1) \quad v(r) &= 4\pi\sigma_0 r_0 \begin{cases} 1, & r \leq r_0, \\ \frac{r_0}{r}, & r_0 \leq r; \end{cases} \\ 2) \quad v(r, \theta) &= \frac{4\pi\sigma_0 r_0}{3} \begin{cases} \frac{r}{r_0} \cos \theta, & r < r_0; \\ \frac{r_0^2}{r^2} \cos \theta, & r_0 \leq r; \end{cases} \\ 3) \quad v(r, \theta, \varphi) &= \frac{4\pi\sigma_0 r_0}{7} \begin{cases} \frac{r^3}{r_0^3} \sin^3 \theta \cos 3\varphi, & r \leq r_0, \\ \frac{r_0^4}{r^4} \sin^3 \theta \cos 3\varphi, & r_0 \leq r; \end{cases} \\ 4) \quad u(r, \theta) &= 2\pi\sigma_0 r_0 \begin{cases} C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta), & r \leq r_0, \\ C_0 \frac{r_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta), & r_0 \leq r, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{где } C_0 = 1 - \cos \theta_0, \quad C_n = \frac{P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0)}{2n+1}.$$

$$5.12. \quad u(r, \theta) = \frac{Q}{r_0} \begin{cases} -2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n} \frac{P_{2n}(0)P_{2n}(\cos \theta)}{2n-1} - 2\frac{r}{r_0} |\cos \theta|, & r \leq r_0, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n+1} \frac{P_{2n}(0)P_{2n}(\cos \theta)}{n+1}, & r_0 \leq r. \end{cases}$$

Указание. Потенциал — решение краевой задачи

$$\Delta u = -\frac{4Q_0}{r_0^2} \frac{\eta(r_0-r)}{r} \cdot \frac{\delta(\frac{\pi}{2}-\theta)}{\sin \theta}, \quad 0 < r, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ |u| < \infty, \quad u|_{r=\infty} = 0.$$

$$5.14. \quad \text{См. ответ к задаче 2.530. } 5.15. \quad \begin{aligned} 1) \quad u(x, y, z) &= q \ln \frac{\sqrt{r^2 + (l-z)^2} + l-z}{\sqrt{r^2 + (l+z)^2} - l-z}; \\ 2) \quad u(x, y, z) &= q \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2 - z}} + C; \quad 3) \quad u(x, y, z) = 2q \ln \frac{1}{r} + C, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.16. \quad 1) \quad w(r) &= -2\pi v_0 \begin{cases} 2, & r < r_0, \\ 1, & r = r_0, \\ 0, & r_0 < r; \end{cases} \\
2) \quad w(r, \theta) &= \frac{2\pi v_0 \cos \theta}{3} \begin{cases} -\frac{4r}{r_0}, & r < r_0, \\ -\frac{1}{3}, & r = r_0, \\ \frac{2r_0^2}{r^2}, & r_0 < r; \end{cases} \\
3) \quad w(r, \theta, \varphi) &= \frac{2\pi v_0 \sin 2\theta \cos \varphi}{5} \begin{cases} -\frac{6r^2}{r_0^2}, & r < r_0, \\ -1, & r = r_0, \\ \frac{4r_0^3}{r^3}, & r_0 < r; \end{cases} \\
4) \quad w(r, \theta) &= 2\pi v_0 \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} C_n(n+1) \left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos \theta), & r < r_0, \\ -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta), & r = r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n n P_n(\cos \theta), & r > r_0, \end{cases}
\end{aligned}$$

где $C_0 = 1 - \cos \theta_0$, $C_n = \frac{P_{n-1}(\cos \theta_0) - P_{n+1}(\cos \theta_0)}{2n+1}$.

$$5.17. \quad w(r, \theta) = 2\pi v_0 \begin{cases} -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{2n+1} \frac{P'_{2n+1}(0) P_{2n+1}(\cos \theta)}{2n+1} + \text{sign}(\cos \theta), \\ 0, \\ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{2n+2} \frac{P'_{2n+1}(0) P_{2n+1}(\cos \theta)}{n+1}, \end{cases}$$

где 1-я строка соответствует случаю $r < r_0$, 2-я — $r = r_0$, 3-я — $r > r_0$.

$$5.18. \quad w(x, y, z) = \frac{\gamma_0 z}{y^2 + z^2} \left(\frac{l+x}{\sqrt{(l+x)^2 + r^2}} + \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + r^2}} \right), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

$$5.19. \quad 1) \quad u(r) = 2\pi \rho_0 r_0^2 \begin{cases} \frac{1}{\alpha+2} \left(\ln \frac{1}{r_0} + \frac{1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right), & r \leq r_0, \\ \frac{1}{\alpha+2} \ln \frac{1}{r}, & r_0 \leq r; \end{cases}$$

$$2) \quad u(r, \varphi) = \frac{\pi \rho_0 r_0^2}{2} \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{3r_0^2} \right) \frac{r^2}{r_0^2} \sin 2\varphi, & r \leq r_0, \\ \frac{r_0^2}{6r^2} \sin 2\varphi, & r_0 \leq r. \end{cases}$$

$$5.20. \quad u(r) = \frac{\pi \rho_0}{2} \begin{cases} r_2^2 - r_1^2 + 2(r_1^2 \ln r_1 - r_2^2 \ln r_2), & 0 \leq r \leq r_1 \\ r_2^2 - r^2 + 2(r_1^2 \ln r - r_2^2 \ln r_2), & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 2(r_1^2 - r_2^2) \ln r, & r_2 \leq r. \end{cases}$$

- 5.21.** 1) $v(r) = 2\pi r_0 \sigma_0 \begin{cases} \ln \frac{1}{r_0}, & r \leq r_0, \\ \ln \frac{1}{r}, & r_0 \leq r; \end{cases}$
- 2) $v(r, \varphi) = \pi \sigma_0 r_0 \begin{cases} \frac{r}{r_0} \cos \varphi, & r \leq r_0, \\ \frac{r_0}{r} \cos \varphi, & r_0 \leq r; \end{cases}$
- 3) $v(r, \varphi) = \pi r_0 \sigma_0 \begin{cases} \ln \frac{1}{r_0} + \left(\frac{r}{2r_0}\right)^2 \cos 2\varphi, & r \leq r_0, \\ \ln \frac{1}{r} + \left(\frac{r_0}{2r}\right)^2 \cos 2\varphi, & r_0 \leq r; \end{cases}$
- 4) $v(r, \varphi) = 2\pi r_0 \sigma \begin{cases} \sqrt{\frac{r}{r_0}} \sin \frac{\varphi}{2}, & r \leq r_0, \\ \sqrt{\frac{r_0}{r}} \sin \frac{\varphi}{2}, & r_0 \leq r; \end{cases}$
- 5) $v(r, \varphi) = r_0 \sigma_0 \begin{cases} 2\varphi_0 \ln \frac{1}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{\sin \varphi_0 \cos n\varphi}{n^2}, & r \leq r_0, \\ 2\varphi_0 \ln \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{\sin \varphi_0 \cos n\varphi}{n^2}, & r_0 \leq r. \end{cases}$
- 5.22.** 1) $v(x, y) = -\sigma_0 \{ (l-x) \ln [(l-x)^2 + y^2] + (l+x) \ln [(l+x)^2 + y^2] \} - 2\sigma_0 |y| \operatorname{arccctg} \frac{x^2 + y^2 - l^2}{2l|y|} + C;$
- 2) $v(x, y) = -\sigma_0 \left[2x + \pi|y| + x \ln(x^2 + y^2) + 2y \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right] + C;$
- 3) $u(y) = C - 2\pi \sigma_0 |y|.$
- 5.23.** 1) $w(r) = -\pi v_0 \begin{cases} 2, & r < r_0, \\ 1, & r = r_0, \\ 0 & r_0 < r; \end{cases}$
- 2) $w(r, \varphi) = \pi v_0 \sin \varphi \begin{cases} -\frac{r}{r_0}, & r < r_0, \\ 0, & r = r_0, \\ -\frac{r_0}{r}, & r_0 < r; \end{cases}$
- 3) $w(r, \varphi) = \pi v_0 \cos m\varphi \begin{cases} -\frac{r^m}{r_0^m}, & r < r_0, \\ 0, & r = r_0, \\ -\frac{r_0^m}{r^m}, & r_0 < r; \end{cases}$
- 4) $w(r, \varphi) = 2v_0 \begin{cases} -\varphi_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{\sin n\varphi_0 \cos n\varphi}{n}, & r < r_0, \\ -\frac{\varphi_0}{2}, & r = r_0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{\sin n\varphi_0 \cos n\varphi}{n}, & r_0 < r. \end{cases}$
- 5.24.** 1) $w(x, y) = v_0 \operatorname{arccctg} \frac{x^2 + y^2 - l^2}{2l|y|} \cdot \operatorname{sign} y;$
- 2) $w(x, y) = v_0 \operatorname{arccctg} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \operatorname{sign} y;$ 3) $w(y) = \pi v_0 \operatorname{sign} y.$

5.25. Решение (см. [50]). Абсолютная величина поля в точке P двух элементарных цилиндрических слоев, ограниченных плоскостями Π_1 , Π_2 и подобными эллиптическими цилиндрами Σ_1 , Σ_2 (рис. 5.7)

$$\Delta E(P) = \left| 2\rho_0 \left(\int_{\Delta S_1} \frac{ds}{r} - \int_{\Delta S_2} \frac{ds}{r} \right) \right| |2\rho_0 \Delta \varphi (\overline{M_1 N_1} - \overline{M_2 N_2})|.$$

Уравнения поверхностей Σ_1 , Σ_2 , Π_1 имеют вид:

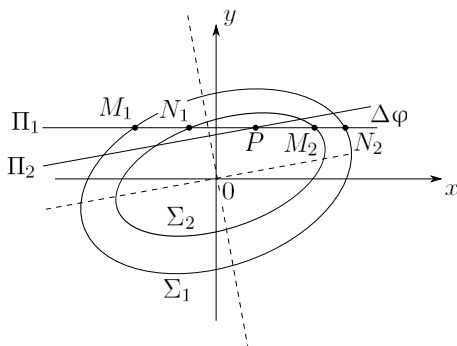


Рис. 5.7

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D_1 = 0, \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + D_2 = 0, \quad y = d.$$

При подстановке $y = d$ в остальные два уравнения получаются квадратные уравнения, корни которых — абсциссы точек M_1, M_2 и N_1, N_2 . По теореме Виета $x(M_1) + x(M_2) = x(N_1) + x(N_2) = -\frac{2dB}{A}$, откуда $\overline{M_1 N_1} = \overline{M_2 N_2}$, т.е. $\Delta E(P) = 0$. **5.26.**

$$\sigma(x, y) = \frac{q}{\pi ab \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}. \quad (5.35)$$

Решение. Так как поле внутри равномерно заряженного слоя (см. преды-

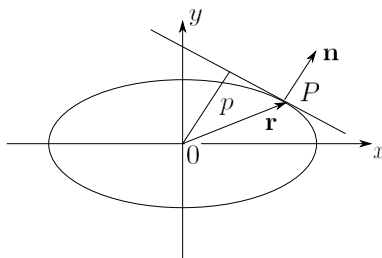


Рис. 5.8

дущую задачу) равно нулю (как и поле внутри проводника), то плотность заряда на проводящем цилиндре можно получить, устремляя толщину слоя к нулю при постоянном q . Расстояние от центра эллипса до касательной в точке P (рис. 5.8)

$$p = \mathbf{r} \mathbf{n} = \left(x \cdot \frac{x}{a^2} + y \cdot \frac{y}{b^2} \right) \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}}.$$

Следовательно, $\sigma = \lim_{k \rightarrow 1} \rho_0 \Delta p = \lim_{k \rightarrow 1} \frac{qp}{\pi ab |1 - k^2|} |1 - k^2| = \frac{qp}{\pi ab}$.

5.27. $\sigma(x) = \frac{q}{2\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$. **5.28.** Решение. При условии $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta r \ll r$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) + df(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{r}) + o(\Delta r^2) = \\ &= f(\mathbf{r}) + \Delta \mathbf{r} \nabla f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + o(\Delta r^2), \quad \Delta r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Так как $r_k \leq d \ll r$, то

$$u(\mathbf{r}) = \sum_1^n \frac{q_k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|} = \sum_1^n \left(\frac{1}{r} - \mathbf{r}_k \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 x_{ki} x_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} \right) + o\left(\frac{1}{r^3}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Первые два слагаемые (далее пределы суммирования опущены)

$$\frac{1}{r} \sum_k q_k = Q = 0, \quad -\sum (q_k \mathbf{r}_k, \nabla \frac{1}{r}) = -\left(\sum q_k \mathbf{r}_k, \nabla \frac{1}{r} \right) = -\mathbf{p} \nabla \frac{1}{r} = 0,$$

а третье слагаемое

$$u_3(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_k q_k \sum_{i,j} x_{ki} x_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r}.$$

Если учесть, что $\Delta \frac{1}{r} = 0$, или $\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \frac{1}{r} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{1}{r} \right)$, то

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} x_{ki} x_{kj} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} &= \sum_i x_{ki}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} + \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = \\ &= x_{k1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{r} + x_{k2}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{1}{r} - x_{k3}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{1}{r} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \frac{1}{r} \right) + \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = \\ &= \sum_{i=1}^3 x_{ki}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} - x_{k3}^2 \Delta \frac{1}{r} + \sum_{i \neq j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое в последней сумме можно представить также в виде $-x_{k1}^2 \Delta \frac{1}{r}$ или $-x_{k2}^2 \Delta \frac{1}{r}$ или, наконец, в симметричной (относительно x_i) форме $-\frac{1}{3} r_k^2 \Delta \frac{1}{r}$. Таким образом,

$$u_3(\mathbf{r}) = \frac{1}{6} \sum_k q_k \sum_{i,j} (3x_{ki} x_{kj} - r_k^2 \delta_{ij}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = \frac{1}{6} \sum_{i,j} D_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{D_{ij} x_i x_j}{r^5}.$$

Замечание. Структура $u_3(\mathbf{r})$ не зависит от Q и $\mathbf{p}$. **5.31.** $u = C - 2q\alpha$.

5.32. $\sigma(\beta) = \frac{E_0(a+b) \cos(\beta-\varphi)}{4\pi\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}}, \quad u = E_0(a+b) \operatorname{sh}(\alpha_s - \alpha) \cos(\beta - \varphi) + C, \quad \operatorname{ch} \alpha_s = \frac{a}{c}.$

5.33. $\mathbf{E} = E_0(a+b) \left(\frac{\cos \varphi}{a+b\varepsilon} \mathbf{e}_x + \frac{\sin \varphi}{a\varepsilon+b} \mathbf{e}_y \right)$ — однородное поле.

$$\mathbf{5.34.} \quad u(\alpha, \beta) = \begin{cases} \pi \rho_0 \left[b^2 \operatorname{ch}^2 \alpha - a^2 \operatorname{sh}^2 \alpha + \frac{c^2}{2} (e^{-2\alpha_s} \operatorname{ch} 2\alpha - 1) \cos 2\beta \right] + C, \\ 2\pi \rho_0 ab (\alpha_s - \alpha - \frac{1}{2} e^{-2\alpha} \cos 2\beta) + C, \end{cases}$$

где 1-я строка соответствует $\alpha \leq \alpha_s$, а 2-я — $\alpha > \alpha_s$;

$$E_n = -\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_s} = -\frac{2\pi \rho_0 ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \left(1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\beta \right),$$

$$E_\tau = -\frac{1}{h_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=\alpha_s} = -\frac{2\pi \rho_0 ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta}} \frac{a-b}{a+b} \sin 2\beta, \quad \operatorname{ch} \alpha_s = \frac{a}{c}.$$

$$\mathbf{5.35.} \quad u(\alpha, \beta) = C - \frac{2J}{\pi \sigma d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\alpha \cos(2n+1)\beta}{(2n+1) \operatorname{sh}(2n+1)\alpha_s}, \quad \operatorname{sh} \alpha_s = \frac{b}{c}, \quad \mathbf{j} = -\sigma \nabla u.$$

$$\mathbf{5.36.} \quad u(\alpha, \beta) = C - \frac{2J}{\pi \sigma d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sh}(2n+1)\alpha \sin(2n+1)\beta}{(2n+1) \operatorname{ch}(2n+1)\alpha_s}, \quad \operatorname{ch} \alpha_s = \frac{a}{c}, \quad \mathbf{j} = -\sigma \nabla u.$$

Указание. $r_{MP}^2 = [\operatorname{ch}(\alpha + \alpha_0) - \cos(\beta + \beta_0)] [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) - \cos(\beta - \beta_0)]$.

$$5.38. \sigma(\beta) = -\frac{q}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}} \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\beta_0\cos n\beta}{ch n\alpha_s}\right).$$

$$5.39. \mathbf{F} = -\frac{2q^2}{c\sin\beta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha_s}\sin 2n\beta_0}{ch n\alpha_s} \mathbf{e}_x, \quad ch\alpha_s = \frac{a}{c}, \quad \cos\beta_0 = \frac{d}{c}.$$

$$5.40. \mathbf{F} = \frac{2q^2}{\sqrt{d^2+c^2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sh(4n+2)\alpha_0 e^{-(2n+1)\alpha_s}}{sh(2n+1)\alpha_s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh 4n\alpha_0 e^{-2n\alpha_s}}{ch 2n\alpha_s} \right) \mathbf{e}_y,$$

$$sh\alpha_s = \frac{b}{c}, \sin\alpha_0 = \frac{d}{c}. \quad 5.41. u(\alpha, \beta) = q \ln \frac{ch(\alpha+\alpha_0-2\alpha_s)-\cos\beta}{ch(\alpha-\alpha_0)-\cos\beta}, \quad ch\alpha_0 = \frac{d}{c}, \quad ch\alpha_s = \frac{a}{c},$$

$$\sigma(\beta) = -\frac{q}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}} \cdot \frac{a\sqrt{d^2-c^2}-bd}{ad-b\sqrt{d^2-c^2}-c^2\cos\beta},$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{\sqrt{d^2-c^2}} \left[\frac{d}{\sqrt{d^2-c^2}} + \frac{(d^2+b^2)(bd+a\sqrt{d^2-c^2})}{(d^2-a^2)(ad+b\sqrt{d^2-c^2})} \right] \mathbf{e}_x.$$

$$5.42. u(\alpha, \beta) = q \ln \frac{ch(\alpha+\alpha_0-2\alpha_s)-\sin\beta}{ch(\alpha-\alpha_0)-\sin\beta},$$

$$\sigma(\beta) = -\frac{q}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}} \cdot \frac{ad-b\sqrt{c^2+d^2}-bd}{a\sqrt{d^2+c^2}-bd-c^2\sin\beta},$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2}{\sqrt{d^2+c^2}} \left[\frac{d}{\sqrt{d^2+c^2}} + \frac{(d^2+a^2)(ad+b\sqrt{d^2+c^2})}{(d^2-b^2)(bd+a\sqrt{d^2+c^2})} \right] \mathbf{e}_x.$$

$$5.43. u(\alpha, \beta) = C - 2q\alpha + q \ln \frac{ch(\alpha+\alpha_0-2\alpha_s)-\cos\beta}{ch(\alpha-\alpha_0)-\cos\beta} \quad ch\alpha_0 = \frac{d}{c}, \quad ch\alpha_s = \frac{a}{c},$$

$$\sigma(\beta) = \frac{q(a+b)}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}} \cdot \frac{d-\sqrt{d^2-c^2}-(a-b)\cos\beta}{ad-b\sqrt{d^2-c^2}-c^2\cos\beta},$$

$$\mathbf{F} = -q^2 \frac{d-\sqrt{d^2-c^2}}{(a-b)\sqrt{d^2-c^2}} \left(\frac{a-b}{\sqrt{d^2-c^2}} + \frac{bd+a\sqrt{d^2-c^2}}{d^2-a^2} \right) \mathbf{e}_x.$$

$$5.44. u(\alpha, \beta) = C - 2q\alpha + q \ln \frac{ch(\alpha+\alpha_0-2\alpha_s)-\sin\beta}{ch(\alpha-\alpha_0)-\sin\beta} \quad ch\alpha_0 = \frac{d}{c}, \quad ch\alpha_s = \frac{a}{c},$$

$$\sigma(\beta) = \frac{q(a+b)}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\cos^2\beta}} \cdot \frac{\sqrt{d^2+c^2}-d-(a-b)\sin\beta}{a\sqrt{d^2+c^2}-bd-c^2\sin\beta},$$

$$\mathbf{F} = -\frac{q^2(\sqrt{d^2+c^2}-d)}{(a-b)\sqrt{d^2+c^2}} \left(\frac{ad+b\sqrt{d^2+c^2}}{d^2-b^2} - \frac{a-b}{\sqrt{d^2+c^2}} \right) \mathbf{e}_y.$$

$$5.45. \sigma(x) = -\frac{q\sqrt{d^2-a^2}}{2\pi(d-x)\sqrt{a^2-x^2}}; \quad \mathbf{F} = -\frac{2q^2d}{d^2-a^2} \mathbf{e}_x.$$

$$5.46. \sigma(x) = -\frac{qd}{2\pi\sqrt{a^2-x^2}} \frac{\sqrt{d^2+a^2}\pm\sqrt{a^2-x^2}}{d^2+x^2}, \quad \text{знак плюс соответствует верхней} \\ (x+0; y), \quad \text{а минус — нижней } (x-0; y) \text{ сторонам полосы.} \quad \mathbf{F} = \frac{q^2}{d} \frac{2d^2+a^2}{d^2+a^2} \mathbf{e}_y.$$

$$5.47. \sigma(x) = \frac{q}{2\pi\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \sqrt{\frac{d+x}{d-x}}\right); \quad \mathbf{F} = -\frac{2q^2(d-\sqrt{d^2-a^2})}{d^2-a^2} \mathbf{e}_x.$$

$$5.48. \sigma(x) = \frac{q}{2\pi\sqrt{a^2-x^2}} \left(1 - \frac{\sqrt{d^2+a^2}\pm\sqrt{a^2-x^2}}{d^2+x^2} d\right), \quad \text{знак плюс соответствует} \\ \text{верхней } (x+0; y), \quad \text{а минус — нижней } (x-0; y) \text{ сторонам полосы,}$$

$$F = \frac{q^2}{d} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+a^2}}\right) \mathbf{e}_y.$$

$$5.49. \mathbf{F} = \frac{2q^2}{\sqrt{d^2+c^2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sh(4n+2)\alpha_0 e^{-(2n+1)\alpha_s}}{\varepsilon sh(2n+1)\alpha_s + ch(2n+1)\alpha_s} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh 4n\alpha_0 e^{-2n\alpha_s}}{sh 2n\alpha_s + \varepsilon ch 2n\alpha_s} \right) \mathbf{e}_y,$$

$sh \alpha_s = \frac{b}{c}$, $sh \alpha_0 = \frac{d}{c}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. **5.50.** Электростатический потенциал

$$u(\alpha, \beta) = E_0 c \frac{sh \alpha_1 sh(\alpha - \alpha_1) + \varepsilon ch \alpha_1 ch(\alpha - \alpha_1)}{sh(\alpha_2 - \alpha_1)(sh \alpha_1 + \varepsilon^2 ch \alpha_1) + \varepsilon e^{\alpha_1} ch(\alpha_2 - \alpha_1)} e^{\alpha_2} \cos \beta, \quad \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2,$$

где $\alpha = \alpha_1$ и $\alpha = \alpha_2$ — уравнения поперечных сечений цилиндров в эллиптических координатах. Указание. Потенциал поля в диэлектрике $u(\alpha, \beta) = v(\alpha, \beta) - E_0 c ch \alpha \cos \beta$, где $v(\alpha, \beta)$ — с учетом ограниченности во внутренней полости и на бесконечности — имеет вид

$$v(\alpha, \beta) = \begin{cases} A_0 + A_1 ch \alpha \cos \beta, & 0 \leq \alpha \leq \alpha_1, \\ B_0 + C_0 \alpha + (B_1 ch \alpha + C_1 sh \alpha) \cos \beta, & \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2, \\ D_0 + H_0 \alpha + D_1 e^{-\alpha} \cos \beta, & \alpha_2 \leq \alpha. \end{cases}$$

$$\mathbf{5.51.} \quad A = \begin{cases} C_0 - \frac{2J}{c} \left(\ln \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} - \alpha_0 \right) + \frac{4\mu J}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch n \alpha \cos n \beta e^{-n(\alpha_0 - \alpha_s)}}{n(\mu ch n \alpha_s + sh n \alpha_s)}, \\ C_0 + \frac{2J}{c} \ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{2J}{c} (\mu - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sh 2n \alpha_s \cos n \beta e^{-n(\alpha - \alpha_s + \alpha_0)}}{n(\mu ch n \alpha_s + sh n \alpha_s)}, \end{cases}$$

где $ch \alpha_s = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, $ch \alpha_0 = \frac{d}{\sqrt{a^2 - b^2}}$, c — скорость света, 1-я строка соответствует $\alpha \leq \alpha_s$, а 2-я — $\alpha < \alpha_s$.

5.52. 1. $\mathbf{F} = -\frac{J^2}{c^2} \frac{b(bd+a\sqrt{d^2-a^2+b^2})}{(d^2-a^2)(d^2-a^2+b^2)} \mathbf{e}_x$; 2. $\mathbf{F} = -\frac{J^2}{c^2} \frac{a(ad+b\sqrt{d^2+a^2-b^2})}{(d^2-b^2)(d^2+a^2-b^2)} \mathbf{e}_y$, c — скорость света. **5.53.** Указание. См. решение задачи 5.25. **5.55.** Указание. См. решение задачи 5.26. **5.56.**

$$\sigma(x, y) = \frac{Q}{4\pi ab \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}. \quad (5.36)$$

5.58.

$$1) \quad u = \frac{3Q}{2abc} \frac{k^2 - 1}{k^3 - 1} M_0 \quad (5.37)$$

$$2) \quad du = \frac{dQ}{abc} M_0 \quad (5.38)$$

5.60.

$$u = \frac{Q}{abc} M_0(\xi). \quad (5.39)$$

Указание. Задачу Дирихле

$$\Delta u = 0 \quad 0 < \xi,$$

$$u|_{\xi=0} = C, \quad u \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty$$

решать в классе функций, зависящих только от ξ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{5.63.} \quad 1) \quad M_0(\xi) &= \frac{ab^2}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+b^2}}, \\
M_{100}(\xi) &= \frac{ab^2}{a^2-b^2} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+b^2}} - \frac{1}{\sqrt{\xi+b^2}} \right), \\
M_{010}(\xi) &= M_{001}(\xi) = \frac{ab^2}{2(a^2-b^2)} \left(\frac{\sqrt{\xi+a^2}}{\xi+b^2} - \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+b^2}} \right); \\
2) \quad M_0(\xi) &= \frac{a^2c}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}, \\
M_{100}(\xi) &= M_{010}(\xi) = \frac{a^2c}{2(a^2-c^2)} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}} - \frac{\sqrt{\xi+c^2}}{\xi+a^2} \right), \\
M_{001}(\xi) &= \frac{a^2c}{a^2-c^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\xi+a^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}} \right).
\end{aligned}$$

Указание. Применить соотношения (5.26), (5.27).

$$\begin{aligned}
\mathbf{5.64.} \quad u &= \frac{Q}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+b^2}}, \quad \xi - \text{наибольший корень уравнения} \\
\frac{x^2}{\xi+a^2} + \frac{y^2+z^2}{\xi+b^2} &= 1. \quad \mathbf{5.65.} \quad u = \frac{Q}{a} \ln \frac{a+\sqrt{\xi+a^2}}{\sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{r^2+z^2-a^2+\sqrt{(r^2+z^2-a^2)^2+4r^2a^2}}{2}, \\
r^2 &= z^2+y^2; \quad \rho(z) = \frac{Q}{2a}. \quad \mathbf{5.66.} \quad u = \frac{Q}{\sqrt{a^2-c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}, \quad \xi - \text{наибольший} \\
&\text{корень уравнения} \quad \frac{x^2+y^2}{\xi+a^2} + \frac{z^2}{\xi+c^2} = 1. \\
\mathbf{5.67.} \quad u &= \frac{Q}{r_0} \operatorname{arctg} \left(\frac{r^2+z^2-r_0^2+\sqrt{(r^2+z^2-r_0^2)^2-4z^2r_0^2}}{2r_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad r^2 = x^2+y^2.
\end{aligned}$$

5.68. $u = -\frac{E_0\sqrt{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}} \left(1 - \frac{M_{100}(\xi)}{Ma} \right)$. Указание. Поле симметрично относительно плоскости yOz , поэтому достаточно рассмотреть случай $x > 0$. Потенциал $u = u_0 + v$, где (см. (5.23))

$$u_0 = -E_0x = -\frac{\sqrt{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}}{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}, \quad \text{а } v - \text{решение задачи}$$

$$\Delta v = 0, \quad 0 < \xi,$$

$$v|_{\xi=0} = -u_0|_{\xi=0}, \quad v \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Пусть $v = u_0f(\xi)$, где $f(0) = -1$, тогда уравнение $\Delta(u_0f) = 0$ сводится к

$$f'' + f' \frac{d}{d\xi} \ln[(\xi+a^2)R(\xi)] = 0, \quad (5.40)$$

$$\text{откуда } f(\xi) = C + D M_{100}(\xi). \quad \mathbf{5.69.} \quad \sigma = \frac{1}{4\pi\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \left(\frac{x E_x}{a^2 M_a} + \frac{y E_y}{b^2 M_b} + \frac{z E_z}{c^2 M_c} \right).$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{5.70.} \quad 1. \quad \sigma(x, y) &= \frac{(a^2-b^2)E_0x}{4\pi a^2 b [K(k) - E(k)] \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}; \\
2. \quad \sigma(x, y) &= \frac{(a^2-b^2)E_0y}{4\pi b [a^2 E(k) - b^2 K(k)] \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}, \quad k = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.
\end{aligned}$$

$K(k)$, и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода.

5.71. $\sigma(r, \varphi) = \frac{2E_0 r \cos \varphi}{\pi^2 \sqrt{r_0^2 - r^2}}.$

5.72. 1) $u = -E_0 x \left(1 - \frac{\ln \frac{\sqrt{\xi+a^2} + \sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+a^2}} - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{\xi+a^2}}}{\ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} - \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a}}} \right),$

$$\sigma = \frac{e^3 E_0 x}{2\pi \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right) \sqrt{(1-e^2)^2 x^2 + r^2}};$$

2) $u = -E_0 z \left(1 - \frac{\frac{\sqrt{\xi+a^2}}{\xi+b^2} - \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{\sqrt{\xi+a^2} - \sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+b^2}}}{\frac{a}{b^2} - \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \ln \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}} \right),$

$$\sigma = \frac{e^2 E_0 z}{2\pi \left(1 - \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \sqrt{(1-e^2)^2 x^2 + r^2}},$$

где $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, ξ — наибольший корень уравнения $\frac{x^2}{\xi+a^2} + \frac{y^2+z^2}{\xi+b^2} = 1$.

5.73. 1) $\sigma = \frac{e^2 E_0 x}{2\pi \left(\frac{1+e^2}{e} \operatorname{arctg} e - 1 \right) \sqrt{r^2 + (1+e^2)^2 z^2}}, \quad e = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1},$

2) $\sigma = \frac{e^3 E_0 z}{4\pi(e - \operatorname{arctg} e) \sqrt{r^2 + (1+e^2)^2 z^2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2.$

5.74. $\mathbf{H} = \frac{H_{0x}\mathbf{e}_x}{1+(\mu-1)M_a} + \frac{H_{0y}\mathbf{e}_y}{1+(\mu-1)M_b} + \frac{H_{0z}\mathbf{e}_z}{1+(\mu-1)M_c}$ — однородное поле. Указание. Если поле $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{e}_x$, то потенциал $u = u_0 + v$, где $u_0 = -H_0 x$, $v = u_0 f(\xi)$, $f(\xi)$ — решение уравнения (5.40) на промежутках $-a^2 < \xi < 0$, $0 < \xi$. Условия для определения постоянных интегрирования: ограниченность производной u_ξ в точке $\xi = -a^2$, $v \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, непрерывность функций u и $\mu \frac{\partial u}{\partial n}$.

5.75. $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{E}_0}{1 + \frac{\varepsilon-1}{2e^2} \left(1 - \frac{1-e^2}{2e} \ln \frac{1+e}{1-e} \right)}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$ 5.76. $\mathbf{H} = \frac{\mathbf{H}_0}{1 + \frac{\mu-1}{e^3} (1+e^2)(e - \operatorname{arctg} e)},$

$e = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1}.$ 5.77. 1) Из (5.19), (5.20) следует, что

$$\frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{\Delta p \Delta S}{\Delta p' \Delta S'} = \frac{p \Delta S dk}{p' \Delta S' dk'}, \quad \frac{dV}{dV'} = \frac{abc dk}{a'b'c' dk'}.$$

Свойство (5.29) достаточно доказать для элементарных площадок ΔS и $\Delta S'$, имеющих форму треугольников с вершинами $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}'_i$, $i = 1, 2, 3$. В этом случае $2p\Delta S$ и $2p'\Delta S'$ — объемы параллелепипедов, построенных на векторах $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}'_i$, так что с учетом (5.28)

$$2p\Delta S = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3) = \frac{abc}{a'b'c'} (\mathbf{r}'_1 \mathbf{r}'_2 \mathbf{r}'_3) = \frac{abc}{a,b,c} 2p'\Delta S'.$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta V}{\Delta V'} = \frac{abc}{a'b'c'} \frac{dk}{dk'} = \frac{dV}{dV'}.$$

2) Так как $a'^2 - a^2 = b'^2 - b^2 c'^2 - c^2 = \xi$, то

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^2 &= (x - x'_1)^2 + \dots \left(\frac{a}{a'} x' - \frac{a'}{a} x_1 \right)^2 + \dots = \frac{a^2}{a'^2} x'^2 + \frac{a'^2}{a^2} x_1^2 - 2x'_1 x_1 + \dots = \\ &= \left(\frac{a^2}{a'^2} - 1 \right) x'^2 + x'^2 + \left(\frac{a'^2}{a^2} - 1 \right) x_1^2 + x_1^2 - 2x'_1 x_1 + \dots = \end{aligned}$$

$$= -\xi \left(\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} \right) + \xi \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|^2 = |\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|^2.$$

5.78. Решение. Если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_1$ — точки на S , $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}'_1$ — взаимные точки на S' , dV и dV' — взаимные объемы в окрестностях точек $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}'_1$, то в силу (5.29), (5.30)

$$\Delta u(\mathbf{r}') = \frac{\rho(\mathbf{r}_1)\Delta V}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1|} = \frac{\rho'(\mathbf{r}'_1)\Delta V'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1|} \Delta u'(\mathbf{r}).$$

Интегрирование полученного тождества приводит к (5.31). **5.79.** 1)

$$du = \frac{dq}{abc} M_0(\xi). \quad (5.41)$$

Указание. Воспользоваться формулой (5.38) и теоремой взаимности (5.31).

$$\begin{aligned} \mathbf{5.80.} \quad u(\mathbf{r}) &= 2\pi\rho_0 \begin{cases} M_0 - M_a x^2 - M_b y^2 - M_c z^2, & \xi \leq 0 \\ M_0(\xi) - M_{100}(\xi)x^2 - M_{010}(\xi)y^2 - M_{001}(\xi)z^2, & 0 < \xi; \end{cases} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 4\pi\rho_0 \begin{cases} M_a x \mathbf{e}_x + M_b y \mathbf{e}_y + M_c z \mathbf{e}_z, & \xi \leq 0 \\ M_{100}(\xi)x \mathbf{e}_x + M_{010}(\xi)y \mathbf{e}_y + M_{001}(\xi)z \mathbf{e}_z, & 0 < \xi, \end{cases} \end{aligned}$$

ξ — эллиптическая координата точки $\mathbf{r}$ относительно поверхности эллипсоида. Решение. Пусть S_k — поверхность эллипсоида Ω_k с полуосями ka , kb , kc , где $0 < k < 1$. Эллиптическая координата ξ_k точки $\mathbf{r}$ относительно S_k есть наибольший корень уравнения

$$\frac{x^2}{\xi + k^2 a^2} + \frac{y^2}{\xi + k^2 b^2} + \frac{z^2}{\xi + k^2 c^2} = 1. \quad (5.42)$$

Потенциал вне Ω_1 складывается из потенциалов гомеоидов, ограниченных поверхностями S_k и S_{k+dk} . Потенциал отдельного гомеоида (см. (5.41))

$$du(\mathbf{r}) = 2\pi abc\rho_0 k^2 dk \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(s + k^2 a^2)(s + k^2 b^2)(s + k^2 c^2)}}, \quad (5.43)$$

а результирующий потенциал (после замены $s = k^2 t$ в (5.43))

$$u(\mathbf{r}) = 2\pi abc\rho_0 \int_0^1 k dk \int_{\frac{\xi_k}{k^2}}^{\infty} \frac{dt}{R(t)}.$$

Интегрирование по частям

$$u(\mathbf{r}) = \pi abc\rho_0 \left[\int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{R(t)} + \int_0^1 \frac{k^2}{R\left(\frac{\xi_k}{k^2}\right)} d\left(\frac{\xi_k}{k^2}\right) \right],$$

где $\xi = \xi_1$ и замена $\xi_k/k^2 = t$ с учетом (5.42) завершают выкладку:

$$u(\mathbf{r}) = \pi abc\rho_0 \left[\int_{\xi}^{\infty} \frac{dt}{R(t)} - \int_{\xi}^{\infty} \left(\frac{x^2}{t + a^2} + \frac{y^2}{t + b^2} + \frac{z^2}{t + c^2} \right) \frac{dt}{R(t)} \right]. \quad (5.44)$$

Пусть $\mathbf{r}$ — внутренняя точка эллипсоида Ω . Поверхность S_k , проходящая через эту точку, разбивает Ω на эллипсоид Ω_k и гомеоид, ограниченный

поверхностями S_k и S . Потенциал $u(\mathbf{r})$ равен сумме потенциалов $u_1(\mathbf{r})$ эллипсоида Ω_k и $u_2(\mathbf{r})$ гомеоида в точке $\mathbf{r}$ поверхности S_k . Потенциал $u_1(\mathbf{r})$ получается из (5.44) при $\xi=0$ и преобразуется заменой $t = k^2 s$ к виду

$$u_1(\mathbf{r}) = \pi a b c \rho_0 \int_0^\infty \left(k^2 - \frac{x^2}{s+a^2} + \frac{y^2}{s+b^2} + \frac{z^2}{s+c^2} \right) \frac{ds}{R(s)}.$$

Потенциал $u_2(\mathbf{r})$ определен выражением (5.37), где $Q = \frac{4}{3}\pi(1-k^3)abc\rho_0$:

$$u_2(\mathbf{r}) = 2\pi\rho_0(1-k^2)M_0.$$

5.81. В системе координат, осями которой являются оси эллипсоида, а начало — его центр $D_{xx} = \frac{Q}{5}(2a^2 - b^2 - c^2)$, $D_{yy} = \frac{Q}{5}(2b^2 - c^2 - a^2)$, $D_{zz} = \frac{Q}{5}(2c^2 - a^2 - b^2)$.

Указание. См. задачу 5.28.

$$\mathbf{5.83.} \quad u(\alpha, \beta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^\infty C_n \frac{P_n(i sh \alpha)}{P_n(i sh \alpha_s)} P_n(\cos \beta), & \alpha \leq \alpha_s, \\ \sum_{n=0}^\infty C_n \frac{Q_n(i sh \alpha)}{Q_n(i sh \alpha_s)} P_n(\cos \beta), & \alpha_s \leq \alpha, \end{cases}$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\beta) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta, \quad sh \alpha_s = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

5.84. См. ответ к предыдущей задаче, где

$$C_{2m} = \frac{u_1 + u_2}{2} \delta_{m0}, \quad C_{2m+1} = \frac{(u_1 - u_2)(4m+3)}{4(m+1)} P_{2m}(0), \quad m \in \mathbf{N}.$$

$$\mathbf{5.85.} \quad u(\alpha) = \begin{cases} u_0, & \alpha \leq \alpha_s, \\ u_0 \frac{arcctg sh \alpha}{arcctg sh \alpha_s}, & \alpha_s \leq \alpha, \end{cases} \quad sh \alpha_s = \frac{c}{d}, \quad d = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

$$\sigma = \frac{u_0 d}{4\pi a^2 c \arcsin \frac{d}{a} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}}, \quad C = \frac{d}{\arcsin \frac{d}{a}}.$$

$$\mathbf{5.86.} \quad u(\alpha) = \frac{2u_0}{\pi} arcctg sh \alpha, \quad \sigma = \frac{u_0}{2\pi^2 \sqrt{r_0^2 - r^2}}, \quad C = \frac{2r_0}{\pi},$$

$$\mathbf{5.87.} \quad u(\alpha) = \frac{I}{2\pi\sigma} \begin{cases} \frac{arcctg \frac{c}{d}}{d}, & \alpha \leq \alpha_s, \\ \frac{arcctg sh \alpha}{d}, & \alpha_s \leq \alpha, \end{cases} \quad sh \alpha_s = \frac{c}{d}, \quad d = \sqrt{a^2 - c^2};$$

$$\mathbf{j} = \frac{J}{2\pi a^2 c \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \mathbf{e}_\alpha, \quad R = \frac{arcctg \frac{d}{c}}{2\pi\sigma d}.$$

$$\mathbf{5.89.} \quad u(\alpha, \beta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^\infty C_n \frac{P_n(ch \alpha)}{P_n(ch \alpha_s)} P_n(\cos \beta), & \alpha \leq \alpha_s, \\ \sum_{n=0}^\infty C_n \frac{Q_n(ch \alpha)}{Q_n(ch \alpha_s)} P_n(\cos \beta), & \alpha_s \leq \alpha, \end{cases}$$

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\beta) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta, \quad ch \alpha_s = \frac{a}{\sqrt{a^2 - c^2}}.$$

$$\mathbf{5.90.} \quad u(\alpha) = \begin{cases} u_0, & \alpha \leq \alpha_s, \\ u_0 \frac{Q_0(ch \alpha)}{Q_0(ch \alpha_s)}, & \alpha_s \leq \alpha, \end{cases} \quad ch \alpha_s = \frac{a}{d}, \quad d = \sqrt{a^2 - b^2};$$

$$\sigma = \frac{u_0 d}{4\pi a b^2 \ln \frac{a+d}{b} \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b^4} + \frac{z^2}{a^4}}}, \quad C = \frac{d}{\ln \frac{a+d}{b}}.$$

$$\mathbf{5.91.} \quad u(\alpha) = \frac{I}{4\pi\sigma d} \ln \frac{ch \alpha + 1}{ch \alpha - 1} \quad \alpha_s \leq \alpha, \quad ch \alpha_s = \frac{a}{d}, \quad d = \sqrt{a^2 - b^2};$$

$$\mathbf{j} = \frac{I}{2\pi ab^2 \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{b^4} + \frac{z^2}{a^4}}} \mathbf{e}_\alpha, \quad R = \frac{1}{2\pi d\sigma} \ln \frac{a+d}{b}.$$

$$\mathbf{5.92.} \quad u(\theta, \varphi) = u_0 \frac{r}{r_0} \sin \theta \sin \varphi. \quad \mathbf{5.93.}$$

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{r_0}{4\pi} \int_{S_1} \frac{(r_0^2 - r^2) f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.45)$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'). \quad (5.46)$$

Указание. См. задачу 4.241. **5.94.**

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{r_0}{4\pi} \int_{S_1} \frac{(r^2 - r_0^2) f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5.47)$$

где $\cos \gamma$ определен выражением (5.46); $u(r, \theta, \varphi) = u_0 \frac{r^3}{r_0^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi$.

Указание. Так как $u = O\left(\frac{1}{r}\right)$ при $r \rightarrow \infty$, то решение следует отыскивать в виде $u(M) = \int \frac{\nu(P) \cos \varphi_{PM}}{MP^2} ds + \frac{C}{r}$. См. также задачу 4.241

$$\mathbf{5.95.} \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) f(\psi) d\psi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \varphi)}; \quad u(r, \varphi) = u_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^m \sin m\varphi.$$

$$\mathbf{5.96.} \quad 1) u(r, \varphi) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \cos 2\varphi\right); \quad 2) u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi r_0} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - r_0^2) f(\psi) d\psi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \varphi)}.$$

Указание. Решение — ограниченная функция, поэтому его следует представить в виде $u(M) = \int_\Gamma \frac{\nu(P) \cos \varphi_{PM}}{r_{MP}} ds + C$. См. также задачу 4.209.2.

$$\mathbf{5.97.} \quad 1) u(x, y) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(-\frac{x}{y}\right); \quad 2) u(x, y) = u_0 e^{-y} \sin x;$$

$$3) u(x, y) = u_0 \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2}. \quad \mathbf{5.98.} \quad u(x, y) = u_1 + \frac{2}{\pi} (u_2 - u_1) \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad \text{Указание.}$$

$$\text{См. задачу 4.169.} \quad \mathbf{5.99.} \quad u(x, y) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(x^2 + y^2)^2 - l^4}{4xy l^2}.$$

$$\mathbf{5.100.} \quad u(r, \varphi) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^{\frac{\alpha}{\alpha}-l} \frac{\pi}{\alpha} \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha}}{l^{\frac{\alpha}{\alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}}.$$

$$\mathbf{5.101.} \quad u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$1) u(x, y, z) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right); \quad 2) u(x, y, z) = \frac{2u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$3) u(x, y, z) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{kx-y}{z\sqrt{1+k^2}}; \quad 4) u(x, y, z) = u_0 e^{-z\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos(\alpha x + \beta y).$$

$$\mathbf{5.102.} \quad u(x, y, z) = \frac{2u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$\mathbf{5.103.} \quad u(x, y) = u_1 + \frac{2}{\pi} (u_2 - u_1) \operatorname{arctg} \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

$$\mathbf{5.104.} \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} d\xi; \quad u(x, y) = \frac{\alpha x}{2[x^2 + (y+1)^2]}.$$

$$5.105. \quad u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}}.$$

$$5.106. \quad u(x, y, z) = \frac{I}{4\pi\sigma l} \ln \frac{\sqrt{(l+x)^2 + y^2 + z^2} - x - l}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2 + z^2} - x + l}.$$

$$5.107. \quad u(r, \varphi) = C + \frac{r_0}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \varphi)}} d\psi.$$

$$5.108. \quad u(r, \varphi) = \frac{q_0 r^2 \sin 2\varphi}{2Dr_0} + C.$$

$$5.109. \quad u(r, \varphi) = C - \frac{r_0}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi) \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \varphi)}} d\psi.$$

$$5.110. \quad u(r, \varphi) = \frac{q_0 r_0^2}{kr} \cos \varphi.$$

5.111. $u(r, \theta, \varphi) = r_0 \int_0^r v(\xi, \theta, \varphi) \frac{d\xi}{\xi} + C$, где $v(\xi, \theta, \varphi)$ — решение задачи Дирихле при условии $v(r_0, \theta, \varphi) f(\theta, \varphi)$ (см. (5.45)). Частный случай:

$u(r, \theta, \varphi) = q_0 r \sin \theta \cos \varphi$. Указание. Либо применить потенциал простого слоя, либо свести задачу Неймана к задаче Дирихле для функции $v = \frac{r}{r_0} \frac{\partial u}{\partial r}$.

$$5.112. \quad u(r, \theta, \varphi) = \frac{I}{4\pi\sigma r_0} \ln \frac{r_0 - r \cos \theta + \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}}{r_0 + r \cos \theta + \sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \theta}} - \\ - \frac{I}{2\pi\sigma r_0} \left(\frac{r_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta}} + \frac{r_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \cos \theta}} \right) + C.$$

5.113. $u(r, \theta, \varphi) = r_0 \int_r^\infty v(\xi, \theta, \varphi) \frac{d\xi}{\xi}$, где $v(\xi, \theta, \varphi)$ — решение внешней задачи Дирихле при условии $v(r_0, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ (см. 6.54).

5.114. $u(M) = v(M) + u_0(M)$, где

$$u_0(M) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} F(p) \ln \frac{1}{r_{MP}} dr, & \Omega \in R^2, \\ -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{F(P)}{r_{MP}} dr, & \Omega \in R^3, \end{cases}$$

а $v(M)$ — решение задачи Дирихле

$$\Delta v(M) = 0, \quad M \in \Omega, \\ (\alpha v + \beta \frac{\partial v}{\partial n})|_S = f - (\alpha u_0 + \beta \frac{\partial u_0}{\partial n})|_S.$$

$$5.115. \quad u(r, \varphi) = -2p \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r_0^2} \right) \cos \varphi + C, \quad \sigma(\varphi) = \frac{p \cos \varphi}{\pi r_0^2}.$$

$$5.116. \quad u(r, \theta) = -p \left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{r_0^3} \right) \cos \theta + C, \quad \sigma(\theta) = \frac{3p \cos \theta}{4\pi r_0^2}.$$

$$5.117. \quad u(r, \theta, \varphi) = r_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^n \frac{f_{mn} Y_n^m(\theta, \varphi)}{n + hr_0}, \quad u(r, \theta, \varphi) = \frac{u_0 h r^n Y_n^m(\theta, \varphi)}{(n + hr_0) r_0^{n+1}}.$$

f_{mn} — коэффициенты разложения функции $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям Y_n^m . Указание. Решение искать в виде потенциала простого слоя;

см. также задачу 4.237. 5.118. $u(r, \theta, \varphi) = r_0 h \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{m=n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \frac{f_{mn} Y_n^m(\theta, \varphi)}{n+1+hr_0}$;

$u(r, \theta, \varphi) = \frac{u_0 h r^{n+2} Y_n^m(\theta, \varphi)}{(n+1+hr_0) r^{n+1}}$, обозначения те же, что в предыдущей задаче.

$$5.119. \quad 1) \quad \sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + l_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + l_2^2}} \right);$$

$$2) \quad \sigma(x, y) = -\frac{ql_2}{2\pi(y^2 + l_2^2)} \left(\frac{l_1 - x}{\sqrt{(l_1 - x)^2 + y^2 + l_2^2}} + \frac{l_1 + x}{\sqrt{(l_1 + x)^2 + y^2 + l_2^2}} \right).$$

$$5.120. \quad \sigma(x, y) = -\frac{3phx}{2\pi(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad 5.121. \quad \sigma(\theta) = \frac{3E_0 \cos \theta}{4\pi}.$$

$$5.122. \quad \sigma(\theta) = \frac{Q}{4\pi r_0^2} + \frac{3E_0 \cos \theta}{4\pi}. \quad 5.123. \quad \sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi r_0} \frac{d^2 - r_0^2}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{sign} \left(1 - \frac{d}{r_0} \right).$$

$$5.124. \quad 1) \quad \sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi r_0^2} \left[1 - \frac{r_0(d^2 - r_0^2)}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{Q}{4\pi r_0^2};$$

$$2) \quad \sigma(\theta) = \frac{q}{4\pi r_0 d} \left[1 - \frac{d(d^2 - r_0^2)}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right] + \frac{Q}{4\pi r_0^2}.$$

$$5.125. \quad \sigma(\theta, \varphi) = \frac{q}{\pi} \frac{(r_0 \sin \theta - d \cos \varphi) \sin \theta}{d^2 + r_0^2 \sin^2 \theta - 2r_0 d \sin \theta \cos \varphi} - \\ - \frac{q}{2\pi r_0} \ln \frac{d}{\sqrt{d^2 + r_0^2 \sin^2 \theta - 2r_0 d \sin \theta \cos \varphi}} + \frac{Q}{4\pi r_0^2},$$

нить расположена в плоскости xOz параллельно оси Oz .

$$5.126. \quad 1) \quad \sigma_0(\theta) = \frac{p}{4\pi r_0} \frac{d^3 - 5dr_0^2 + r_0^2(d^2 + 3r_0^2) \cos \theta}{(d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \theta)^{\frac{5}{2}}}; \quad 2) \quad \sigma(\theta)\sigma_0(\theta) = \frac{p}{4\pi r_0 d^2}.$$

$$5.127. \quad 1) \quad \sigma_0(\theta, \varphi) = -\frac{3p(d^2 - r_0^2) \sin \theta \cos \varphi}{4\pi(d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \theta)^{\frac{5}{2}}}; \quad 2) \quad \sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0(\theta, \varphi) + \frac{Q}{4\pi r_0^2}, \quad \text{точка}$$

M на оси Oz , вектор $\mathbf{p}$ параллелен оси Ox . $5.129. \quad \sigma(x, y) = \frac{E_n(x, y, 0)}{2\pi}.$

$$5.130. \quad \sigma(M) = \frac{E_n(M)}{2\pi}. \quad 5.131. \quad \sigma(\varphi) = \frac{q_0}{2\pi r_0} + \frac{E_0 \cos \varphi}{2\pi}.$$

$$5.132. \quad \sigma(\varphi) = \frac{q_0}{2\pi r_0} + \frac{q}{\pi} \frac{r_0 - d \cos \varphi}{d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \varphi}. \quad 5.133. \quad \sigma(x) = \frac{p}{\pi} \frac{x^2 - h^2}{(x^2 + h^2)^2}.$$

$$5.134. \quad 1) \quad \sigma_0(\varphi) = -\frac{p(d^2 - r_0^2) \sin \varphi}{\pi(d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \varphi)^2}; \quad 2) \quad \sigma(\varphi) = \sigma_0(\varphi) + \frac{q}{2\pi r_0}.$$

$$5.135. \quad \sigma_{1,2}(x) = -\frac{q}{2h} \frac{\frac{\pi}{h}}{ch \frac{\pi}{h}}. \quad \text{Указание. Применить преобразование Фурье.}$$

$$5.136. \quad \sigma_{1,2}(r) = -\frac{2q}{3\pi r} \frac{1}{\left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{d}{r}\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{Указание. Применить преобразо-}$$

вание Меллина. $5.137. \quad \sigma_{1,2}(r) = -\frac{q}{2\pi} \sqrt{\frac{d}{r}} \frac{1}{d+r}.$ Указание. Применить преобразование Меллина (см. задачу 4.322.1.)

Глава 6

МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА

Этот метод применим к решению линейных задач для уравнения

$$\mathcal{L}u(x) = F(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, \quad (6.1)$$

где

$$\mathcal{L} = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha$$

— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Суть метода заключается в следующем. Для построения решения уравнения (6.1) в области Ω при нулевых дополнительных условиях (граничных, начальных) используется функция Грина, или функция источника, которая является решением уравнения

$$\mathcal{L}G = \delta(x - \xi) \quad (6.2)$$

в области Ω при тех же дополнительных условиях. Если функцию $F(x)$ трактовать как плотность источников, то $G(x, \xi)$ характеризует влияние единичного источника, помещенного в точку $x=\xi$.

Так как $F(x)$ может быть представлена в форме суперпозиции точечных источников

$$F(x) = \int_{\Omega} F(\xi) \delta(x - \xi) d\xi,$$

то в силу линейности задачи для уравнения (6.1) ее решение

$$u(x) = \int_{\Omega} F(\xi) G(x, \xi) d\xi.$$

Таким образом, решение линейных задач методом функции Грина основано на следующем принципе: результат действия суммы источников равен сумме их действий.

В случае ненулевых дополнительных условий следует осуществить необходимую редукцию, т.е. перейти к задаче с нулевыми условиями.

Проведенные эвристические рассуждения не являются доказательством того, что найденное решение действительно является таковым, т.е. удовлетворяет всем условиям, определяющим задачу: необходимо математическое обоснование этого факта.

Решение широкого класса задач (задачи Коши, смешанных и краевых задач) для линейных уравнений различного типа проводится по единой схеме. 1) Определение функции Грина, т.е. формулировка условий, которым она удовлетворяет; если задача состоит в решении уравнения (6.1) в области Ω при заданных дополнительных условиях (необязательно нулевых), то соответствующая функция Грина является решением уравнения (6.2) в той же области при нулевых дополнительных условиях. 2) Построение функции Грина. 3) Построение решения основной задачи с помощью функции Грина.

Аппарат функции Грина является также эффективным средством преобразования задачи для дифференциального уравнения в эквивалентное интегральное уравнение.

Литература к главе: [72], [14], [10], [60].

6.1. Решение задач для волнового уравнения

Пример 6.1. Построение функции Грина задачи Коши для волнового уравнения. Задаче Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t < \tau, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \end{aligned} \quad (6.3)$$

соответствует функция Грина, которая удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} G_{tt} &= a^2 G_{xx} + \delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau), \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau < t, \\ G|_{t=\tau} &= G_t|_{t=\tau} = 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Волновой оператор $\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ инвариантен относительно замены переменных $x - \xi \rightarrow \xi$, $t - \tau \rightarrow \tau$, поэтому задачу (6.4) достаточно решить при $\xi=0$, $\tau=0$ и в полученном решении заменить x на $x - \xi$, t на $t - \tau$. Поскольку скорость распространения возмущения конечна, то при любом t функции G , G_x , G_{xx} равны нулю при достаточно больших значениях $|x|$. При этом условии применимо преобразование Фурье

$$\tilde{G}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t) e^{-i\lambda x} dx,$$

которое трансформирует задачу (6.4), где $\xi=0$, $\tau=0$, в задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{tt} + a^2 \lambda^2 \tilde{G} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \delta(t), \quad t > 0, \\ \tilde{G}(\lambda, 0) &= \tilde{G}_t(\lambda, 0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\tilde{G} = \frac{\sin a\lambda t}{\sqrt{2\pi} a\lambda} \eta(t),$$

следовательно, функция Грина задачи (6.4) (см. задачу 3.12)

$$G(x - \xi, t - \tau) = \frac{1}{2a} \eta \left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{a} \right). \quad (6.5)$$

Волновое уравнение описывает малые поперечные колебания струны. Если струна возбуждается поперечным ударным импульсом I в точке $x=\xi$ в момент времени $t = \tau$, то правая часть волнового уравнения в задаче (6.3) будет содержать слагаемое $\frac{I}{\rho}\delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau)$. Следовательно, отклонения точек струны от положения равновесия

$$u(x, t) = \frac{I}{\rho} G(x - \xi, t - \tau). \quad (6.6)$$

В этом заключается физический смысл функции источника в данном случае. Исходя из физического смысла функции Грина, задачу для ее определения можно поставить в виде

$$\begin{aligned} G_{tt} &= a^2 G_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ G(x, \tau) &= 0, \quad G_t(x, \tau) = \delta(x - \xi). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Постановки (6.4) и (6.7) эквивалентны: одна из другой получается с помощью формулы (10.15).

6.1. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения, описывающего потенциал бесконечной линии $(-\infty < x < \infty)$ без искажения ($RC=LG$).

6.2. Бесконечная трубка $(-\infty < x < \infty)$ заполнена идеальным газом, давление и плотность которого P_0 и ρ_0 соответственно. В момент времени $t=0$ в сечении $x=0$ выделилось равномерно по сечению количество Q того же газа. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

6.3. Построить функцию Грина задачи Коши для волнового уравнения $u_{tt} = a^2 \Delta u$ 1) в $\mathbf{R}^2$; 2) в $\mathbf{R}^3$.

6.4. На оси Oz расположены мгновенные источники идеального газа, в результате действия которых с каждой единицы длины оси в момент времени $t=0$ выделилось количество q_0 газа. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если его равновесные давление и плотность P_0 и ρ_0 соответственно.

6.5. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа в результате действия точечного источника, выделившего в момент времени $t=0$ количество Q того же газа; равновесные давление и плотность P_0 и ρ_0 соответственно.

6.6. Неограниченная струна $(-\infty < x < \infty)$ получает импульс I в результате поперечного удара в точку $x=0$. Решить задачу о движении струны, если сопротивление внешней среды пропорционально скорости движения струны (коэффициент пропорциональности α задан).

6.7. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения, описывающего потенциал бесконечной линии с пренебрежимо малой утечкой на единицу длины.

6.8. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения, описывающего потенциал бесконечной линии $(-\infty < x < \infty)$ с параметрами R, L, C, G .

6.9. Неограниченная струна $(-\infty < x < \infty)$ получает импульс I в результате поперечного удара в точку $x=0$. Решить задачу о движении струны, если на нее действуют упругие силы, пропорциональные отклонению точек струны от положения равновесия (коэффициент пропорциональности k , отнесенный к единице длины струны, задан).

6.10. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + k^2 u.$$

6.11. Построить в $\mathbf{R}^2$ функцию Грина задачи Коши для уравнений

$$1) u_{tt} = a^2 \Delta u - k^2 u; \quad 2) u_{tt} = a^2 \Delta u + k^2 u.$$

6.12. Построить в $\mathbf{R}^3$ функцию Грина задачи Коши для уравнений

$$1) u_{tt} = a^2 \Delta u - k^2 u; \quad 2) u_{tt} = a^2 \Delta u + k^2 u.$$

6.13. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения малых поперечных колебаний бесконечного упругого стержня.

Пример 6.2. Функция Грина задачи Коши для уравнения колебаний неоднородной струны, плотность которой равна ρ_1 при $x < 0$, ρ_2 при $x > 0$, является решением задачи

$$\begin{aligned} G_{tt} &= \frac{\partial}{\partial x} a^2(x) \frac{\partial G}{\partial x} + \delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau), \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau < t, \\ G|_{x=-0} &= G|_{x=+0}, \quad G_x|_{x=-0} = G_x|_{x=+0}, \\ G|_{t=\tau} &= G_t|_{t=\tau} = 0, \end{aligned}$$

где

$$a^2(x) = \begin{cases} a_1^2 = \frac{T_0}{\rho_1}, & x < 0, \\ a_2^2 = \frac{T_0}{\rho_2}, & x > 0. \end{cases}$$

Пусть $\xi < 0$; изображение $\tilde{G} = \mathcal{L}[G]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xx} - \frac{p^2}{a_1^2} \tilde{G} &= -\frac{1}{a_1^2} \delta(x - \xi), & \tilde{G}_{xx} - \frac{p^2}{a_2^2} \tilde{G} &= 0, \\ x < 0, & & 0 < x, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}|_{x=-0} = \tilde{G}|_{x=+0}, \quad \tilde{G}_x|_{x=-0} = \tilde{G}_x|_{x=+0}.$$

Ограниченное решение имеет вид

$$\tilde{G} = \begin{cases} A e^{\frac{p}{a_1} x}, & x < \xi, \\ B e^{\frac{p}{a_1} x} + C e^{-\frac{p}{a_1} x}, & \xi < x < 0, \\ D e^{-\frac{p}{a_2} x}, & 0 < x. \end{cases}$$

Из условий при $x=0$ и $x=\xi$ (см. (10.15)) получается система уравнений для определения коэффициентов A, B, C, D :

$$\begin{cases} B + C = D \\ B - C = \frac{a_1}{a_2} D \\ A - B = \alpha^2 C \\ A - B = -\alpha^2 C + \frac{\alpha}{p a_1}, \end{cases}$$

где $\alpha = \exp(-\frac{p}{a_1}\xi)$. В результате

$$\tilde{G} = \begin{cases} \frac{a_2 - a_1}{2a_1(a_1 + a_2)p} e^{\frac{p}{a_1}(x + \xi)} + \frac{1}{2a_1p} e^{-\frac{p}{a_1}|x + \xi|}, & x < 0, \\ \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)p} e^{-p(\frac{x}{a_2} - \frac{\xi}{a_1})}, & 0 < x. \end{cases}$$

Соответствующий оригинал

$$G(x, \xi, t) = \begin{cases} \frac{a_2 - a_1}{2a_1(a_1 + a_2)} \eta\left(t + \frac{x + \xi}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_1} \eta\left(t - \frac{|\xi - x|}{a_1}\right), \\ \frac{a_2}{a_1(a_1 + a_2)} \eta\left(t + \frac{\xi}{a_1} - \frac{x}{a_2}\right), \end{cases} \quad (6.8)$$

где первая строка соответствует положительным значениям x а вторая — отрицательным. Если $\xi > 0$, то функция Грина получается из (6.8) заменами: $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$, $\xi \rightarrow -\xi$, $x \rightarrow -x$.

6.14. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения продольных колебаний неоднородного стержня с характеристиками ρ_1 , E_1 , S_0 при $x < 0$, ρ_2 , E_2 , S_0 при $x > 0$.

6.15. Неограниченная струна $(-\infty < x < \infty)$ с шариком массой m в точке $x = 0$ получает импульс I в результате поперечного удара в точку $x = \xi$. Найти отклонение точек струны от положения равновесия.

6.16. В момент времени $t = 0$ в точку $x = \xi \neq 0$ неограниченной линии $(-\infty < x < \infty)$ помещен заряд Q . Определить потенциал линии, если ее параметры $R = G = 0$,

$$L = \begin{cases} L_1, & x < 0, \\ L_2, & 0 < x, \end{cases} \quad C = \begin{cases} C_1, & x < 0, \\ C_2, & 0 < x. \end{cases}$$

Начальные ток и потенциал равны нулю.

Пример 6.3. Решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения. На бесконечную струну $(-\infty < x < \infty)$ с момента $t = 0$

действует поперечная сила плотности $F(x, t)$. Функция $u(x, t)$, характеризующая отклонение точек струны от положения равновесия, является решением задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + \frac{1}{\rho} F(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Силу $F(x, t)$ можно представить в виде суперпозиции

$$F(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \tau) \delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau) d\xi d\tau$$

мгновенных точечных импульсов $F(\xi, \tau)$. Каждый такой импульс обуславливает отклонение (см. (6.6))

$$\frac{1}{\rho} F(\xi, \tau) G(x - \xi, t - \tau),$$

а суммарное отклонение

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \tau) G(x - \xi, t - \tau) d\xi.$$

При $t < 0$ функции $F(x, t)$ и $G(x - \xi, t)$ равны нулю, поэтому

$$u(x, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \tau) G(x - \xi, t - \tau) d\xi, \quad (6.9)$$

где функция Грина определена формулой (6.5). Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\rho} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \tau) \eta \left(t - \tau - \frac{|x - \xi|}{a} \right) d\xi.$$

Подынтегральная функция не равна нулю, если $t - \tau - \frac{|x - \xi|}{a} > 0$, следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\rho} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi. \quad (6.10)$$

В частном случае поперечной силы $F_0(t)$, приложенной в точке $x=0$ струны,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\rho} \int_0^t F_0(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \delta(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2a\rho} \int_0^{t-\frac{|x|}{a}} F_0(\tau) d\tau \cdot \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right). \quad (6.11) \end{aligned}$$

6.17. На струну $(-\infty < x < \infty)$ с момента $t=0$ действует поперечная сила $F_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$, приложенная в точке $x=0$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях. Начертить профиль струны в момент времени $t_0 > 0$. Найти закон движения точки с координатой x_0 и построить соответствующий график.

6.18. На струну $(-\infty < x < \infty)$ с момента $t=0$ действует поперечная сила $F_0 \sin \omega t$, приложенная в точке $x=0$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях.

6.19. В точке $x=0$ неограниченной струны $(-\infty < x < \infty)$ приложена сила $F_0 \mathbf{e}_u$, действующая в течение времени от $t=0$ до $t=t_0 > 0$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях.

6.20. В идеальном газе, равновесные давление и плотность которого P_0 и ρ_0 соответственно, с момента времени $t=0$ действуют источники того же газа. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа, если мощность источников в единице объема $q(x, y, t)$.

6.21. Решить предыдущую задачу, если источники газа распределены на прямой 1) с плотностью $q(t)$; 2) с постоянной плотностью q_0 .

6.22. Решить задачу 6.20, если источники распределены с плотностью $q(t)$ на прямой, движущейся в направлении ей перпендикулярном по закону $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t$, $0 < v_0 \ll a$.

6.23. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей идеального газа, в котором с момента $t=0$ действуют источники того же газа; мощность источников в единице объема $q(x, y, z, t)$, равновесные давление и плотность газа P_0 и ρ_0 соответственно.

6.24. Решить предыдущую задачу в случае $q = q_0 e^{-\alpha(x^2+y^2+z^2)}$, где $\alpha \geq 0$.

6.25. Решить задачу 6.23 для источников, равномерно распределенных на сфере, радиус которой r_0 , мгновенно выделивших количество Q газа.

6.26. Решить задачу 6.23, если источники распределены на сфере, радиус которой r_0 , и выделяют в единицу времени с единицы площади количество газа 1) $q(t)$; 2) q_0 .

6.27. Решить задачу 6.23, если в газе действует точечный источник мощности $Q(t)$.

6.28. Решить задачу 6.23, если в газе действует точечный источник мощности $Q(t)$, движущийся по закону $\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t \eta(t)$, где $|\mathbf{v}_0| \ll a$.

6.29. Решить задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - c^2 u + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

6.30. К точке $x=0$ неограниченной струны $(-\infty < x < \infty)$ с момента времени $t=0$ приложена сила $F_0(t) \mathbf{e}_u$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях, если на нее действуют упругие силы, пропорциональные отклонению точек струны от положения равновесия (коэффициент пропорциональности k , отнесенный к единице длины струны, задан).

Пример 6.4. Задача Коши с ненулевыми начальными условиями сводится к задаче, рассмотренной в примере 6.3. Пусть по однородной струне (см. пример 6.2) распространяется прямая волна $f(t - x/a_1)$. Функция $u(x, t)$ является решением задачи

$$u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} a^2(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) \equiv u_0(x) = f\left(-\frac{x}{a_1}\right), \quad u_t(x, 0) \equiv u_1(x) = f'\left(-\frac{x}{a_1}\right),$$

где, согласно условию, $f\left(-\frac{x}{a_1}\right) = 0$ при $x > 0$. Переход к обобщенным производным по t (см. (10.15)) приводит к задаче

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta'(t) + u_1(x) \cdot \delta(t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = u_t(x) = 0.$$

По формуле (6.9)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} [u_0(\xi) \cdot \delta'(\tau) + u_1(\xi) \cdot \delta(\tau)] G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \\ &= \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^0 \left[f\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) \delta'(\tau) + f'\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) \delta(\tau) \right] G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^0 \left[f\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) G_t(x, \xi, t) + f'\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) G(x, \xi, t) \right] d\xi. \end{aligned}$$

После интегрирования по частям второго слагаемого решение принимает вид:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^0 f\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) [G_t(x, \xi, t) + a_1 G_\xi(x, \xi, t)] d\xi.$$

При $x < 0$ из выражения (6.8) для функции Грина следует, что

$$G_t = \frac{a_2 - a_1}{2a_1(a_1 + a_2)} \delta\left(t + \frac{x + \xi}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_1} \delta\left(t - \frac{|x - \xi|}{a_1}\right),$$

$$G_\xi = \frac{a_2 - a_1}{2a_1^2(a_1 + a_2)} \delta\left(t + \frac{x + \xi}{a_1}\right) + \frac{1}{2a_1^2} \delta\left(t - \frac{|x - \xi|}{a_1}\right) \operatorname{sign}(x - \xi).$$

Так как $1 + \operatorname{sign} x = 2\eta(x)$, то

$$u(x, t) = \frac{a_2 - a_1}{a_1(a_1 + a_2)} \int_{-\infty}^0 f\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) \delta\left(t + \frac{x + \xi}{a_1}\right) d\xi + \\ + \frac{1}{a_1} \int_{-\infty}^x f\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) \delta\left(t + \frac{\xi - x}{a_1}\right) d\xi.$$

замена $t + \frac{x+\xi}{a_1} = y$ в первом интеграле, $t + \frac{\xi-x}{a_1} = y$ — во втором дает

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{a_2 - a_1}{a_1 + a_2} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right) \eta\left(t + \frac{x}{a_1}\right).$$

При $x > 0$

$$u(x, t) = \frac{2a_2}{a_1(a_1 + a_2)} \int_{-\infty}^0 f\left(-\frac{\xi}{a_1}\right) \delta\left(t + \frac{\xi}{a_1} - \frac{x}{a_2}\right) d\xi = \\ = \frac{2a_2}{a_1 + a_2} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right) \eta\left(t - \frac{x}{a_2}\right).$$

6.31. Вдоль неоднородного стержня, характеристики которого ρ_1 , E_1 , S_0 при $x < 0$, ρ_2 , E_2 , S_0 при $x > 0$, распространяется продольная волна $f(t + x/a_2)$. Решить задачу о колебаниях стержня. При каком условии отсутствует отраженная волна?

6.32. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - k^2 u, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

6.33. Решить задачу Коши

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x, y).$$

6.34. В момент времени $t=0$ скорость газа равна нулю, а его плотность $\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \left(1 + \frac{s_0}{1+x^2+y^2}\right)$. Найти в акустическом приближении плотность газа на оси Oz , если равновесные давления и плотность P_0 и ρ_0 соответственно.

6.35. Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t, \\ u|_{t=0} &= u_0(x, y, z), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x, y, z). \end{aligned}$$

6.36. Начальная скорость идеального газа равна нулю, а его плотность $\rho(\mathbf{r}, 0) = \rho_0[1 + s_0\eta(r_0 - r)]$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Определить в акустическом приближении плотность газа $\rho(\mathbf{r}, t)$, если равновесные давление и плотность P_0 и ρ_0 соответственно.

6.37. Решить задачу о поперечных колебаниях неограниченного стержня $(-\infty < x < \infty)$, начальная скорость которого равна нулю, а начальное отклонение $u(x, 0) = u_0 \exp(-\frac{\alpha x^2}{4a})$, где $\alpha > 0$.

Пример 6.5. Функция Грина волнового уравнения для полуграниченной струны с упруго закрепленным концом является решением задачи

$$\begin{aligned} G_{tt} &= a^2 G_{xx} + \delta(x - \xi) \cdot \delta(t), \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ (G_x - h G)|_{x=0} &= 0, \\ G|_{t=0} &= G_t|_{t=0} = 0, \end{aligned}$$

т.е. неоднородность в уравнении имеет вид δ -функции, а все остальные условия (граничное и начальные) — нулевые. Изображение $\tilde{G} = \mathcal{L}[G]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{xx} - \frac{p^2}{a^2} \tilde{G} - \frac{1}{a^2} \delta(x - \xi), \quad 0 < x, \\ (\tilde{G}_x - h \tilde{G})|_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Ограниченное решение

$$\tilde{G} = \begin{cases} A e^{\frac{px}{a}} + B e^{-\frac{px}{a}}, & 0 < x < \xi, \\ C e^{-\frac{px}{a}}, & \xi < x \end{cases}$$

содержит константы, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} A(p - ha) - B(p + ha) = 0 \\ A\alpha^2 + B - C = 0 \\ A\alpha^2 - B + C = \frac{\alpha}{pa}, \end{cases}$$

где $\alpha = \exp(p\xi/a)$, вытекающей из условия при $x=0$ и условий при $x=\xi$ (см.(10.15)): $[\tilde{G}]|_{x=\xi} = 0$, $[\tilde{G}_x]|_{x=\xi} = -\frac{1}{a^2}$. В итоге для изображения получается выражение

$$\tilde{G} = \frac{1}{2pa} e^{-\frac{p}{a}|\xi-x|} + \frac{p-ha}{p+ha} \cdot \frac{1}{2pa} e^{-\frac{p}{a}(\xi+x)},$$

которому соответствует оригинал

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a} \eta \left(t - \frac{|\xi - x|}{a} \right) + \frac{1}{a} \left(e^{-ha(t - \frac{\xi+x}{a})} - \frac{1}{2} \right) \eta \left(t - \frac{x + \xi}{a} \right). \quad (6.12)$$

6.38. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения продольных колебаний полубесконечного упругого стержня ($0 < x$) конец которого 1) жестко закреплен; 2) свободен.

6.39. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения продольных колебаний полубесконечного упругого стержня ($0 < x$), на торец которого действует сила сопротивления, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности α задан).

6.40. Решить задачу о продольных колебаниях упругого полугораниченного стержня ($0 < x$) с сосредоточенной массой m на торце, возбужденных продольным ударным импульсом I в торец стержня.

6.41. Конец линии ($0 < x$) с параметрами L , C ($R=G=0$) заземлен через конденсатор C_0 . Построить функцию Грина соответствующей смешанной задачи для уравнения, описывающего потенциал.

6.42. Вдоль линии ($0 < x$) с параметрами L, C ($R=G=0$), конец которой заземлен через конденсатор C_0 , распространяется волна $u(x, t) = f(x + at)$. Определить зависимость заряда конденсатора от времени, если $f(x) = u_0 \sin \frac{\omega}{a} x \cdot \eta(x)$.

6.43. По полуограниченному упругому стержню ($0 < x$) распространяется продольная волна $u(x, t) = f(x + at)$. Найти отраженную волну, если торец стержня 1) жестко закреплен; 2) свободен.

6.44. Вдоль полуограниченного упругого стержня ($0 < x$), на торец которого действует сила сопротивления, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности α задан), распространяется продольная волна $u(x, t) = f(x + at)$. Найти отраженную волну.

6.45. В точке $x = x_0 > 0$ полуограниченной струны ($0 < x$) с закрепленным концом действует с момента времени $t = 0$ поперечная сила $F_0 \sin \omega t \mathbf{e}_u$. Решить задачу о колебаниях струны.

6.46. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения, описывающего потенциал полуограниченной линии ($0 < x$) без искажения ($RC = LG$) с заземленным концом.

6.47. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения, описывающего ток в полуограниченной линии ($0 < x$) без утечки с заземленным концом.

6.48. Решить задачу о движении полубесконечной струны ($0 < x$), конец которой движется по закону $\mu(t)$.

6.49. К концу полуограниченного стержня ($0 < x$) прикреплена пружинка с коэффициентом жесткости k . С момента $t = 0$ свободный конец пружинки движется вдоль оси $0x$ по закону $\mu(t)$. Решить задачу о движении стержня.

6.50. Конец полуограниченной линии ($0 < x$) без утечки подключен к батарее с ЭДС $E_0 \eta(t)$. Найти ток в линии при нулевых начальных условиях.

6.2. Решение задач для уравнения теплопроводности

Пример 6.6. функция Грина задачи Коши для уравнения теплопроводности определяется следующим образом:

$$G_t = a^2 G_{xx} + \delta(x) \cdot \delta(t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad 0 < t, \\ G(x, 0) = 0.$$

Преобразование Фурье

$$\tilde{G}(\lambda, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} G(x, t) e^{-i(\lambda, x)} dx$$

приводит к задаче Коши

$$\tilde{G}_t + a^2 \lambda^2 \tilde{G} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \delta(t), \quad 0 < t, \\ \tilde{G}(\lambda, 0) = 0,$$

ограниченное решение которой

$$\tilde{G}(\lambda, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Прообраз восстанавливается с помощью формулы обращения:

$$G(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i(\lambda, x) - a^2 \lambda^2 t} d\lambda.$$

Интеграл равен произведению однотипных интегралов, каждый из которых вычисляется по формуле (6.60):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda_k x_k - a^2 \lambda_k^2 t} d\lambda_k = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x_k^2}{4a^2 t}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Следовательно,

$$G(x, t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \quad (6.13)$$

Как следует из определения, функция Грина представляет собой температуру пространства, обусловленную выделением количества тепла $Q=C\rho$ в точке $x=0$ в момент времени $t=0$, если при $t<0$ температура пространства была равна нулю. Таким образом, в результате выделения тепла температура пространства при $t=0$ становится равной $\delta(x)$, т.е.

$$G_t = a^2 \Delta G, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \\ G(x, 0) = \delta(x).$$

6.51. Через поверхность тонкого неограниченного стержня происходит теплообмен с внешней средой по закону Ньютона. Построить функцию Грина соответствующей задачи Коши.

6.52. Найти потенциал бесконечной линии $(-\infty < x < \infty)$ с параметрами R, C ($L=G=0$), в точку $x=\xi$ которой в момент времени $t=\tau$ помещен заряд Q .

6.53. Решить предыдущую задачу для линии с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины.

6.54. В сечении $x=0$ тонкой трубки $(-\infty < x < \infty)$ в момент времени $t=0$ выделилось количество q на единицу площади неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации). Определить концентрацию газа в процессе диффузии, если начальная концентрация равна нулю.

6.55. В однородной изотропной среде с коэффициентом диффузии D находится точечный источник, который в момент $t=0$ выделяет количество Q неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации). Определить концентрацию газа в процессе диффузии, если его начальная концентрация равна нулю.

6.56. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения диффузии в среде, движущейся со скоростью v_0 вдоль оси Ox , если концентрация диффундирующего вещества зависит только от x и t .

6.57. В сечении $x=\xi$ бесконечного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с характеристиками ρ_1, C_1, S_0 при $x < 0$, ρ_2, C_2, S_0 при $x > 0$ в момент времени $t=0$ выделилось (равномерно по сечению) Q единиц тепла. Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю; поверхность стержня теплоизолирована.

6.58. В момент времени $t=0$ в точку $x=\xi \neq 0$ неограниченной линии $(-\infty < x < \infty)$ помещен заряд Q . Определить потенциал линии, если ее параметры $L=G=0$,

$$R = \begin{cases} R_1, & x < 0, \\ R_2, & 0 < x, \end{cases} \quad C = \begin{cases} C_1, & x < 0, \\ C_2, & 0 < x, \end{cases}$$

Начальный потенциал равен нулю.

6.59. В сечении $x=0$ бесконечного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью имеется сосредоточенная теплоемкость C_0 . В момент $t=0$ в сечении $x=\xi$ выделилось (равномерно по сечению) ρ_1, E_1, S_0 при $x < 0$, Q единиц тепла. Определить температуру $u(x, t)$ стержня при $t > 0$, если $u(x, 0)=0$.

6.60. В сечении $x=\xi \leq 0$ неограниченной трубки $(\infty < x < \infty)$ в момент времени $t=0$ выделилось (равномерно по сечению) количество Q газа. Решить задачу диффузии, если сечение $x=0$ представляет собой полупроницаемую перегородку; при $t < 0$ газа в трубке не было.

6.61. В момент времени $t=0$ на цилиндрической поверхности, радиус которой r' , равномерно по поверхности выделилось Q единиц тепла на единицу длины вдоль оси. Найти температуру пространства, если начальная температура равна нулю.

6.62. Определить температуру пространства, обусловленную выделением в момент времени $t=0$ количества тепла Q , равномерно распределенного по окружности, радиус которой r' ; до момента $t=0$ температура пространства была равна нулю.

6.63. Определить температуру пространства, обусловленную выделением в момент времени $t=0$ количества тепла Q , равномерно распределенного по кругу, радиус которого r' ; до момента $t=0$ температура пространства была равна нулю.

6.64. В однородной бесконечной среде с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) имеется изотропный плоский источник (плоскость $x=0$), с единицы площади которого мгновенно (в момент времени $t=0$) выделилось Q_0 моноэнергетических (тепловых) нейтронов. Найти в диффузионном приближении плотность $n(x, t)$ нейтронов, если их скорость v (по абсолютной величине) не меняется в процессе диффузии; начальная концентрация нейтронов равна нулю.

6.65. Решить предыдущую задачу для линейного изотропного источника, расположенного на оси $0z$, с единицы длины которого мгновенно выделилось Q_0 моноэнергетических нейтронов.

6.66. Решить задачу 6.64 для точечного изотропного источника, мгновенно испустившего Q_0 моноэнергетических нейтронов.

6.67. В бесконечной однородной среде с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) действует плоский изотропный источник (плоскость $x=0$), испускающий в единицу времени с единицы площади Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u=0$. Найти в диффузионно-возрастном приближении плотность замедления нейтронов.

6.68. Решить предыдущую задачу для линейного изотропного источника, расположенного на оси $0z$, с единицы длины которого в единицу времени испускается Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u=0$.

6.69. Решить задачу 6.67 для точечного изотропного источника, испускающего в единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u=0$. Найти также средний квадрат расстояния $\overline{r^2}$ между точками, в которых летаргия нейтрона $u=0$ и $u>0$.

6.70. Построить функцию Грина задачи Коши для уравнения Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta G(x,t), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad 0 < t, \\ G(x, 0) = \delta(x).$$

Пример 6.7. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0$$

можно построить, исходя из физического смысла функции Грина. Если источники $f(x, t)$ представить в виде суперпозиции

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi, \tau) \delta(x - \xi) \cdot \delta(t - \tau) d\xi$$

мгновенных точечных источников, то каждый источник обуславливает температуру (см. пример 6.6) $f(\xi, \tau) G(x - \xi, t - \tau)$, а все источники — температуру

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbf{R}^n} f(\xi, \tau) G(x - \xi, t - \tau) d\xi. \quad (6.14)$$

Пределы интегрирования по t определяются условиями: $f(x, t)$ и $G(x, t)$ равны нулю при $t < 0$.

Пусть в точке $x=0$ прямой ($-\infty < x < \infty$) с момента $t=0$ действует источник постоянной мощности Q , а начальная температура прямой равна нулю. При $t > 0$ согласно формулам (6.14) и (6.13) температура

$$u(x, t) = \frac{Q}{C\rho} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) G(x - \xi, t - \tau) d\xi = \frac{Qa}{2k\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4a^2\tau}} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}.$$

После замены $x = 2a\sqrt{\tau}y$ и интегрирования по частям получается следующий результат:

$$u(x, t) = \frac{Q}{2k} \left[2a\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - |x| \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

6.71. В сечении $x=\xi$ стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью с момента $t=0$ до $t=t_0 > 0$ действует источник тепла мощности Q . Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю.

6.72. Определить температуру прямой $(-\infty < x < \infty)$, на части $(-l, l)$ которой в момент времени $t=0$ выделилось Q равномерно распределенных единиц тепла. Начальная температура прямой равна нулю.

6.73. На участке $(-l, l)$ прямой $(-\infty < x < \infty)$ с момента $t=0$ действуют источники, линейная плотность которых постоянна и равна q_0 . Определить температуру прямой, если ее начальная температура равна нулю.

6.74. Найти температуру $u(x, t)$ прямой $(-\infty < x < \infty)$, на которой с момента времени $t=0$ действуют источники тепла плотности $q_0 \exp(-\alpha x^2)$, где $\alpha > 0$, если $u(x, 0) = 0$.

6.75. В пространстве с момента $t=0$ до $t=t_0 > 0$ действует точечный источник тепла постоянной мощности Q . Найти температуру $u(\mathbf{r}, t)$ пространства при $t > 0$, если $u(\mathbf{r}, 0) = 0$.

6.76. В сечении $x=\xi$ трубки $(-\infty < x < \infty)$ с момента $t=0$ действует источник неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации) постоянной мощности Q . Найти концентрацию газа в процессе диффузии, если начальная концентрация равна нулю.

6.77. В сечении $x=0$ неограниченного стержня $(-\infty < x < \infty)$ действует в течение времени от $t=0$ до $t=t_0 > 0$ источник тепла, мощность которого $Q_0 e^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$. Решить задачу теплопроводности, если начальная температура стержня равна нулю, а через его поверхность происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

6.78. В сечении $x=0$ неограниченного стержня $(-\infty < x < \infty)$ действует в течение времени от $t=0$ до $t=t_0 > 0$ источник тепла, мощность которого $Q_0 t/t_0$. Решить задачу теплопроводности, если

начальная температура стержня равна нулю, а через его поверхность происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры.

6.79. В однородной бесконечной среде с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) действует изотропный точечный источник, испускающий в единицу времени с единицы площади плоскости $x = 0$ количество Q_0 моноэнергетических (тепловых) нейтронов. Найти в диффузионном приближении плотность $n(x, t)$ нейтронов, если их скорость v (по абсолютной величине) не меняется в процессе диффузии; начальная концентрация нейтронов равна нулю.

6.80. Точечный источник тепла мощности Q_0 движется вдоль прямой ($-\infty < x < \infty$) по закону $x = v_0 t$. Найти температуру $u(x, t)$ прямой, если $u(x, 0) = 0$.

6.81. Определить температуру газа, в котором в результате разряда выделилось количество тепла Q , равномерно распределенного по цилиндру, радиус которого r_0 высота $2l$; начальная температура газа равна нулю.

6.82. В однородной бесконечной среде с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) действует изотропный плоский источник (плоскость $x=0$), испускающий с единицы площади в единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u=0$. Найти в диффузионно-возрастном приближении плотность потока тепловых нейтронов.

6.83. Решить предыдущую задачу для точечного изотропного источника, испускающего в единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u=0$.

Пример 6.8. Задача Коши с ненулевым начальным условием

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = u_0(x)$$

сводится к эквивалентной задаче

$$u_t = a^2 \Delta u + u_0(x) \cdot \delta(t), \quad x \in R_n, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = 0,$$

решение которой (см.(6.14))

$$u(x, t) = \int_{R^n} u_0(\xi) G(x - \xi, t) d\xi.$$

Пусть температура стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью в момент $t=0$ равна $u_0 \frac{x}{l} \eta(l - |x|)$. При $t > 0$

$$u(x, t) = \frac{u_0}{l} \int_{-l}^l \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} \xi d\xi.$$

В результате замены $\xi - x = 2a\sqrt{t}y$

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2l} \left[x \left(\operatorname{erf} \frac{l+x}{2a\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + 2a\sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(l+x)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2t}} \right) \right].$$

6.84. Начальная температура стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью равна 1) $\frac{u_0}{1+x^2/l^2}$; 2) $\frac{u_0 l}{x} \sin \frac{x}{l}$. Какова температура сечения $x=0$ при $t > 0$?

6.85. Начальная температура стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью равна $\frac{u_0 \operatorname{sign} x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$. Найти плотность теплового потока через сечение $x=0$.

6.86. Определить температуру $u(x, t)$ прямой $(-\infty < x < \infty)$, если $u(x, 0) = u_0 \eta(l - |x|)$. Построить график зависимости температуры от времени в точках $x_1 \in (0, l)$, $x_2 > l$.

6.87. Найти температуру прямой $(-\infty < x < \infty)$, если начальная температура равна $u_0(1 - \frac{|x|}{l})\eta(1 - \frac{|x|}{l})$, $l > 0$.

6.88. Определить температуру $u(x, t)$ прямой $(-\infty < x < \infty)$ при $t > 0$, если $u(x, 0) = u_0 \exp(-\alpha|x|)$, $\alpha > 0$. Получить асимптотическое представление зависимости температуры от времени в фиксированной точке при $t \rightarrow \infty$.

6.89. Неограниченный стержень $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью нагрет до температуры $u_0 \exp(-\alpha x^2)$, где $\alpha > 0$. Как будет изменяться температура стержня со временем?

6.90. Найти температуру стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью, если его начальная температура равна $Ax \exp(-\alpha x^2)$, $\alpha > 0$. Получить асимптотическое представление зависимости температуры в сечении x от времени при $t \rightarrow \infty$.

6.91. Определить температуру $u(x, t)$ прямой $(-\infty < x < 0)$, если начальная температура $u(x, 0) = u_0 \sin \beta x$.

6.92. Определить температуру $u(x, t)$ прямой $(-\infty < x < 0)$, если начальная температура $u(x, 0) = u_0 \cos \beta x \exp(-\alpha x^2)$, $\alpha > 0$.

6.93. Найти температуру бесконечного стержня $(-\infty < x < \infty)$, через поверхность которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, если начальная температура равна u_1 при $x < 0$, u_2 при $x > 0$.

6.94. Через поверхность тонкого стержня $(-\infty < x < \infty)$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой постоянна и равна u_0 . Найти температуру $u(x, t)$ стержня при $t > 0$, если $u(x, 0) = u_1 \operatorname{sign} x$.

6.95. Через поверхность тонкого стержня $(-\infty < x < \infty)$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $u_0 \eta(x)$. Решить задачу теплопроводности для стержня, если его начальная температура равна нулю.

6.96. Через поверхность тонкого стержня $(-\infty < x < \infty)$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $u_0 e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$. Решить задачу теплопроводности для стержня, если его начальная температура равна нулю.

6.97. Решить задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0 \sin \alpha x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = 0, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

6.98. Найти температуру стержня $(-\infty < x < \infty)$, характеристики которого ρ_1, C_1, S_0 при $x < 0$, ρ_2, C_2, S_0 при $x > 0$, если начальная температура $u_0 \eta(x)$; поверхность стержня теплоизолирована.

6.99. Определить концентрацию вещества, диффундирующего в среде, которая движется со скоростью v_0 вдоль оси Ox , если начальная концентрация $u_0(1 - \eta(x))$.

6.100. Тонкая трубка $(-\infty < x < \infty)$, в которой диффундирует газ, движется вдоль оси Ox со скоростью v_0 . Найти концентрацию газа $u(x, t)$ в трубке при $t > 0$, если начальная концентрация $u(x, 0) = u_0 \exp(-\alpha x^2)$, $\alpha > 0$.

6.101. Начальная температура стержня $(-\infty < x < \infty)$ с характеристиками ρ_1, k_1, C_1, S_0 при $x < 0$, ρ_2, k_2, C_2, S_0 при $x > 0$ равна $u_0 \exp(-\alpha|x|)$, $\alpha > 0$. Найти температуру в сечении $x=0$. Получить асимптотическое представление зависимости температуры от времени при $t \rightarrow \infty$ в этом сечении.

6.102. В сечении $x=0$ бесконечного стержня $(-\infty < x < \infty)$ с теплоизолированной поверхностью имеется тонкая прокладка, теплоемкость которой C_0 . Определить температуру $u(0, t)$ прокладки, если при $t=0$ 1) ее температура равна нулю, а температура стержня — u_0 ; 2) температура прокладки равна u_0 , а стержня — $u_0 \eta(x)$. Получить асимптотические разложения (до 2-го члена) функции $u(0, t)$ при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$.

6.103. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t, \\ u|_{t=0} = u_0(x, y, z),$$

если $u_0(x, y, z)$ равна:

$$1) Axye^{-\alpha(x^2+y^2)}, \quad \alpha > 0; \quad 2) u_0 e^{-\alpha(x^2+y^2)}, \quad \alpha > 0; \quad 3) u_0 \sin \beta xy.$$

6.104. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = u_0 e^{-(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i)^2}.$$

6.105. Начальная температура пространства $u_0 \eta(r_0 - r)$ где r — расстояние до оси Oz . Найти температуру в точках оси Oz .

6.106. Начальная температура пространства $u_0 e^{-\alpha r}$, где $\alpha > 0$, а r — расстояние до оси Oz . Найти температуру на оси и получить асимптотическое представление функции $u(0, t)$ при $t \rightarrow \infty$.

6.107. Определить температуру пространства при $t > 0$, если при $t=0$ она равна 1) $u_0 r^2 e^{-\alpha r^2}$; 2) $u_0 \cos \alpha r^2$; 3) $\frac{u_0}{r} (1 - \exp(-\alpha r^2))$, где $\alpha > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.108. Решить задачу 3.17 методом функции Грина.

6.109. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = u_0 e^{-\alpha x^2}, \quad \alpha > 0.$$

6.110. Найти температуру слоя $(-l < x < l, -\infty < y, z < \infty)$, поверхность которого имеет нулевую температуру, а начальная температура 1) $u_0 \operatorname{sign} x \cos \beta y e^{-\alpha z^2}$, $\alpha > 0$; 2) $u_0 \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \beta y z$.

6.111. Поверхность бесконечного бруса с прямоугольным поперечным сечением ($|x| < l_1$, $|y| < l_2$) поддерживается при нулевой температуре. Решить задачу теплопроводности для бруса, если его начальная температура $u_0 \operatorname{sign} z$.

6.112. Поверхность неограниченного цилиндра ($r < r_0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$) поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна $u_0(1 - r^2/r_0^2) \eta(l - |z|)$. Решить задачу теплопроводности.

Пример 6.9. В некоторых случаях функцию Грина смешанных задач удастся получить методом изображений. Иллюстрацией может служить построение функции Грина задачи для неоднородного уравнения в двугранном угле ($0 < x$, $0 < y$, $z \in R$), на грань $y=0$ которого подается тепловой поток с заданной плотностью, а другая грань имеет определенную температуру, при этом температура, плотность потока и плотность источников не зависят от z . Согласно физическому смыслу функции Грина (см. пример 6.6), она представляет собой температуру внутри угла, обусловленную действием линейного (параллельного оси Oz) источника, с каждой единицы длины которого мгновенно выделилось количество тепла $Q=C\rho$, при этом граничные и начальные условия нулевые. Смешанную задачу можно свести к задаче Коши, функция Грина которой уже найдена (см.(6.13)), поместив вне угла дополнительные источники таким образом, чтобы грань $x=0$ имела нулевую температуру, а поток через грань $y=0$ был равен нулю. Для этого наряду с данным источником в точке P следует поместить источники мощности $-Q$ в точках P_1 , P_2 и мощности Q в точке P_3 (Рис.6.1). Суммарное действие всех источников определяет функцию Грина смешанной задачи

$$\tilde{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) + G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, t) - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, t) - G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3, t),$$

где $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)$ имеет вид (6.13) при $n=2$.

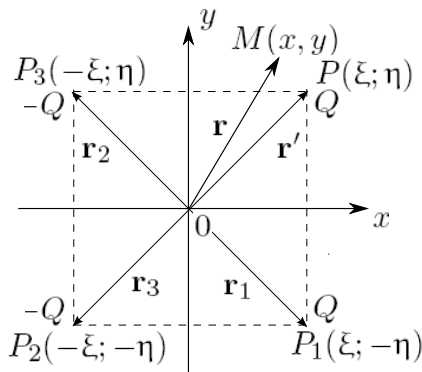


Рис. 6.1

6.113. Торец полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью 1) поддерживается при заданной температуре; 2) облучается заданным тепловым потоком. Построить функцию Грина соответствующей смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

6.114. Конец полуограниченной линии ($x > 0$) с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины заземлен. В момент $t = 0$ в точку $x = \xi > 0$ помещают заряд Q . Найти потенциал.

6.115. В момент времени $t = 0$ на сфере, радиус которой r' , выделилось $Q = Cr$ единиц тепла, равномерно распределенного по сфере. Найти температуру пространства, если начальная температура равна нулю.

6.116. Шар, радиус которого r_0 , находится в однородной изотропной среде с характеристиками k , ρ , C , температура которой 0° . В момент $t = 0$ на сфере, радиус которой $r' > r_0$, выделилось количество тепла Q , равномерно распределенное по сфере. Определить температуру вне шара, если его поверхность поддерживается при нулевой температуре.

6.117. Построить функцию Грина смешанной задачи для неоднородного уравнения в двугранном угле ($0 < x$, $0 < y$, $-\infty < z < \infty$), грани которого поддерживаются при заданной температуре; температура граней, начальная температура и плотность источников не зависят от z .

6.118. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности в октанте ($0 < x$, $0 < y$, $0 < z$), грани которого имеют заданную температуру.

6.119. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке ($0 < x < l$) с граничными условиями 1-го типа 1) методом Фурье; 2) методом изображений.

6.120. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке ($0 < x < l$) с граничными условиями второго типа при $x=0$ и первого типа при $x=l$ 1) методом Фурье; 2) методом изображений.

6.121. В однородном замедлителе с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$), занимающем полупространство, действует точечный изотропный источник, испускающий в единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u=0$; координаты источника $x=y=0$, $z=a$, где $a>0$ — расстояние до экстраполированной границы $z=0$. Определить плотность замедления нейтронов.

6.122. В бесконечном однородном замедлителе с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) действует изотропный сферический источник (сфера, радиус которой r'), с единицы площади которого в единицу времени испускается Q_0/S' быстрых нейтронов с летаргией $u=0$, где S' — площадь сферы. Определить поле замедления нейтронов.

Пример 6.10. Через торец полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью происходит теплообмен по закону Ньютона с внешней средой. Построить функцию Грина соответствующей смешанной задачи для уравнения теплопроводности.

Функция Грина удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} G_t &= a^2 G_{xx} + \delta(x - \xi) \cdot \delta(t), \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ (G_x - h G)|_{x=0} &= 0, \\ G|_{t=0} &= 0. \end{aligned}$$

Преобразование Лапласа приводит к задаче для $F = \mathcal{L}[G]$

$$\begin{aligned} F_{xx} - \frac{p}{a^2} F &= -\frac{1}{a^2} \delta(x - \xi), \quad 0 < x, \\ (F_x - h F)|_{x=0} &= 0, \end{aligned}$$

ограниченное решение которой

$$F(x, \xi, p) = \begin{cases} A e^{\frac{\sqrt{p}}{a} x} + B e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}, & 0 \leq x < \xi, \\ C e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x}, & \xi \leq x. \end{cases}$$

Коэффициенты A , B , C определяются из условий при $x=0$ и $x=\xi$ (см. пример 6.5):

$$\begin{cases} A(\sqrt{p} - ha) - B(\sqrt{p} - ha) = 0 \\ C - A\alpha^2 - B = 0 \\ C + A\alpha^2 - B = \frac{\alpha}{a\sqrt{p}}, \end{cases}$$

где $\alpha = \exp(\sqrt{p} \xi/a)$. В результате

$$\begin{aligned} F(x, \xi, p) &= \frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} |\xi-x|} + \frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} (\xi+x)} - \\ &\quad - \frac{h}{\sqrt{p}(\sqrt{p} + ah)} e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} (\xi+x)}. \end{aligned}$$

Переход к оригиналу совершается с помощью соответствий (3.26), (3.45):

$$\begin{aligned} G(x, \xi, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) - \\ &\quad - h e^{h(x+\xi) + h^2 a^2 t} \mathcal{Erf} \left(\frac{x + \xi}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t} \right). \quad (6.15) \end{aligned}$$

6.123. В сечении $x=\xi$ полуограниченной трубки ($0 < x$) в момент времени $t=0$ выделилось количество Q неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации). Определить концентрацию газа в процессе диффузии, если конец трубки закрыт полупроницаемой перегородкой; начальная концентрация газа равна нулю, концентрация газа вне трубки постоянна и равна нулю.

6.124. Построить функцию Грина смешанной задачи для уравнения теплопроводности, описывающего распространение тепла в полуограниченном стержне с сосредоточенной теплоемкостью C_0 на конце при условии теплоизолированности этой системы.

6.125. Конец линии ($0 < x$) с параметрами R, C ($L=G=0$) заземлен через конденсатор C_0 , начальный заряд которого q_0 . Определить зависимость заряда конденсатора от времени.

6.126. Конец линии ($0 < x$) с параметрами R, C ($L=G=0$) заземлен через конденсатор C_0 . В момент времени $t=0$ в точку $x=x_0 > 0$ помещают заряд q_0 . Найти заряд конденсатора $q(t)$. Получить асимптотическое представление функции $q(t)$ при $t \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ и построить ее график.

6.127. Конец полуограниченной линии ($0 < x$) с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины заземлен через сосредоточенное сопротивление R_0 . В момент времени $t=0$ в точку $x=x_0 > 0$ линии помещают заряд q_0 . Определить ток через сопротивление.

6.128. Шар, радиус которого r_0 , помещен в однородную изотропную среду с характеристиками k, ρ, C , температура которой 0° . В момент $t=0$ на сфере радиус, радиус которой $r' > r_0$, равномерно по сфере выделилось количество тепла Q . Определить температуру вне шара, если 1) его поверхность теплоизолирована; 2) шар поддерживается при нулевой температуре, а через его поверхность происходит теплообмен по закону Ньютона.

Пример 6.11. Определить температуру стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью, на конце которого происходит теплообмен по закону Ньютона со средой нулевой температуры, а начальная температура $u_0(x)$. Рассмотреть частный случай $u_0(x) = u_0$.

Для решения задачи

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x) \end{aligned}$$

с ненулевым начальным условием ее можно преобразовать посредством обобщенного дифференцирования по t (см.(10.15)) к эквивалентной задаче

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + u_0(x) \cdot \delta(t), \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Теперь решение выражается интегралом, аналогичным (6.14),

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty u_0(\xi) \delta(\tau) G(x, \xi, t - \tau) d\xi = \int_0^\infty u_0(\xi) G(x, \xi, t) d\xi,$$

в котором функция $G(x, \xi, t)$ имеет вид (6.15).

В частном случае

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0 \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} d\xi + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - h \int_0^\infty e^{h(x+\xi) + a^2 h^2 t} \operatorname{erf} \left(\frac{x + \xi}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t} \right) d\xi \right]. \end{aligned}$$

После замены $\xi - x = 2a\sqrt{t}y$ в первом интеграле, $\xi + x = 2a\sqrt{t}y$ — во втором и интегрирования по частям в третьем решение принимает вид:

$$u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} + e^{hx + a^2 h^2 t} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t} \right) \right].$$

6.129. Начальная концентрация газа в полуограниченной трубке ($0 < x$) равна 1) $u_0 \eta(l - x)$; 2) $u_0 \eta(x - l)$; 3) $u_0 \operatorname{sign}(l - x)$. Решить задачу диффузии, если концентрация газа на конце трубки в любой момент времени равна нулю.

6.130. Торец полубесконечного стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью поддерживается при нулевой температуре. Определить температуру стержня при $t > 0$, если при $t = 0$ она равна 1) $u_0 \exp(-\alpha x)$; 2) $u_0 \exp(-\alpha x^2)$, где $\alpha > 0$.

6.131. Найти концентрацию частиц, диффундирующих в полубесконечной трубке ($0 < x$), конец которой закрыт, а начальная концентрация 1) $u_0 \eta(l - x)$; 2) $u_0 \exp(-\alpha x)$, $\alpha > 0$.

6.132. В трубке ($0 < x$) с закрытым концом диффундирует газ, начальная концентрация которого $u_0 \eta(x - l)$. Определить концентрацию газа при $t > 0$. Построить график зависимости концентрации от времени при $x = x_1 \in (0, l)$ и $x = x_2 > l$.

6.133. Полубесконечный стержень ($0 < x$) с теплоизолированной поверхностью (включая торец) имеет в момент времени $t = 0$ температуру $u_0 \operatorname{sign}(x - l)$. Определить его температуру при $t > 0$. Построить графики зависимости температуры от времени в сечениях $x = x_1 \in (0, l)$ и $x = x_2 > l$.

6.134. Граница $z = 0$ полупространства ($z > 0$) теплоизолирована, кроме круга, радиус которого r_0 ; через круг поступает тепловой поток постоянной плотности $q_0 \mathbf{e}_z$. Определить температуру полупространства в момент времени $t > 0$, если при $t = 0$ она равна нулю.

6.135. На границе $z = 0$ полупространства ($z > 0$), температура которого равна нулю, находится тонкое однородное кольцо, радиус которого r_0 . С момента $t = 0$ в кольце течет постоянный ток и в полупространство поступает тепловая мощность Q . Решить задачу теплопроводности при условии, что граница $z = 0$ теплоизолирована. Определить также температуру на оси кольца.

6.136. Решить задачу Коши

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y, z < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, y, z, 0) = u_0(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где $u_0(r)$ равна 1) $u_0 \eta(r_0 - r)$; 2) $A r e^{-\alpha r^2}$, $\alpha > 0$.

6.137. Найти температуру пространства, обусловленную мгновенным выделением Q единиц тепла, равномерно распределенного в шаре, радиус которого r_0 , если начальная температура равна нулю.

6.138. В бесконечном однородном замедлителе с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) действует точечный изотропный источник, испускающий в единицу времени Q_0 быстрых нейтронов с летаргией $u=0$. Определить в диффузионно-возрастном приближении плотность потока тепловых нейтронов.

6.139. В однородную изотропную среду помещен шар, радиус которого r_0 . Определить температуру вне шара, если шар поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура внешней среды равна u_0 .

6.140. Шар, радиус которого r_0 , помещен в однородную изотропную среду с характеристиками k , ρ , C . Начальная температура внешней среды равна $u_0 \frac{r}{r_0} e^{\alpha(r-r_0)}$, где $\alpha \geq 0$, шар поддерживается при нулевой температуре. Решить задачу теплопроводности. Получить также асимптотическое представление решения $u(r, t)$ при $t \rightarrow \infty$ (r — фиксировано) и при $r \rightarrow \infty$ (t — фиксировано).

6.141. Неустойчивый газ, распад которого пропорционален концентрации, диффундирует из шара, радиус которого r_0 , во внешнее пространство столь долго, что концентрация газа не зависит от времени, а на поверхности шара она равна u_0 . С момента $t=0$ концентрация газа на сфере $r=r_0$ становится равной нулю. Решить диффузионную задачу вне шара, считая концентрацию $u(r, t)$ непрерывной функцией при $r \geq r_0$ (граничное условие первого рода).

6.142. В среде с характеристиками k , ρ , C находится шар, радиус которого r_0 ; вне шара действуют тепловые источники, мощность которых в единице объема $\frac{Q}{r}e^{-\alpha r}$, $\alpha \geq 0$. Определить температуру среды при нулевом начальном условии, если шар поддерживается при нулевой температуре.

6.143. Через боковую поверхность полуограниченного стержня ($0 < x$) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой u_1 . Найти температуру стержня, если его торец поддерживается при 0° , а начальная температура u_0 .

6.144. В сечении $x=x_0>0$ стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью действует источник тепла постоянной мощности Q_0 . Определить температуру $u(x, t)$ стержня при $t>0$, если $u(x, 0)=0$, а торец 1) поддерживается при нулевой температуре; 2) теплоизолирован.

6.145. Найти температуру полупрямой ($0 < x$), на которой находятся тепловые источники плотности $q_0 \exp(-\alpha x)$, $\alpha > 0$; конец полупрямой поддерживается при 0° , начальная температура равна нулю.

6.146. Грани двугранного угла ($0 < x$, $0 < y$, $-\infty < z < \infty$) поддерживаются при нулевой температуре; найти температуру внутри угла при $t>0$, если при $t=0$ она равна u_0 .

6.147. Определить температуру октанта ($0 < x$, $0 < y$, $0 < z$), грань $x=0$ которого теплоизолирована, остальные грани имеют нулевую температуру, а начальная температура u_0 .

6.148. В тонкой полуограниченной трубке ($0 < x$) диффундирует газ, источник которого расположен в сечении $x=x_0>0$ и имеет постоянную мощность Q ; конец трубки закрыт полупроницаемой перегородкой, начальная концентрация газа равна нулю. Определить поток $q(t)$ газа, выходящего из трубки, и получить асимптотическое разложение (до второго члена включительно) функции $q(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

6.149. Шар, радиус которого r_0 , помещен в среду с характеристиками k , ρ , C и поддерживается при нулевой температуре. Найти температуру среды, если ее начальная температура равна u_0 , а через поверхность шара происходит теплообмен по закону Ньютона.

6.150. На конце полуограниченного стержня ($0 < x$) имеется тонкая пластинка, теплоемкость которой C_0 . При условии теплоизоляции этой системы найти 1) температуру стержня, если его начальная температура u_0 , а пластинки — 0° ; 2) температуру $u(0, t)$ пластинки, если ее начальная температура равна нулю, а стержня — $u_0 \exp(-\frac{\alpha x}{a})$, где $\alpha = \frac{kS}{aC_0}$; получить асимптотическое представление функции $u(0, t)$ при $t \rightarrow \infty$ и построить ее график.

6.151. Поверхность полубесконечного цилиндра, радиус которого r_0 , поддерживается при нулевой температуре, а его начальная температура $u_0 e^{-\alpha z}$, $\alpha \geq 0$. Решить задачу теплопроводности.

Пример 6.12. Решение смешанной задачи с неоднородными граничными условиями можно получить, преобразуя ее в эквивалентную задачу с однородными граничными условиями. Иллюстрацией служит следующая задача.

Через торец полуограниченного стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью поступает тепловой поток плотности $q(t)$. Найти температуру стержня $u(x, t)$ при $t > 0$, если начальная температура равна нулю. Математическая формулировка этих условий определяет задачу для функции $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ -ku_x(0, t) &= q(t), \quad u(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Чтобы построить решение с помощью функции Грина, следует воспользоваться эквивалентной постановкой (см. задачу 10.76):

$$\begin{aligned} u_t &= a^2 u_{xx} + \frac{a^2}{k} q(t) \cdot \delta(x), \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ u_x(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Теперь применима формула, аналогичная (6.14), согласно которой

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{a^2}{k} \int_0^t d\tau \int_0^\infty q(\tau) \delta(\xi) G_2(x, \xi, t - \tau) d\xi = \\ &= \frac{a^2}{k} \int_0^t q(\tau) G_2(x, 0, t - \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $G_2(x, \xi, t)$ имеет вид (6.67). В результате

$$u(x, t) = \frac{a}{r\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t - \tau)}} d\tau. \quad (6.16)$$

6.152. Найти температуру полуограниченного стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью, торец которого имеет температуру $\mu(t)$, а начальная температура равна нулю.

6.153. Найти температуру полупрямой ($0 < x$), конец которой поддерживается при постоянной температуре u_0 , а начальная температура равна нулю.

6.154. Определить магнитное поле в однородном полупространстве ($0 < z$) с магнитной проницаемостью μ и большой проводимостью (токами смещения можно пренебречь), обусловленное включением в момент времени $t=0$ в полупространстве ($z < 0$), магнитного поля, параллельного плоскости $z=0$ и равного H_0 при любых $t > 0$ и $z < 0$.

6.155. Начальное давление газа в цилиндрическом угольном пласте ($0 < x$) с непроницаемой боковой поверхностью равно P_0 , давление вне пласта при любом $t > 0$ равно P_1 . Обычно $P_0 \gg P_1$ и в коэффициенте при производной в уравнении (1.104) полагают $P = P_0$. Решить линеаризованную задачу фильтрации.

6.156. Конец полуограниченного стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью поддерживается с момента $t=0$

до $t_0 > 0$ при температуре u_0 , а затем при нулевой температуре. Определить температуру стержня, если его начальная температура равна нулю.

6.157. Определить температуру полупрямой ($0 < x$), если ее конец имеет температуру At , а начальная температура равна нулю.

6.158. Полуограниченный стержень ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью находится при нулевой температуре. Температура торца с момента времени $t=0$ до $t=t_0 > 0$ меняется по закону $u_0 e^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$, а затем становится равной нулю. Решить задачу теплопроводности.

6.159. Найти концентрацию частиц, диффундирующих в тонкой полуограниченной трубке ($0 < x$), если их начальная концентрация равна нулю, а на конце задан поток плотность которого 1) $q_0 e_x$; 2) $q_0 \eta(t_0 - t) e_x$.

6.160. Через торец полуограниченного стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой $\mu(t)$. Найти температуру $u(x, t)$ стержня при $t > 0$, если $u(x, 0) = 0$. Рассмотреть случай $\mu(t) = At$.

6.161. Найти потенциал полуограниченной линии ($0 < x$) с пренебрежимо малой индуктивностью на единицу длины, к концу которой в момент времени $t=0$ подключается батарея с постоянной э.д.с. E_0 .

6.162. К концу линии ($0 < x$) с параметрами R, C ($L=G=0$) в момент времени $t=0$ подключается через сопротивление R_0 батарея с э.д.с. E_0 . Определить потенциал линии.

6.163. Шар, радиус которого r_0 , помещен в среду, температура которой равна нулю. Определить температуру среды, если шар поддерживается при температуре u_0 .

6.164. Шар, радиус которого r_0 , находится в среде с характеристиками k , ρ , C . С момента $t=0$ температура шара меняется по закону At . Определить температуру вне шара при $t>0$, если при $t=0$ она равна нулю.

6.165. Полуограниченный стержень ($0<x$) с теплоизолированной боковой поверхностью изготовлен из горючего материала. В момент времени $t=0$ торец стержня поджигают. Фронт горения имеет температуру u_0 и перемещается со скоростью v_0 . Найти температуру стержня, если его начальная температура равна нулю.

6.166. Начальное давление газа в цилиндрическом угольном пласте ($0<x$) с непроницаемой боковой поверхностью равно P_0 , давление вне пласта при любом $t>0$ равно P_1 . В ходе выработки пласта его граница $x=0$ перемещается с постоянной скоростью V_0 . Найти приближенное решение задачи фильтрации, полагая в коэффициенте при производной в уравнении (1.104) $P=P_0$ (см. задачу 6.155).

6.167. Через конец тонкой полуограниченной трубки ($0<x$), закрытый полупроницаемой перегородкой, из внешней среды диффундирует газ. Найти концентрацию газа в трубке, если его начальная концентрация равна нулю, а концентрация во внешней среде равна u_0 .

6.168. Через поверхность шара, радиус которого r_0 , во внешнюю среду поступает радиальный тепловой поток постоянной плотности q_0 . Найти температуру среды, если ее начальная температура равна нулю

6.169. Из шара, радиус которого r_0 , во внешнюю среду диффундирует неустойчивый газ; распад газа пропорционален концентрации (коэффициент пропорциональности α задан), плотность потока газа через поверхность шара постоянна и равна $q_0 e_r$. Определить концентрацию газа вне шара при $t>0$, если начальная концентрация равна нулю.

6.170. Через поверхность шара, радиус которого r_0 , во внешнюю среду диффундирует неустойчивый газ (распад пропорционален концентрации, коэффициент пропорциональности α задан). Определить концентрацию газа вне шара, если начальная концентрация равна нулю, концентрация внутри шара постоянна и равна u_0 , а поверхность шара представляет собой полупроницаемую перегородку.

6.171. Найти температуру октанта ($0 < x, 0 < y, 0 < z$), начальная температура которого равна нулю, а грани поддерживаются при температуре u_0 .

6.172. Угольный пласт ($0 < x, 0 < y, |z| < H$) с непроницаемыми горизонтальными основаниями $z = \pm H$ заполнен газом. Начальное давление в пласте P_0 , давление вне пласта при любом $t > 0$ равно P_1 . Найти приближенное решение задачи фильтрации, полагая в коэффициенте при производной в уравнении (1.104) $P = P_0$ (см. задачу 6.155).

6.173. Угольный пласт ($0 < x, 0 < y, |z| < H$) с непроницаемыми горизонтальными основаниями $z = \pm H$ заполнен газом. Начальное давление в пласте P_0 , давление вне пласта при любом $t > 0$ равно P_1 . В ходе выработки пласта его граница $x = 0$ перемещается с постоянной скоростью V_0 параллельно оси Oy . Найти приближенное решение задачи фильтрации, полагая в коэффициенте при производной в уравнении (1.104) $P = P_0$ (см. задачу 6.155).

6.174. Решить задачу

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad 0 < z, \quad 0 < t, \\ u(x, y, 0, t) = u_0 \sin(\alpha x + \beta y), \quad u(x, y, z, 0) = 0, \quad |u| < \infty.$$

6.175. Решить задачу

$$u_t = a^2 \Delta u, \quad 0 < x, \quad 0 < y, \quad 0 < z, \quad 0 < t, \\ u(0, y, z, t) = u_0 \sin \alpha y, \quad u(x, 0, z, t) = 0, \quad u_z(x, y, 0, t) = 0, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \quad |u| < \infty.$$

6.176. Стержень ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью имеет нулевую температуру. С момента времени $t=0$ стержень нагревается тепловым потоком плотности $q(t)$, поступающим через торец. Известно, что температура торца изменяется по закону $\mu(t)$. Показать, что $q(t)$ является решением интегрального уравнения Абеля

$$\mu(t) = \frac{a}{k\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{q(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

и решить это уравнение.

6.177. При какой начальной температуре стержня ($0 < x$) с теплоизолированной поверхностью (включая торец) температура торца будет изменяться по закону $u_0 \exp(-\alpha^2 t)$?

6.178. Торец полуограниченного стержня ($0 < x$) с теплоизолированной боковой поверхностью поддерживается при нулевой температуре. При каком начальном распределении температуры стержня плотность потока, поступающего в стержень через торец, равна $q_0 \exp(-\alpha^2 t)$?

6.3. Функция Грина задачи Дирихле

Пример 6.13. Пусть Ω — ограниченная область, $S = \partial\Omega$. Задача Дирихле ставится следующим образом: найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= F(M), \quad M \in \Omega, \\ u(M)|_S &= f, \end{aligned}$$

где F — ограниченная интегрируемая в Ω функция, $f \in C(S)$. Функция Грина является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Delta G(M, P) &= -\delta(M, P), \quad M \in \Omega, \quad P \in \Omega, \\ G(M, P)|_{M \in S} &= 0, \quad G \in C^2(\Omega/\{P\}) \cap C(\overline{\Omega}/\{P\}). \end{aligned} \quad (6.17)$$

Один из методов построения функции Грина — метод электростатических изображений — основан на ее физической интерпретации: в трехмерном пространстве функция $G(M, P)$ представляет собой потенциал электростатического поля в точке M внутри проводящей заземленной поверхности S , обусловленный точечным зарядом $Q=1/(4\pi)$, помещенным в точку $P \in \Omega$. Функцию Грина в двумерной области Ω с границей S можно трактовать, как потенциал внутри цилиндрической поверхности, параллельной оси Oz , с направляющей S в плоскости xOy , обусловленный линейным зарядом, распределенным с плотностью $q=1/(4\pi)$ на прямой, параллельной оси Oz , след которой на плоскости xOy — точка $P \in \Omega$. Метод электростатических изображений заключается в построении системы вспомогательных зарядов, расположенных вне области Ω , поле которых внутри Ω было бы таким же, как поле зарядов, индуцированных на поверхности S (см. пример 6.9). Для построения функцию Грина задачи Дирихле в круге, радиус которого r_0 , нужно найти потенциал линейного заряда $q=1/(4\pi)$, расположенного параллельно оси заземленной поверхности $r=r_0$ на расстоянии $d < r_0$ от оси. В этом случае поле внутри поверхности оказывается эквивалентным полю двух линейных зарядов — данного q и вспомогательного $-q_1$, расположенного на том же луче, что и заряд q (вследствие аксиальной симметрии поля) на расстоянии d_1 от оси цилиндра (рис.6.2). Это предположение будет оправдано, если удастся найти неизвестные величины q_1 , d_1 (и C), которые определяются из условия равенства нулю потенциала на S

$$2q \ln \frac{1}{r_{M_0P}} - 2q_1 \ln \frac{1}{r_{M_0P_1}} + \ln C = 0, \quad M_0 \in S,$$

или

$$r_0^2 + d^2 - 2r_0d \cos \theta = C^{\frac{1}{q}} (r_0^2 + d_1^2 - 2r_0d_1 \cos \theta)^{\frac{q_1}{q}}. \quad (6.18)$$

После дифференцирования по θ тождество (6.18) принимает вид

$$d = C^{\frac{1}{q}} d_1 \frac{q_1}{q} (d_1^2 + r_0^2 - 2d_1r_0 \cos \theta)^{\frac{q_1}{q} - 1}.$$

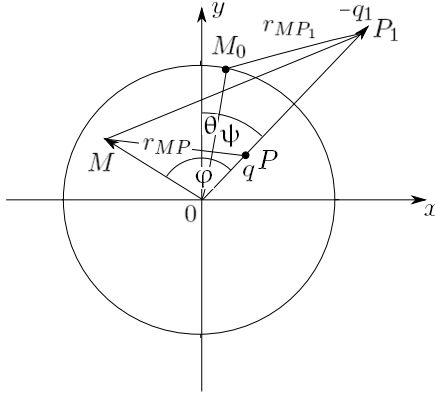


Рис. 6.2

Правая часть полученного соотношения не зависит от θ , если $q_1 = q$, $C = (\frac{d}{d_1})^q$. Теперь из тождества (6.18) вытекает, что $(r_0^2 + d^2)d_1 = (r_0^2 + d_1^2)d$, т.е. $dd_1 = r_0^2$. Итак,

$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{r_0}{d r_{MP_1}} \right), \quad (6.19)$$

где $M = (r, \varphi)$, $P = (d, \psi)$, $P_1 = (\frac{r_0^2}{d}, \psi)$.

В задачах 6.179 – 6.193 построить функцию Грина задачи Дирихле для области Ω .

6.179. Ω — полуплоскость $y > 0$.

6.180. $\Omega = \{x, y : 0 < x, 0 < y\}$.

6.181. $\Omega = \{r, \varphi : 0 < r, 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$.

6.182. Ω — полукруг, радиус которого r_0 .

6.183. $\Omega = \{r, \varphi : r < r_0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$.

6.184. Ω — полуплоскость $0 < y$, из которой удален полукруг $\{x, y : x^2 + y^2 \leq r_0^2, 0 < y\}$.

6.185. Ω — полупространство $\{x, y, z : -\infty < x, y < \infty, 0 < z\}$.

6.186. $\Omega = \{x, y, z : 0 < x, 0 < y, -\infty < z < \infty\}$.

6.187. $\Omega = \{r, \varphi, z : 0 < r, 0 < \varphi < \frac{\pi}{n}\}$, $n \in \mathbf{N}$.

6.188. $\Omega = \{x, y, z : 0 < x, 0 < y, 0 < z\}$.

6.189. Ω — шар, радиус которого r_0 в $\mathbf{R}^3$.

6.190. Ω — полушар, радиус которого r_0 в $\mathbf{R}^3$.

6.191. Ω — внешность шара радиусом r_0 в $\mathbf{R}^3$.

6.192. Ω — полупространство $\{x, y, z : -\infty < x, y < \infty, 0 < z\}$, из которого удален полушар $\{x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2, 0 < z\}$.

6.193. Ω — слой, ограниченный плоскостями $z = 0$, $z = l$.

6.194. На расстоянии d от центра шара, радиус которого r_0 , находится точечный источник тепла постоянной мощности Q . Найти стационарную температуру вне шара, если шар поддерживается при нулевой температуре.

6.195. На расстоянии d от оси бесконечного проводящего цилиндра, радиус которого r_0 , параллельно оси расположена неограниченная нить с линейной плотностью заряда q . Методом изображений найти потенциал электростатического поля вне цилиндра.

6.196. Параллельно проводящей заземленной плоскости на расстоянии d от нее расположена прямая, на которой находятся диполи с постоянной плотностью момента $\mathbf{p}$. Методом изображений найти потенциал электростатического поля, если вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярен плоскости и направлен от нее.

6.197. Точечный диполь с моментом $\mathbf{P}$ расположен на расстоянии d от заземленной проводящей плоскости. Методом изображений найти потенциал электростатического поля, если вектор $\mathbf{P}$ параллелен плоскости.

6.198. Вне проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0 , параллельно оси на расстоянии d от нее расположена прямая, на которой находятся диполи с плотностью момента $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_d$. Методом изображений найти электростатический потенциал.

6.199. На расстоянии d от центра проводящей заземленной сферы, радиус которой $r_0 > d$, расположен точечный диполь, момент которого $\mathbf{P} = P \mathbf{e}_d$. Методом изображений определить потенциал электростатического поля.

6.200. На расстоянии d от центра проводящей заземленной сферы, радиус которой $r_0 < d$, расположен точечный заряд Q . Найти заряд, индуцированный на сфере.

6.201. Отрезок, длина которого $2l$, линейная плотность заряда q , расположен вне проводящей заземленной сферы, радиус которой r_0 ; точка O — центр сферы, точка O_1 — середина отрезка. Прямая, проходящая через точки O и O_1 , перпендикулярна отрезку, $\overline{OO_1} = d$. Определить заряд, индуцированный на сфере.

6.202. Вне проводящей заземленной сферы, радиус которой r_0 , на расстоянии d от ее центра O расположена заряженная прямая. Перпендикуляр, опущенный из точки O на прямую, пересекает ее в точке O_1 , $\overline{OO_1} = d$. Определить заряд, индуцированный на сфере, если линейная плотность заряда прямой 1) $\frac{Q}{\sqrt{d^2 + x^2}}$; 2) $\frac{Qd}{\sqrt{D^2 + x^2}}$, где x — координата точки прямой относительно начала O_1 .

6.203. Тонкое проводящее кольцо, радиус которого r_1 , с заряд Q , расположено вне проводящей заземленной сферы, радиус которой r_0 ; расстояние центра O_1 кольца от центра O сферы равно d , плоскость кольца перпендикулярна вектору $\overline{O_1O}$. Найти заряд, индуцированный на сфере.

6.204. Равномерно заряженный диск, радиус которого r_0 , заряд Q , расположен вне заземленной проводящей сферы, радиус которой r_0 . Расстояние центра O_1 диска до центра O сферы равно d , диск перпендикулярен вектору $\overline{O_1O}$. Найти заряд сферы.

Пример 6.14. В некоторых случаях метод изображений применим для построения функции Грина краевых задач для уравнения $\operatorname{div}(k\nabla u)=0$, где k — кусочно-постоянная функция. Подобная ситуация возникает при отыскании векторного потенциала $\mathbf{A}$ прямого тока J , расположенного параллельно плоской границе раздела двух магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 на расстоянии d от границы (рис.6.3). Функция $A(x, y)$ является решением задачи (см. задачу ??)

$$\begin{aligned}\Delta A &= -\frac{4\pi\mu_1}{c}J\delta(x)\cdot\delta(y-d), \quad 0 < y, & \Delta A &= 0, \quad y < 0, \\ A|_{y=-0} &= A|_{y=+0}, \quad \frac{1}{\mu_2}\frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=-0} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\partial A}{\partial y}\Big|_{y=+0}, \\ A &= O\left(\ln\frac{1}{r}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

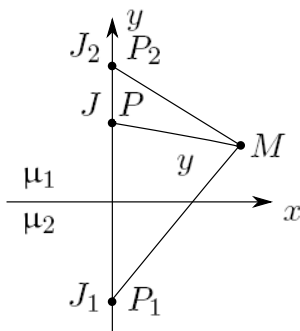


Рис. 6.3

Метод изображений заключается в переходе к однородной среде, в которой наряду с током J размещаются вспомогательные токи. Так, при $y < 0$ магнитное поле такое же, как поле тока J_2 , расположенного в точке $P_2(0, h_2)$, при этом пространство заполнено однородным магнетиком с магнитной проницаемостью μ_2 . При $y > 0$ поле эквивалентно полю тока J и вспомогательного тока J_1 в точке $P_1(0, -h_1)$, находящихся в среде с магнитной

проницаемостью μ_1 . Из симметрии поля следует, что токи J_1 и J_2 должны пересекать ось Oy . Таким образом, векторный потенциал

$$A = \begin{cases} \frac{2J\mu_1}{c} \ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{2J_1\mu_1}{c} \ln \frac{1}{r_{MP_1}} + C, & y > 0, \\ \frac{2J_2\mu_2}{c} \ln \frac{1}{r_{MP_2}}, & y < 0. \end{cases}$$

Граничные условия приводят к тождествам

$$\begin{cases} \frac{J\mu_1}{c} \ln(x^2 + h^2) + \frac{J_1\mu_1}{c} \ln(x^2 + h_1^2) - C = \frac{J_2\mu_2}{c} \ln(x^2 + h_2^2) \\ \frac{Jh}{x^2 + h^2} - \frac{J_1h_1}{x^2 + h_1^2} \frac{J_2h_2^2}{x^2 + h_2^2}, \end{cases}$$

из которых следует, что

$$C = 0, \quad h_1 = h_2 = h, \quad J_1 = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} J, \quad J_2 = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} J.$$

6.205. Диэлектрическая проницаемость пространства

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 < z, \\ \varepsilon_2, & z > 0; \end{cases}$$

построить функцию Грина для уравнения, описывающего потенциал зарядов, плотность которых $\rho(x, y, z)$.

6.206. Диэлектрическая проницаемость пространства

$$\varepsilon(x, y, z) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 < y, \\ \varepsilon_2, & y > 0; \end{cases}$$

построить функцию Грина для уравнения, описывающего потенциал зарядов, плотность которых не зависит от z .

6.207. Диэлектрическая проницаемость пространства

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \varepsilon_1, & 0 \leq r < r_0 \\ \varepsilon_2, & r_0 < r, \end{cases}$$

где r — расстояние до оси Oz . Построить функцию Грина для уравнения, описывающего потенциал зарядов, плотность которых не зависит от z .

6.208. На плоской поверхности ($y=0$) диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε , заполняющего полупространство ($y<0$), находится (на оси Ox) бесконечная нить, заряд единицы длины которой q . Определить потенциал электростатического поля в пространстве.

6.209. На плоской поверхности ($z=0$) однородного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε , заполняющего полупространство ($z<0$), в точке $x=y=0$ находится электрический диполь, момент которого $\mathbf{p}=p\mathbf{e}_z$. Определить потенциал электростатического поля.

6.210. На плоской поверхности ($z=0$) раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 (при $z>0$) и μ_2 (при $z<0$) находится точечный виток с током, магнитный момент которого $\mathbf{M}=M\mathbf{e}_z$, координаты $x=y=0$. Найти векторный потенциал магнитного поля в пространстве.

6.211. Над плоской границей диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε , заполняющего полупространство $z>0$, на расстоянии d от границы расположен точечный заряд Q . Определить силу, действующую на заряд.

6.212. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε заполняет полупространство. Вне диэлектрика параллельно границе на расстоянии d от нее расположена бесконечная нить с линейной плотностью заряда q . Определить силу, действующую на единицу длины нити.

6.213. В диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε , заполняющем все пространство, имеется цилиндрическая полость, радиус которой r_0 , диэлектрическая проницаемость $\varepsilon=1$). Внутри полости параллельно оси на расстоянии d от нее расположена нить с линейной плотностью заряда q . Найти силу, действующую на единицу длины нити.

6.214. Параллельно оси диэлектрического цилиндра (радиус r_0 , диэлектрическая проницаемость ϵ) на расстоянии $d > r_0$ от нее расположена бесконечная нить с линейной плотностью заряда q . Найти силу, действующую на единицу длины нити.

6.215. В среде с магнитной проницаемостью μ имеется цилиндрическая полость (радиус полости r_0 , $\mu=1$), внутри которой параллельно оси на расстоянии d от нее расположен прямой ток J . Найти силу, действующую на единицу длины тока.

6.216. Определить силу, действующую на единицу длины прямого тока J , параллельного бесконечному цилиндру из магнетика с магнитной проницаемостью μ и расположенного от оси цилиндра на расстоянии $d > r_0$, где r_0 — радиус цилиндра.

Пример 6.15. Плотность заряда на проводнике определяется формулой

$$\sigma = - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S, \quad (6.20)$$

где u — потенциал электростатического поля, n — нормаль к поверхности S проводника. Если заземленный проводник находится в поле точечного заряда, то определение потенциала сводится к построению функции Грина, отличающейся от него лишь множителем.

Плотность заряда, индуцированного на поверхности полого проводящего заземленного цилиндра равномерно заряженной нитью (заряд единицы длины q), расположенной на расстоянии $d < r_0$ от оси, где r_0 — радиус цилиндра, определяется формулой (6.20), в которой (см.(6.19))

$$u(r, \varphi) = 2q \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{r_0}{dr_{MP_1}} \right).$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}} - \\ - \frac{q}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{r_0^2}{d}\right)^2 - \frac{2r_0^2 r}{d} \cos \varphi}} - \frac{q}{2\pi r_0} \cdot \frac{r_0^2 - d^2}{r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \varphi}.$$

6.217. На расстоянии d от проводящей заземленной плоскости расположен точечный заряд Q . Определить плотность заряда и полный заряд Q' плоскости.

6.218. На расстоянии d от проводящей заземленной плоскости расположена нить с зарядом q на единицу длины. Найти плотность заряда и полный заряд q' полосы единичной ширины, расположенной на плоскости перпендикулярно нити.

6.219. Внутри двугранного угла ($0 < x, 0 < y, -\infty < z < \infty$), образованного заземленными проводящими полуплоскостями, в точке $(x_0, y_0, 0)$ находится точечный заряд Q . Найти плотность заряда и полный заряд каждой полуплоскости.

6.220. Параллельно оси заземленного проводящего цилиндра радиусом r_0 на расстоянии $d > r_0$ от оси расположена бесконечная нить с зарядом q на единицу длины. Найти плотность заряда, заряд q' и дипольный момент $\mathbf{p}$ единицы длины цилиндра.

6.221. На расстоянии d от центра заземленной проводящей сферы, радиус которой r_0 расположен точечный заряд Q . Определить плотность заряда, заряд Q' и дипольный момент $\mathbf{P}'$ сферы, если 1) $r_0 > d$; 2) $r_0 < d$.

6.222. Параллельно оси полого заземленного цилиндрического проводника, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0, 0 < \varphi < \pi$), расположена нить с линейной плотностью заряда q . Найти плотность заряда на проводнике, если координаты нити $r = d < r_0, \varphi = \pi/2$.

6.223. Заземленный проводник имеет форму плоскости $x=0$ с цилиндрическим выступом, параллельным оси $0z$, поперечным сечением которого является полукруг ($x^2 + y^2 < r_0, z > 0$). Определить плотность заряда, индуцированного на проводнике бесконечной нитью, параллельной оси $0z$; линейная плотность заряда нити q , ее координаты $x=d > r_0, y=0$.

Пример 6.16. Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с однородным граничным условием

$$\begin{cases} \Delta u = F(M), & M \in \Omega, \\ u|_S = 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

методом функции Грина основано на физической интерпретации этой функции и исходит из представления $F(M)$ в форме суперпозиции точечных источников

$$F(M) = \int_{\Omega} F(P) \delta(M, P) d\mathbf{r}_P.$$

В соответствии с (2.119) функция $-F(P)G(M, P)$ характеризует влияние одного из источников, а функция

$$u(M) = - \int_{\Omega} F(P)G(M, P) d\mathbf{r}_P, \quad (6.22)$$

учитывающая их суммарное влияние, представляет собой решение задачи (6.21).

Иллюстрацией может служить определение плотности заряда, индуцированного на полом проводящем заземленном цилиндре радиусом r_0 бесконечной нитью с плотностью дипольного момента $\mathbf{p} = p \frac{\mathbf{d}}{d}$, расположенной параллельно оси цилиндра на расстоянии $d < r_0$ от оси.

Потенциал электростатического поля является решением задачи

$$\begin{aligned} \Delta u &= 4\pi p \frac{\delta'(r-d)}{r} \cdot \delta(\varphi), \\ u|_{r=r_0} &= 0. \end{aligned}$$

По формуле (6.22)

$$u(r, \varphi) = - \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{4\pi p}{r'} \delta'(r' - d) \delta(\psi) G(r, r', \varphi - \psi) r' dr' d\psi =$$

$$= 4\pi p \left. \frac{\partial G(r, r', \varphi)}{\partial r'} \right|_{r'=d},$$

где функция $G(r, r', \varphi)$ имеет вид (6.19). Плотность заряда на поверхности проводника вычисляется по формуле (6.20):

$$\sigma(\varphi) = p \left. \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial r'} \right|_{r'=d, r=r_0} = -\frac{p}{\pi} \cdot \frac{(r_0^2 + d^2) \cos \varphi - 2r_0 d}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \varphi)^2}.$$

Полный заряд единицы длины цилиндра

$$q' = \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi) r_0 d\varphi = 0,$$

дипольный момент единицы длины цилиндра

$$\mathbf{p}' = \frac{\mathbf{d}}{d} \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi) r_0 \cos \varphi r_0 d\varphi = -\mathbf{p}.$$

6.224. Найти плотность заряда, индуцированного на проводящей заземленной плоскости $z=0$ полубесконечной нитью L с зарядом q на единицу длины, если

- 1) $L = \{x, y, z : x=y=0, 0 < l < z\};$
- 2) $L = \{x, y, z : 0 < x, y=0, z=l > 0\}.$

6.225. На расстоянии d от проводящей заземленной плоскости расположена бесконечная нить, плотность дипольного момента которой $\mathbf{p}$ ($\mathbf{p}$ — постоянный вектор, перпендикулярный к нити). Найти плотность заряда, индуцированного на плоскости, если вектор $\mathbf{p}$ 1) параллелен плоскости; 2) перпендикулярен к плоскости и направлен к ней.

6.226. Точечный диполь с моментом $\mathbf{P}$ расположен на расстоянии d от проводящей заземленной плоскости. Найти плотность заряда, на плоскости, если вектор $\mathbf{P}$ 1) параллелен плоскости; 2) перпендикулярен плоскости и направлен от нее.

6.227. Параллельно оси проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0 , расположена заряженная нить, координаты которой $r=d>r_0$, $\varphi=0$. Определить плотность заряда, заряд q' и дипольный момент p' единицы длины цилиндра, если плотность дипольного момента нити $\mathbf{p}=p\mathbf{e}_d$.

6.228. Параллельно оси полого проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0 , на расстоянии $d<r_0$ от оси расположена нить, дипольный момент единицы длины которой $\mathbf{p}$. Определить плотность заряда, заряд q' и дипольный момент $\mathbf{p}'$ единицы длины цилиндра, если постоянный вектор $\mathbf{p}$ перпендикулярен плоскости, содержащей нить и ось цилиндра.

6.229. На расстоянии d от центра проводящей заземленной сферы, радиус которой $r_0>d$, расположен точечный диполь, момент которого $\mathbf{P}=P\mathbf{e}_d$. Каковы плотность заряда на сфере, ее полный заряд Q' и дипольный момент $\mathbf{P}'$?

6.230. В точке M , отстоящей от центра O проводящей заземленной сферы, радиус которой r_0 , на расстоянии d , расположен диполь с моментом P , перпендикулярным вектору $\overline{OM}$. Найти плотность заряда на сфере, ее полный заряд Q' и дипольный момент $\mathbf{P}'$, если 1) $d<r_0$; 2) $d>r_0$.

6.231. Вне диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ , заполняющего полупространство $z<0$, на расстоянии d от границы расположен точечный диполь с моментом $\mathbf{P}$. Определить силу, действующую на диполь, если вектор $\mathbf{P}$ 1) параллелен; 2) перпендикулярен границе.

6.232. Диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε заполняет полупространство $z < 0$. Вне диэлектрика параллельно границе на расстоянии d от нее расположена нить, плотность дипольного момента которой постоянна и равна $\mathbf{p}$. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если вектор $\mathbf{p}$ лежит в плоскости, перпендикулярной нити.

6.233. В среде с диэлектрической проницаемостью ε имеется цилиндрическая полость (радиус r_0 , $\varepsilon=1$). Внутри полости параллельно оси на расстоянии d от нее расположена нить, плотность дипольного момента которой постоянна и равна $\mathbf{p}$. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если вектор $\mathbf{p}$ лежит в плоскости, перпендикулярной нити.

6.234. Параллельно оси бесконечного цилиндра (радиус r_0 , диэлектрическая проницаемость ε) на расстоянии $d > r_0$ от оси расположена нить, плотность дипольного момента которой постоянна и равна $\mathbf{p}$. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если вектор $\mathbf{p}$ лежит в плоскости, перпендикулярной нити.

Пример 6.17. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Если задачу Дирихле

$$\begin{aligned}\Delta u(M) &= 0, \quad M \in \Omega, \\ u|_S &= f,\end{aligned}$$

поставить в эквивалентной форме (см. задачу 10.108)

$$\begin{aligned}\Delta u &= -\frac{\partial(f\delta_S)}{\partial n}, \\ u|_S &= 0\end{aligned}$$

то решение получается с помощью формулы (6.22):

$$\begin{aligned}u(M) &= \int_{\Omega} \frac{\partial(f\delta_S)}{\partial n_P} G(M, P) d\mathbf{r}_P = \\ &= - \int_S f(P) \frac{\partial G(M, P)}{\partial n_P} ds_P.\end{aligned}\tag{6.23}$$

К задаче Дирихле сводится определение стационарной температуры в двугранном угле ($0 < x, 0 < y$), одна грань ($x=0$) которого поддерживается при 0° , а температура другой грани равна $u_0\eta(l-x)$. Построение решения осуществляется по следующей схеме. Постановка задачи:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y) &= 0, \quad 0 < x, \quad 0 < y, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(x, 0) = u_0\eta(l-x), \quad |u(x, y)| < \infty.\end{aligned}$$

Построение функции Грина (методом изображений):

$$G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} + \ln \frac{1}{r_{MP_1}} - \ln \frac{1}{r_{MP_2}} - \ln \frac{1}{r_{MP_3}} \right),$$

$M = (x, y), P = (\xi, \eta), P_1 = (-\xi, -\eta), P_2 = (\xi, -\eta), P_3 = (-\xi, \eta)$.

Применение формулы (6.23):

$$u(M) = - \int_S f(P) \frac{\partial G}{\partial n_P} ds_P,$$

где S — граница области, n_P — внешняя нормаль к S в точке P . Так как $f(P)=0$ на оси Oy , то

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_0^\infty f(\xi) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} d\xi = \\ &= \frac{u_0}{\pi} \int_0^l \left(\frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+\xi)^2 + y^2} \right) d\xi = \\ &= \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{(x^2 + y^2)^2 - l^2(x^2 - y^2)}{2l^2xy} = \\ &= \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{r^2 - l^2 \cos 2\varphi}{l^2 \sin 2\varphi},\end{aligned}$$

где $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

6.235. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости ($y > 0$), если $u(x, 0) = u_0\eta(l - |x|)$.

6.236. Найти стационарное распределение температуры внутри двугранного угла ($0 < x$, $0 < y$) с теплоизолированной гранью $y=0$, если температура грани $x=0$ равна $u_0 \eta(y-l)$.

6.237. Найти стационарную температуру внутри двугранного угла ($0 < r$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{n}$), где $n \in \mathbf{N}$, если грань $\varphi = \pi/n$ имеет нулевую температуру, а грань $\varphi=0$ — температуру $u_0 \eta(l-r)$.

6.238. Решить задачу Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, \quad 0 < y < x, \\ u(x, 0) &= u_0 \sin x, \quad u(x, x) = 0, \quad |u(x, y)| < \infty. \end{aligned}$$

6.239. Решить задачу 3.20 методом функции Грина.

6.240. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге, радиус которого r_0 , если на границе круга решение равно $f(\varphi)$. Рассмотреть случаи: 1) $f(\varphi) = u_0(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi)$; 2) $f(\varphi) = u_0 \sin^3 \varphi$.

6.241. Решить внутреннюю задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \varphi) &= 0, \quad 0 < r_0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ |u(r, \varphi)| &< \infty, \quad u(r_0, \varphi) = \frac{u_0}{17+8 \cos \varphi}. \end{aligned}$$

6.242. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга, радиус которого r_0 , если на границе круга решение равно $f(\varphi)$. Рассмотреть случаи:

$$1) f(\varphi) = u_0 \sin^3 \varphi \cos \varphi; \quad 2) f(\varphi) = u_0 \sin(n\varphi + \alpha).$$

6.243. Решить внешнюю задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} \Delta u(r, \varphi) &= 0, \quad r_0 < r, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ |u(r, \varphi)| &< \infty, \quad u(r_0, \varphi) = \frac{u_0 \sin \varphi}{25+7 \cos \varphi}. \end{aligned}$$

6.244. Определить стационарную температуру полупространства ($z > 0$), граница которого поддерживается при температуре $f(x, y)$. Рассмотреть случай $f(x, y) = u_0 \eta(x) \eta(y)$.

6.245. Определить стационарную температуру внутри двугранного угла ($0 < x, 0 < y$), грань $x=0$ которого поддерживается при нулевой температуре, а температура грани $y=0$ равна $u_0 \operatorname{sign} z$.

6.246. Решить задачу Дирихле:

$$\begin{aligned}\Delta u(x, y, z) &= 0, \quad -\infty < x, y < \infty \quad 0 < z, \\ u(x, y, 0) &= u_0 \sin xy, \quad |u(x, y, z)| < \infty.\end{aligned}$$

6.247. Внутрь двугранного угла ($-\infty < x < \infty, 0 < y, 0 < z$) через полосу ($|x| < l_1, y=0, 0 \leq l_2 < z$) на грани $y=0$ поступает тепловой поток постоянной плотности q_0 , а остальная часть этой грани теплоизолирована. Какой должна быть плотность потока через грань $x=0$, чтобы температура этой грани была постоянной?

6.248. Грани $x=0, y=0, z=0$ октанта ($0 < x, 0 < y, 0 < z$) поддерживаются при температуре u_1, u_2, u_3 соответственно. Найти стационарную температуру октанта.

6.249. Решить внутреннюю задачу Дирихле для шара, радиус которого r_0 , при условии, что на поверхности шара решение равно $f(\theta, \varphi)$. Рассмотреть случай $f(\theta, \varphi) = u_0 \sin^n \theta \cos n\varphi, n \in \mathbf{N}_0$.

6.250. Решить внешнюю задачу Дирихле для шара, радиус которого r_0 , при условии, что на поверхности шара решение равно $f(\theta, \varphi)$. Рассмотреть случай $f(\theta, \varphi) = u_0 \sin^n \theta \sin n\varphi, n \in \mathbf{N}$.

6.251. На расстоянии d от центра шара, радиус которого $r_0 < d$, находится точечный источник тепла мощности Q . Найти стационарное распределение температуры вне шара, если его поверхность поддерживается при температуре u_0 .

6.252. На расстоянии d от центра проводящего шара, радиус которого $r_0 < d$, находится точечный заряд Q . Определить плотность заряда на поверхности шара, если шар имеет заряд Q_0 .

Пример 6.18. Уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ описывает установившиеся волновые процессы и его решение удовлетворяет в $\mathbf{R}^3$ условиям излучения (1.80), которые служат для выделения расходящихся волн. Функция Грина для уравнения Гельмгольца в трехмерном пространстве определяется условиями:

$$\Delta u + k^2 u = -\delta(\mathbf{r}), \quad (6.24)$$

$$u = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r} + iku = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (6.25)$$

Подстановкой $u=v/r$ уравнение (6.24) преобразуется к виду

$$\frac{1}{r}\Delta v + 2(\nabla v \nabla \frac{1}{r}) + v\Delta \frac{1}{r} + k^2 \frac{v}{r} = -\delta(\mathbf{r}),$$

откуда (см. задачу 10.62.2.)

$$\Delta v - \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + k^2 v = 0, \quad (6.26)$$

$$v(0) = \frac{1}{4\pi}. \quad (6.27)$$

Если уравнение (6.26) решать методом Фурье, полагая

$$v(r, \theta, \varphi) = \sqrt{r}w(r)Y_n^m(\theta, \varphi),$$

то для функции $w(r)$ получится уравнение Бесселя полуцелого порядка $n + 1/2$. Следовательно, ряд, представляющий решение, будет содержать функции

$$H_{n+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(kr)Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Условие (6.27) выполняется только при $n=0$, а условиям излучения (6.25) удовлетворяет функция Ганкеля 2-го рода. В итоге

$$G(M, P) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_{MP}}} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(kr_{MP}) \frac{e^{-ikr_{MP}}}{4\pi r_{MP}}.$$

Условию излучения

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

соответствует функция Грина

$$G(M, P) = \frac{e^{ikr_{MP}}}{4\pi r_{MP}}.$$

6.253. Построить функцию Грина для уравнения Гельмгольца в двухмерном пространстве.

6.254. Построить функцию Грина для уравнения Гельмгольца в полуплоскости ($0 < y$), если на границе $y=0$ задано условие 1-го типа.

6.255. Построить функцию Грина для уравнения Гельмгольца в полупространстве ($0 < z$), если на границе $z=0$ задано условие 1) 1-го типа; 2) 2-го типа.

6.256. В однородной среде с коэффициентом диффузии D действует точечный источник неустойчивого газа (распад пропорционален концентрации) постоянной мощности Q . Найти стационарную концентрацию газа в процессе диффузии.

6.257. В однородной среде с коэффициентом диффузии D действуют источники неустойчивого газа, расположенные на некоторой прямой. Найти стационарную концентрацию газа в процессе диффузии, если мощность источников на единицу длины прямой постоянна и равна q .

6.258. На расстоянии d от непроницаемой плоскости расположен точечный источник неустойчивого газа постоянной мощности Q . Найти стационарную концентрацию газа в процессе диффузии.

6.259. Параллельно непроницаемой плоскости на расстоянии d от нее расположен линейный источник неустойчивого газа, мощность единицы длины которого постоянна и равна q . Определить стационарную концентрацию газа в процессе диффузии.

6.260. В неограниченной среде с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) действует изотропный плоский источник (плоскость $x=0$), испускающий в единицу времени с единицы площади Q_0 моноэнергетических (тепловых) нейтронов. Определить в диффузионном приближении стационарную плотность потока нейтронов, если их скорость (по абсолютной величине) не меняется.

6.261. Решить задачу 6.260 для линейного изотропного источника, расположенного на оси Oz , с единицы длины которого в единицу времени испускается q_0 моноэнергетических нейтронов.

6.262. Решить задачу 6.260 для изотропного точечного источника, мощность которого Q_0 , и найти средний квадрат расстояния $\overline{r^2}$ от точки рождения нейтрона до точки поглощения. Проверить применимость диффузионного приближения (см. пример 1.11).

6.263. В бесконечной среде с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) действует изотропный сферический источник, радиус которого r' , с единицы площади которого в единицу времени испускается $Q_0/(4\pi r'^2)$ моноэнергетических (тепловых) нейтронов. Определить в диффузионном приближении стационарную плотность потока нейтронов, если их скорость (по абсолютной величине) не меняется.

6.264. Однородная среда с поглощением ($\Sigma_c \ll \Sigma_s$) занимает полупространство ($z>0$) и граничит с вакуумом. В среде действует изотропный точечный источник, испускающий Q_0 моноэнергетических (тепловых) нейтронов в единицу времени; координаты источника $\mathbf{r}_0 = a\mathbf{e}_z$, где a — расстояние до экстраполированной границы $z=0$ среды. Определить в диффузионном приближении стационарную плотность потока нейтронов, если их скорость (по абсолютной величине) в процессе диффузии не меняется.

6.265. Решить предыдущую задачу для изотропного линейного источника, с единицы длины которого в единицу времени испускается Q_0 моноэнергетических нейтронов; источник расположен в плоскости yOz на расстоянии a от экстраполированной границы $y=0$ среды.

6.4. Функция Грина одномерной краевой задачи

Пример 6.19. Дан оператор

$$\mathcal{L} = - \left(\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} - q(x) \right), \quad (6.28)$$

где $p(x) > 0$, $p(x) \in C^1(\overline{\Delta})$, $q(x) \geq 0$, $q \in C(\overline{\Delta})$, $\Delta = (a, b)$ — ограниченный промежуток. Оператор определен на линейном множестве $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ функций класса $C^2(\Delta) \cap C^1(\overline{\Delta})$, удовлетворяющих однородным граничным условиям при $x=a$ и $x=b$, а Λ — множество собственных значений оператора. Если $\lambda=0 \notin \Lambda$, то функцией Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}u = f, \quad u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$$

называется решение $G(x, \xi)$ уравнения

$$\mathcal{L}G = \delta(x - \xi), \quad x \in \Delta, \quad \xi \in \Delta, \quad (6.29)$$

удовлетворяющее тем же граничным условиям, что и $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$.

Пусть оператор

$$\mathcal{L} = - \left(\frac{d}{dx} (x+3)^{\frac{3}{2}} \frac{d}{dx} - \frac{3}{(x+3)^{\frac{1}{2}}} \right), \quad x \in \Delta = (-2, 1)$$

определен на функциях $u \in C^2(\Delta) \cup C^1(\overline{\Delta})$, удовлетворяющих граничным условиям

$$2u'(-2) - 3u(-2) = 0, \quad (6.30)$$

$$2u'(1) + u(1) = 0. \quad (6.31)$$

В данном случае $\lambda=0 \notin \Lambda$; действительно, уравнение задачи на собственные значения $\mathcal{L}u = \lambda u$, $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, при $\lambda=0$ является уравнением Эйлера

$$(x+3)^2 u'' + \frac{3}{2}(x+3)u' - 3u = 0, \quad (6.32)$$

общее решение которого

$$u(x) = C_1(x+3)^{\frac{3}{2}} + C_2(x+3)^{-2}. \quad (6.33)$$

Это решение удовлетворяет граничным условиям (6.30), (6.31) при $C_1=C_2=0$, т.е. $u \equiv 0$ и $\lambda=0 \in \Lambda$. Уравнение (6.29) имеет вид

$$\frac{d}{dx}(x+3)^{\frac{3}{2}} \frac{du}{dx} - \frac{3u}{(x+3)^{\frac{1}{2}}} = -\delta(x-\xi).$$

При $x < \xi$ общее решение (6.33) этого уравнения удовлетворяет граничному условию (6.30) при $C_2 = 0$, т.е.

$$G(x, \xi) = C_1 u_1(x), \quad u_1(x) = (x+3)^{\frac{3}{2}}.$$

Аналогично при $x > \xi$

$$G(x, \xi) = C_2 u_2(x), \quad u_2(x) = (x+3)^{-2}.$$

При $x = \xi$ из уравнения (6.29), содержащего обобщенные производные, следует, что (см. (10.15)) $[G]|_{\xi} = 0$, $[G_{\xi}]|_{\xi} = -\frac{1}{p(\xi)}$, или

$$\begin{cases} C_2 u_2(\xi) - C_1 u_1(\xi) = 0, \\ C_2 u_2'(\xi) - C_1 u_1'(\xi) = -\frac{1}{p(\xi)}. \end{cases}$$

Определитель системы (с неизвестными C_1 и C_2) не равен нулю, так как является определителем Вронского W линейно независимых решений $u_1(x)$ и $u_2(x)$, следовательно,

$$C_1 = -\frac{u_2(\xi)}{p(\xi)W}, \quad C_2 = -\frac{u_1(\xi)}{p(\xi)W}.$$

Таким образом,

$$G(x, \xi) = -\frac{1}{p(\xi)W} \begin{cases} u_1(x) u_2(\xi), & a \leq x \leq \xi, \\ u_2(x) u_1(\xi), & \xi \leq x \leq b, \end{cases} \quad (6.34)$$

или

$$G(x, \xi) = \frac{2}{7} \begin{cases} \frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{(\xi+3)^2}, & -2 \leq x \leq \xi, \\ \frac{(\xi+3)^{\frac{3}{2}}}{(x+3)^2}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В задачах 6.266 – 6.278 построить функцию Грина оператора $\mathcal{L}$ на промежутке $(a < x < b)$.

$$6.266. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}x^2\frac{d}{dx}, \quad u(1) = u(2) = 0.$$

$$6.267. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1-x^2)\frac{d}{dx}, \quad u(0) = 0, \quad |u(1)| < \infty.$$

$$6.268. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1+\sin x)\frac{d}{dx}, \quad u'(0) - u(0) = 0, \quad 2u'(\frac{\pi}{2}) + u(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$6.269. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(\sin x + \cos 7x)\frac{d}{dx}, \\ |u(-\frac{\pi}{4})| < \infty, \quad u'(\frac{\pi}{4}) + u(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$6.270. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(\sin^4 x)\frac{d}{dx}, \quad u'(\frac{\pi}{4}) - u(\frac{\pi}{4}) = 0, \quad u'(\frac{3\pi}{4}) = 0.$$

$$6.271. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}e^{x^2-2x}\frac{d}{dx}, \quad u'(1) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}u(1) = 0, \quad u(2) = 0.$$

$$6.272. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1+x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{4(1+x)}, \\ |u(-1)| < \infty, \quad u'(0) + \frac{1}{2}u(0) = 0.$$

$$6.273. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1-x)\frac{d}{dx} + \frac{1}{1-x}, \quad u'(0) - u(0) = 0, \quad |u(1)| < \infty.$$

$$6.274. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1+x)^{-3}\frac{d}{dx} + \frac{5}{(1+x)^5}, \quad u'(-1) = 0, \quad u'(0) + u(0) = 0.$$

$$6.275. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}x^{-5}\frac{d}{dx} + \frac{16}{x^7}, \quad u'(1) - u(1) = 0, \quad u'(2) + u(2) = 0.$$

$$6.276. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx} + \frac{1}{4x}, \quad u(1) = u'(2) = 0.$$

$$6.277. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1+x^2)\frac{d}{dx} + 2, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

$$6.278. \mathcal{L} = -\frac{d}{dx}\frac{e^x}{x(2+x)}\frac{d}{dx} + \frac{2(1+x)e^x}{x^2(2+x)^2}, \quad u(0) = 0, \quad u'(2) + u(2) = 0.$$

Пример 6.20. Если $\lambda=0$ — собственное значение оператора $\mathcal{L}$ (6.28), то определение (6.29) функции Грина не годится. Дело в том, что задача $\mathcal{L}u = f$, $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ в общем случае не имеет решения. Для ее разрешимости необходимо, чтобы функция $f(x)$ и собственная функция $u_0(x)$, соответствующая собственному значению $\lambda=0$ (т.е. нетривиальное решение задачи $\mathcal{L}u=0$, $u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$),

были ортогональны. Действительно, в силу эрмитовости оператора

$$(f, u_0) = (\mathcal{L}u, u_0) = (u, \mathcal{L}u_0) = 0.$$

Для ортогонализации в правую часть уравнения (6.29) следует ввести слагаемое, заведомо не ортогональное функции $u_0(x) : -\delta(x - \xi) + C_0 u_0(x)$. Из ортогональности $(\delta(x - \xi) + C_0 u_0, u_0) = 0$ вытекает, что константа $C_0 = u_0 \xi / \|u_0\|^2$.

Таким образом, функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{L}G = -\delta(x - \xi) + \frac{u_0(\xi)u_0(x)}{\|u_0\|^2}, \quad x \in \Delta, \quad \xi \in \Delta \quad (6.35)$$

и тем же граничным условиям, что и $u_0(x)$. Если $u_1(x)$, $u_2(x)$ — фундаментальная система решений уравнения $\mathcal{L}u = 0$, $U(x)$ — частное решение неоднородного уравнения $\mathcal{L}u = C_0 u_0$, то

$$G(x, \xi) = \begin{cases} B_1 u_1(x) + B_2 u_2(x) + U(x), & a \leq x \leq \xi, \\ C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + U(x), & \xi \leq x \leq b. \end{cases}$$

После применения граничных условий при $x=a$ и $x=b$ остаются две неизвестные константы. Соотношения $[G]_{\xi}=0$ и $[G_x]_{\xi} = -1/p(\xi)$ дают лишь одно уравнение для определения этих констант. Поэтому одну из них можно выбрать произвольно или связать их каким-либо дополнительным условием. В качестве такового берут условие ортогональности $(f, u_0)=0$, которое сохраняет симметрию функции Грина ([65], т.2).

Множество собственных значений оператора $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$, определенного на функциях $u(x) \in C^2(\Delta) \cap C^1(\overline{\Delta})$, $\Delta = (0, 1)$, $u'(0)=0$, $u'(1)=0$, содержит собственное значение $\lambda=0$, которому соответствует собственная функция $u_0(x) = 1$. Функция Грина оператора $\mathcal{L}$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} G_{xx} &= -\delta(x - \xi) + 1, & 0 < x < 1, \\ G_x|_{x=0} &= G_x|_{x=1} = 0, & (G, u_0) = 0. \end{aligned}$$

Это определение имеет следующий физический смысл: статическое состояние стержня со свободными концами или стационарное распределение температуры в теплоизолированном стержне возможны, если суммарное действие источников равно нулю. Решение уравнения (6.36) при $x < \xi$ и $x > \xi$, удовлетворяющие граничным условиям, формируют функцию Грина:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + B, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{x^2}{2} - x + C, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Соотношения $[G]|_{\xi} = 0$ и $(G, u_0) = 0$ представляют собой систему уравнений относительно B и C :

$$\begin{cases} B - C = -\xi \\ (B - C)\xi + C = \frac{1}{3} - \frac{\xi^2}{2}, \end{cases}$$

решение которой $B = \frac{\xi^2}{2} - \xi + \frac{1}{3}$, $C = \frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2} \begin{cases} x^2 + (\xi - 1)^2 - \frac{1}{3}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (x - 1)^2 + \xi^2 - \frac{1}{3}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В задачах 6.279 – 6.283 построить функцию Грина оператора $\mathcal{L}$.

6.279. $\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}$, $0 < x < 1$, $|u| < \infty$, $u'(1) = 0$.

6.280. $\mathcal{L} = -\frac{d}{dx}(1 - x^2)\frac{d}{dx}$, $-1 < x < 1$, $|u| < \infty$.

6.281. $\mathcal{L} = -(\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx} + 1)$, $0 < x < \pi$, $u(0) = u'(\pi) = 0$.

6.282. $\mathcal{L} = -(\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx} + 1)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $u(0) = u'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

6.283. $\mathcal{L} = -(\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx} + 1)$, $0 < x < \pi$, $u'(0) = u'(\pi) = 0$.

Пример 6.21. Если $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора $\mathcal{L}$, определенного выражением (6.28), и $\lambda = 0 \notin \Lambda$, то решение одномерной краевой задачи

$$\mathcal{L}u = f, \quad u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$$

выражается интегралом

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6.36)$$

Пусть дана краевая задача

$$u'' - 2xu' - (1 - x^2)u = (x^2 + 1)e^{x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad (6.37)$$

$$u'(0) = u(1) = 0. \quad (6.38)$$

Чтобы воспользоваться выражением (6.36), нужно уравнение (6.37), имеющее форму

$$a(x)u'' + b(x)u' + c(x)u = F(x), \quad (6.39)$$

преобразовать к виду $\mathcal{L}u = f$, т.е.

$$\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} - q(x) = -f(x). \quad (6.40)$$

Сравнение коэффициентов уравнений (6.39) и (6.40) показывает, что

$$\frac{b}{a} = \frac{p'}{p}, \quad \frac{c}{a} = -\frac{q}{p}, \quad \frac{F}{a} = -\frac{f}{p},$$

откуда

$$p = e^{\int \frac{b}{a} dx}, \quad q = -\frac{pc}{a}, \quad f = -\frac{pF}{a}. \quad (6.41)$$

В данном случае

$$p(x) = e^{-x^2}, \quad q(x) = (1 - x^2)e^{-x^2}, \quad f(x) = -(1 + x^2).$$

Для построения функции Грина нужно найти общее решение уравнения

$$u'' - 2xu' - (1 - x^2)u = 0.$$

Замена $u(x) = \exp(\int v(x)dx)$ преобразует уравнение к виду

$$v' + v^2 - 2xv - 1 + x^2 = 0.$$

Подстановка $v(x) = Ax^k$ приводит к равенству

$$A k x^{k-1} + A^2 x^{2k} - 2A x^{k-1} - 1 + x^2 = 0,$$

которое становится тождеством при $A=1$, $k=1$. Отсюда следует, что $u(x) = \exp(x^2/2)$ — частное решение уравнения; общее решение строится по формуле (7.40):

$$u(x) = C_1 e^{\frac{x^2}{2}} \int \frac{dx}{p(x)e^{\frac{x^2}{2}}} + C_2 e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 x e^{\frac{x^2}{2}} + C_2 e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Граничным условиям (6.38) удовлетворяют частные решения: $u_1(x) = \exp(x^2/2)$ при $\xi > x$ и $u_2(x) = (1-x)\exp(x^2/2)$ при $x < \xi$. Таким образом, согласно формуле (6.34)

$$G(x, \xi) = e^{\frac{x^2 + \xi^2}{2}} \begin{cases} 1 - \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ 1 - x, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Решение задачи завершается вычислением интеграла (6.34):

$$\begin{aligned} u(x) &= -e^{\frac{x^2}{2}}(1-x) \int_0^x (1+\xi^2)e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi - \\ &- e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^1 (1-\xi)(1+\xi^2)e^{\frac{\xi^2}{2}} d\xi = -e^{\frac{x^2}{2}}(1-x) \int_0^x d(\xi e^{\frac{\xi^2}{2}}) - \\ &- e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^1 (1-\xi)d(\xi e^{\frac{\xi^2}{2}}) = e^{x^2} - e^{\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Методом функции Грина найти решения одномерных краевых задач 6.284 – 6.296 на промежутке $(a < x < b)$.

6.284. $2(x-1)^2 u'' + 3(x-1)u' - u = \sqrt{x-1}$,
 $|u(1)| < \infty$, $u'(2) + u(2) = 0$.

6.285. $x^2 u'' - 2u = x^4$, $|u(0)| < \infty$, $u(1) = 0$.

6.286. $3x^2 u'' - 2xu' - 2u = 5x^3 - 3x^2 \sqrt[3]{x^2}$,
 $|u(0)| < \infty$, $u(1) = 0$.

$$\mathbf{6.287.} \quad (\sin x + \cos x)u'' + (\sin x - \cos x)u'(\sin x + \cos x)^3, \\ u(\frac{\pi}{4}) = u(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$\mathbf{6.288.} \quad x^2u'' + 2xu' - 6u = x(3 - 4 \ln x), \\ |u(0)| < \infty, \quad u(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.289.} \quad u'' + 2tg xu' = tg x, \quad u(0) = u'(\frac{\pi}{4}) = 0.$$

$$\mathbf{6.290.} \quad u'' + 2ctg xu' = 2ctg x, \quad u(\frac{\pi}{4}) = u(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$\mathbf{6.291.} \quad ch xu'' + e^x u' = 1, \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.292.} \quad xu'' + 2u' = e^{-x^2}, \quad |u(0)| < \infty, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.293.} \quad (2 - x)^3u'' + 3(2 - x)^2u' - 5(2 - x)u = \\ = \frac{1}{2}(8x^2 - 17x - 10), \\ 2u'(0) - u(0) = 0, \quad 2u'(1) + u(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.294.} \quad u'' + 2(x + 1)u' = e^{-x^2}, \quad u(-1) = u'(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.295.} \quad (x \cos x - \sin x)u'' + x \sin x u' - \sin x u = -x, \\ u'(-\frac{\pi}{2}) - u(-\frac{\pi}{2}) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

$$\mathbf{6.296.} \quad u'' - 2xu' - 2u = 2x - 1, \quad u'(0) = u(1) = 0.$$

Пример 6.22. Пусть $G(x, \xi)$ — функция Грина оператора $\mathcal{L}$, определенного выражением (6.28) и $\lambda=0 \in \overline{\Lambda}$, тогда задача на собственные значения

$$\mathcal{L}u = \lambda \rho u, \quad u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \quad (6.42)$$

где $\rho(x) > 0$, $\rho(x) \in C(\overline{\Delta})$, эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) \rho(\xi) u(\xi) d\xi. \quad (6.43)$$

Для демонстрации методики перехода к уравнению (6.43) предлагается задача на собственные значения на промежутке $(1 < x < \frac{3}{2})$:

$$x^2(1 - 2 \ln x)u'' + x(1 + 2 \ln x)u' - 4u + \lambda x^4(1 - 2 \ln x)^2 u = 0, \quad (6.44)$$

$$u(1) = u'\left(\frac{3}{2}\right) = 0. \quad (6.45)$$

Преобразование уравнения (6.44) к виду

$$\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx} - q(x)u + \lambda \rho(x)u = 0$$

осуществляется с помощью формул (6.41), согласно которым

$$p(x) = \frac{1}{x(1 - 2 \ln x)}, \quad q(x) = \frac{4}{x^3(1 - 2 \ln x)^2}, \quad \rho(x) = x.$$

Чтобы построить функцию Грина задачи (6.49)–(6.50), нужно найти общее решение уравнения

$$x^2(1 - 2 \ln x)u'' + x(1 + 2 \ln x)u' - 4u = 0.$$

Это уравнение имеет частное решение вида $u_1(x) = x^k$. Действительно, при подстановке x^k в уравнение получается равенство $2k(k-2) \ln x - (k^2 - 4) = 0$, которое становится тождеством при $k=2$. Располагая частным решением, можно найти общее решение по формуле Остроградского-Лиувилля

$$u(x) = C_1 x^2 \int \frac{dx}{x^4 p(x)} + C_2 x^2 = C_1 \ln x + C_2 x^2.$$

Граничным условиям (6.45) удовлетворяют решения

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \ln x, & x &< \xi, \\ u_2(x) &= 2x^2 - 9 \ln x, & \xi &< x. \end{aligned}$$

Функция Грина определяется выражением (6.34):

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2} \begin{cases} (2\xi^2 - 9 \ln \xi) \ln x, & 1 \leq x \leq \xi, \\ (2x^2 - 9 \ln x) \ln \xi, & \xi \leq x \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Итак, задача Штурма-Лиувилля (6.49), (6.50) эквивалентна интегральному уравнению

$$u(x) = \lambda \int_1^{\frac{3}{2}} G(x, \xi) \xi u(\xi) d\xi.$$

Методом функции Грина свести задачи 6.297 – 6.312 на собственные значения к эквивалентным интегральным уравнениям.

$$\begin{aligned} \mathbf{6.297.} \quad & x^2 u'' + 4xu' - 4u + \lambda u = 0, \quad 1 < x < 4, \\ & u'(1) - u(1) = 0, \quad u'(4) + u(4) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.298.} \quad & u'' + u' + \lambda x^2 e^{-x} u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ & u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.299.} \quad & (x^2 + 2)u'' + 2xu' + \lambda x u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ & u(0) = u'(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.300.} \quad & u'' + 2u' + \lambda e^{-2x} u = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ & u(0) = u'(\pi) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.301.} \quad & u'' + u' + \lambda x^3 u = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ & u'(0) - u(0) = 0, \quad u'(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.302.} \quad & u'' + 5u' - 6u + \lambda x e^{-x} u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ & u(0) = 0, \quad u'(1) + 6u(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.303.} \quad & u'' - 2u' - 8u + \lambda e^x u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ & u(0) = 0, \quad u'(1) + 2u(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.304.} \quad & x^2 u'' + 2xu' - 12u + \lambda x u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ & u(0) = u(1) = 0. \end{aligned}$$

$$\mathbf{6.305.} \quad u'' - u' + \lambda\sqrt{x} e^x u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, \quad u'(1) + u(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.306.} \quad u'' + 4ctg x u' + \lambda x^3 u = 0, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ |u(0)| < \infty, \quad u(\frac{\pi}{2}) = 0.$$

$$\mathbf{6.307.} \quad 8u'' - 2xu' - 2u + \lambda u = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u'(0) = u(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.308.} \quad u'' + 2xu' + \lambda u = 0, \quad -1 < x < 1, \\ u(-1) = u(1) = 0.$$

$$\mathbf{6.309.} \quad x^2(1 - \ln x)u'' + xu' - u + \lambda x^3(1 - \ln x)^3 u = 0, \quad 1 < x < e, \\ u'(1) - u(1) = 0, \quad u'(e) = 0.$$

$$\mathbf{6.310.} \quad (x+1)u'' + xu' - u + \lambda(x+1)^2 u = 0, \quad 0 < x < 4, \\ u(0) = 0, \quad u'(4) + u(4) = 0.$$

$$\mathbf{6.311.} \quad u^{(4)} - \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0) = u'(0) = u''(l) = u'''(l) = 0.$$

$$\mathbf{6.312.} \quad u^{(4)} - \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0) = u'(0) = u(l) = u'(l) = 0.$$

6.313. Пусть $G(x, \xi)$ — функция Грина задачи

$$\frac{d}{dx} p(x) \frac{du}{dx} - q(x)u + \lambda \rho(x)u = 0, \quad a < x < b, \\ \alpha_1 u'(a) - \beta_1 u(a) = 0, \quad \alpha_2 u'(b) + \beta_2 u(b) = 0, \\ \alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0, \quad i = 1, 2,$$

собственные значения которой $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbf{N}$. Доказать, что наименьшее собственное значение

$$\lambda_1 \geq \left[\int_a^b \int_a^b G^2(x, \xi) \rho(x) \rho(\xi) dx d\xi \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Пример 6.23. Если $\lambda=0$ — собственное значение оператора $\mathcal{L}$ (6.28), то для вывода интегрального уравнения, эквивалентного задаче на собственные значения

$$\mathcal{L}u = \lambda u, \quad u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}},$$

следует переписать эту задачу в равносильной форме

$$(\mathcal{L} + \mu)u = (\lambda + \mu)xi, \quad u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}, \quad \mu > 0.$$

Построение функции Грина $G_{\mu}(x, \xi)$ оператора $\mathcal{L}_{\mu} = \mathcal{L} + \mu$, собственные значения которого положительны, дано в примере 6.12, а соответствующее интегральное уравнение имеет вид:

$$u(x) = (\lambda + \mu) \int_a^b G_{\mu}(x, \xi) \rho(\xi) d\xi.$$

Задача на собственные значения

$$\begin{aligned} u'' + \lambda u &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u'(0) &= u'(1) = 0 \end{aligned}$$

имеет при $\lambda=0$ нетривиальное решение $u_0(x) = 1$, следовательно, $\lambda=0$ — собственное значение. Собственные значения эквивалентной задачи

$$\begin{aligned} u'' - u + (\lambda + 1)u &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u'(0) &= u'(1) = 0 \end{aligned} \tag{6.46}$$

положительны, поэтому соответствующая функция Грина $G_1(x, \xi)$ удовлетворяет системе условий:

$$\begin{aligned} G_{1xx} - G_1 &= -\delta(x - \xi), \quad 0 < x < l, \\ G_{1x}|_{x=0} &= G_{1x}|_{x=1} = 0. \end{aligned}$$

В данном случае $u_1(x) = chx$, $u_2(x) = ch(1 - x)$ и согласно формуле (6.34)

$$G_1(x, \xi) = \frac{1}{sh1} \begin{cases} ch(1 - \xi)chx, & 0 \leq x \leq \xi, \\ ch\xi ch(1 - x), & \xi \leq x \leq 1, \end{cases}$$

а интегральное уравнение, эквивалентное задаче (6.46), запишется в виде:

$$u(x) = (\lambda + 1) \int_0^1 G_1(x, \xi) d\xi.$$

6.314. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения для уравнения Лежандра:

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + \lambda u = 0, \quad x \in \Delta] - 1; 1[, \\ u \in C^2(\Delta) \cap C(\overline{\Delta}).$$

6.315. Свести к эквивалентному интегральному уравнению задачу на собственные значения для уравнения Чебышева-Лагерра:

$$xu'' + (1 + \alpha - x)u' + \lambda u = 0, \quad x \in \Delta] 0; \infty[, \quad \alpha \geq 0, \\ u \in C^2(\Delta) \cap C(\overline{\Delta}), \quad \int_0^\infty u^2 x^\alpha e^{-x} dx < \infty.$$

6.316. Получить интегральное уравнение, эквивалентное задаче на собственные значения для уравнения Чебышева-Эрмита:

$$u'' - 2xu' + \lambda u = 0, \quad x \in R, \\ u \in C^2(R), \quad \int_{-\infty}^\infty u^2 e^{-x^2} dx < \infty.$$

6.317. Для решения нелинейных уравнений применяется оператор Шредингера

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x), \quad \mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \{\psi : |\psi \in C^2(R)\},$$

в котором функция $u(x)$ удовлетворяют условиям

$$u(x) \in C^1(R), \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{m+\alpha} |u^{(m)}(x)| = 0, \quad (6.47)$$

где $\alpha > 0$, $m = 0, 1$. Решения $f^+(x, k)$ и $f^-(x, k)$ уравнения $\mathcal{L}\psi = k^2\psi$ при вещественных k , удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} f^- = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} f^+ = 1,$$

называются решениями Йоста. Доказать, что функции f^+ и f^- являются решениями интегральных уравнений

$$f^\pm(x, k) = e^{\pm ikx} + \frac{1}{k} \int_x^{\pm\infty} u(\xi) \sin k(\xi - x) f^\pm(\xi, k) d\xi. \quad (6.48)$$

6.318. Дан матричный оператор

$$\mathcal{L} = i \begin{pmatrix} D & -q(x) \\ r(x) & -D \end{pmatrix}, \quad D = \frac{d}{dx}, \quad (6.49)$$

определенный на функциях

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \in C^1(R),$$

$q(x)$ и $r(x)$ принадлежат множеству функций:

$$f \in C^2(R), \quad |f^{(m)}| \leq M e^{-2\beta_0|x|}, \quad \beta_0 > 0, \quad m = 0, 1, 2. \quad (6.50)$$

Решения Йоста уравнения $\mathcal{L}\psi = k^2\psi$ (при вещественных k) выделяются условиями

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-ikx} f^+(x, k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{ikx} f^-(x, k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ikx} \tilde{f}^+(x, k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-ikx} \tilde{f}^-(x, k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Доказать, что функции $f^\pm$, $\tilde{f}^\pm$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} f^+(x, k) &= e^{ikx} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^\infty P(x, \xi, k) f^+(\xi, k) d\xi, \\ f^-(x, k) &= e^{-ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x P(x, \xi, k) f^-(\xi, k) d\xi, \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned}\tilde{f}^+(x, k) &= e^{-ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \int_x^\infty P(x, \xi, k) \tilde{f}^+(\xi, k) d\xi, \\ \tilde{f}^-(x, k) &= e^{ikx} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{-\infty}^x P(x, \xi, k) \tilde{f}^-(\xi, k) d\xi,\end{aligned}$$

где

$$P(x, \xi, k) = \begin{pmatrix} 0 & q(\xi)e^{ik(\xi-x)} \\ r(\xi)e^{-ik(\xi-x)} & 0 \end{pmatrix}.$$

6.319. Показать, что частоты собственных колебаний однородной струны ($0 < x < l$) с закрепленными концами связаны с характеристическими числами уравнения

$$u(x) = \mu \int_0^1 K(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad K(x, \xi) = \begin{cases} (1 - \xi)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ (1 - x)\xi, & \xi \leq x \leq 1, \end{cases}$$

соотношением $\omega_n^2 = \frac{a^2}{l^2} \mu_n$, $n \in \mathbf{N}$.

6.320. Однородный цилиндрический стержень ($0 < x < l$), конец $x = 0$ которого закреплен, а другой — свободен, совершает продольные колебания. Показать, что частоты собственных колебаний $\omega_n = \sqrt{\frac{a}{l}} \mu_n$, где μ_n — характеристическое число уравнения

$$u(x) = \mu \int_0^1 K(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

с ядром

$$K(x, \xi) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (6.52)$$

6.321. Тяжелая струна, длина которой l , плотность ρ_0 , подвешена в поле тяжести за один из концов. Получить интегральное уравнение для описания колебаний струны и установить связь между частотами собственных колебаний и характеристическими числами уравнения.

6.322. Круглый вал ($0 < x < l$) с характеристиками $G(x)$, $I(x)$, $K(x)$, совершает крутильные колебания; торец $x=0$ закреплен, а торец $x=l$ свободен. Вывести интегральное уравнение для определения собственных колебаний вала.

6.323. Тонкий однородный стержень ($0 < x < l$) с прямоугольным поперечным сечением (рис.1.11) совершает малые поперечные колебания в плоскости zOx . Свести задачу для определения собственных колебаний к интегральному уравнению, если 1) торцы стержня закреплены; 2) торец $x=0$ закреплен, а торец $x=l$ свободен.

6.324. Интеграл

$$A_m = \int_a^b K_m(\xi, \xi) d\xi$$

называется m -м следом ядра $K(x, \xi)$. Приближенное вычисление наименьшего (по модулю) характеристического числа μ_1 ядра $K(x, \xi)$ основано на неравенствах (метод следов)

$$\frac{1}{\sqrt[m]{A_m}} \leq |\mu_1| \leq \sqrt{\frac{A_{2n}}{A_{2n+1}}}, \quad m = 2, 3, 4, \dots, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.53)$$

Вычислить приближенное значение (при $m = 2$, $n = 1$) частоты основного тона струны длиной l и сравнить с частотой, полученной методом Фурье, если 1) один конец струны закреплен, а другой свободен (задача 2.2) 2) струна подвешена в поле тяжести (задача 2.316).

6.325. Применяя оценку (6.53) при $m=2$, $n=1$, найти приближенное значение частоты основного тона струны длины l , один конец которой закреплен, а другой свободен (см. задачу 1.24); плотность струны $\rho(x) = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{l}\right)$.

6.5. Ответы

6.1. $\tilde{G}(x, t) = e^{-ht} G(x, t)$, $h = \frac{R}{L}$, $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, где

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right). \quad (6.54)$$

Указание. Замена $\tilde{G} = e^{-ht} G$ приводит к задаче из примера 6.1.

6.2. $\psi(x, t) = -\frac{a^2 Q}{\rho_0 S}$, где $G(x, t)$ имеет вид (6.54). Указание. См. задачу 1.203. **6.3.**

$$1) G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\eta \left(t - \frac{r}{a} \right)}{\sqrt{(at)^2 - r^2}}, \quad r^2 = x^2 + y^2; \quad (6.55)$$

$$2) G(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta \left(t - \frac{r}{a} \right)}{4\pi a^2 r}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (6.56)$$

6.4. $\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a^2 Q}{\rho_0} G(\mathbf{r}, t)$, где $G(\mathbf{r}, t)$ имеет вид (6.55).

6.5. $\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a^2 Q}{\rho_0} G(\mathbf{r}, t)$, где $G(\mathbf{r}, t)$ имеет вид (6.56).

6.6. $u(x, t) = \frac{I}{\rho} G(x, t)$, где

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} e^{-\beta t} I_0 \left(\beta \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right), \quad \beta = \frac{\alpha}{2\rho}. \quad (6.57)$$

Указание. Применить преобразования Лапласа и Фурье; для определения оригинала воспользоваться ответом к задаче 3.11 п.1 и соответствием (3.33).

6.7. Функция Грина $G(x, t)$ имеет вид (6.57) при $\beta = \frac{R}{2L}$, $a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

6.8. $G(x, t) = \frac{1}{2a} e^{-\beta t} I_0 \left(\alpha \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right)$, где $\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C} \right)$, $\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} - \frac{G}{C} \right)$. Указание. Решать так же, как задачу 6.6.

6.9. $u(x, t) = \frac{I}{\rho} G(x, t)$, где функция Грина

$$G(x, t) = \frac{1}{2a} J_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right),$$

$a^2 = \frac{T}{\rho}$, $c^2 = \frac{k}{\rho}$. Указание. Применить преобразование Лапласа и воспользоваться соотношением (3.34). **6.10.** $G(x, t) = \frac{1}{2a} I_0 \left(c \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right)$.

Указание. Применить преобразование Лапласа и воспользоваться соотношением (3.33).

$$6.11. \quad 1) G(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a^2} \frac{\cos\left(k\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right);$$

$$2) G(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a^2} \frac{ch\left(k\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Указание. Применить преобразование Фурье; при восстановлении прообраза употребить формулы (3.65), (3.66).

$$6.12. \quad 1) G(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\frac{\delta\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} - \frac{k}{a} \frac{J_1\left(k\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right) \right],$$

$$2) G(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \left[\frac{\delta\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r} + \frac{k}{a} \frac{I_1\left(k\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{a^2}}} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right) \right],$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Указание. Применить преобразования Лапласа и Фурье. В интеграле обратного преобразования Фурье ввести сферические координаты. Перейти к оригиналу $f(t) \leftrightarrow F(p) = \exp(-\tau\sqrt{p^2 \pm 1})$, где $\tau > 0$, с помощью теоремы дифференцирования изображения, соотношения (3.33) или (3.34) и теоремы дифференцирования оригинала.

$$6.13. \quad G(x, t) = \frac{\eta(t)}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \sin a\lambda^2 t e^{i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \quad a^2 = \frac{EJ}{\rho S}.$$

$$6.14. \quad G(x, \xi, t) = \begin{cases} \frac{a_1 E_2}{a_2(a_1 E_2 + a_2 E_1)} \eta\left(t + \frac{x}{a_1} - \frac{\xi}{a_2}\right), & x \leq 0, \xi \geq 0, \\ \frac{a_1 E_2 - a_2 E_1}{2a_2(a_1 E_2 + a_2 E_1)} \eta\left(t - \frac{x+\xi}{a_2}\right) + \frac{1}{2a_2} \eta\left(t - \frac{|x-\xi|}{a_2}\right), & x \geq 0, \xi \geq 0. \end{cases}$$

Если $\xi \leq 0$, то $G(x, \xi, t)$ получается из приведенного выражения заменами: $\xi \rightarrow -\xi$, $x \rightarrow -x$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$.

$$6.15. \quad u(x, t) = \frac{I}{\rho} \tilde{G}(x, t) = \frac{I}{\rho} \begin{cases} \left[1 - e^{-h\left(t - \frac{|x-\xi|}{a}\right)}\right] G(x - \xi, t), & x \xi \leq 0, \\ G(x - \xi, t) - e^{-h\left(t - \frac{|x+\xi|}{a}\right)} G(x + \xi, t), & x \xi \geq 0, \end{cases}$$

где $h = \frac{2a\rho}{m}$, $a^2 = \frac{I}{\rho}$, а функция $G(x, t)$ определена выражением (6.54).

$$6.16. \quad u(x, t) = Q\sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2} + \sqrt{L_2 C_1}} \delta\left(t - \frac{\xi}{a_2} + \frac{x}{a_1}\right), & x < 0, \\ \delta\left(t - \frac{|x-\xi|}{a_2}\right) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{L_2 C_1} - \sqrt{L_1 C_2}}{\sqrt{L_2 C_1} + \sqrt{L_1 C_2}} \delta\left(t - \frac{x+\xi}{a_2}\right), & 0 < x, \end{cases}$$

где $\xi > 0$. Если $\xi < 0$, то в полученном выражении нужно заменить $x \rightarrow -x$,

$$\xi \rightarrow -\xi, \quad 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 1. \quad 6.17. \quad u(x, t) = \frac{F_0}{2\alpha a \rho} \left[1 - e^{-\alpha\left(t - \frac{|x|}{a}\right)}\right] \eta\left(t - \frac{|x|}{a}\right).$$

$$6.18. \quad u(x, t) = \frac{F_0 [1 - \cos \omega\left(t - \frac{|x|}{a}\right)]}{2a\omega\rho} \eta\left(t - \frac{|x|}{a}\right).$$

$$6.19. \quad u(x, t) = \frac{F_0}{2a\rho} \begin{cases} 0, & t \leq \frac{|x|}{a}, \\ t_0, & \frac{|x|}{a} \leq t < t_0 + \frac{|x|}{a}, \\ t - \frac{|x|}{a}, & t_0 + \frac{|x|}{a} < t. \end{cases}$$

$$6.20. \quad \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a}{2\pi\rho_0} \int_0^t d\tau \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < a(t-\tau)} \frac{q(\mathbf{r}, \tau) d\mathbf{r}'}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}}.$$

$$6.21. \quad 1) \quad \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a}{2\pi\rho_0} \int_0^{t-\frac{r}{a}} \frac{q(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}};$$

$$2) \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0}{2\pi\rho_0} \ln \frac{at + \sqrt{a^2 t^2 - r^2}}{r} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$6.22. \quad \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a}{2\pi\rho_0} \int_0^{t^*} \frac{q(\tau) d\tau}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (\mathbf{r}-\mathbf{v}_0\tau)^2}} \eta\left(t - \frac{r}{a}\right),$$

где $t^* = t - \frac{(x-v_0t)v_0 + a\sqrt{(x-v_0t)^2 + (1-\beta^2)y^2}}{a^2 - v_0^2}$, $\beta = \frac{v_0}{a}$, $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_x$. Указание.

Применив функцию Грина (6.55), записать потенциал скоростей в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a}{2\pi\rho_0} \int_0^t \frac{\eta\left(t-\tau - \frac{\sqrt{(x-v_0t)^2 + y^2}}{a}\right)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - (x-v_0t)^2 - y^2}} q(\tau) d\tau.$$

Функция $h(\tau) = t - \tau - \frac{\sqrt{(x-v_0t)^2 + y^2}}{a}$ убывает. Если $h(0) = t - \frac{r}{a} < 0$, то $\psi = 0$; если $h(0) = t - \frac{r}{a} > 0$, то на промежутке $[0, t]$ функция $h(\tau)$ имеет один нуль $\tau = t^*$. Для $\xi = t - \tau$ получается уравнение $(a^2 - v_0^2)\xi^2 - 2v_0(x - v_0t)\xi - (x - v_0t)^2 - y^2 = 0$, положительный корень которого определяет t^* .

$$6.23. \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < at} \frac{q(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{a})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'.$$

$$6.24. \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{q_0\sqrt{\pi}}{8\alpha^3\rho_0 r} \{2\operatorname{erf}(\alpha r) - \operatorname{erf}[\alpha(r+at)] - \operatorname{erf}[\alpha(r-at)]\}$$

$$6.25. \quad \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{aq}{8\pi\rho_0 r r'} \left[\eta\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{a}\right) - \eta\left(t - \frac{r+r'}{a}\right) \right].$$

$$6.26. \quad 1) \quad \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{a}{8\pi\rho_0 r r'} \int_{t-\frac{r+r'}{a}}^{t-\frac{r-r'}{a}} q(\tau) d\tau;$$

$$2) \quad \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{aq_0}{8\pi\rho_0 r r'} \left[\left(t - \frac{r+r'}{a}\right) \eta\left(t - \frac{r+r'}{a}\right) - \left(t - \frac{r-r'}{a}\right) \eta\left(t - \frac{r-r'}{a}\right) \right].$$

$$6.27. \quad \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho_0} \frac{Q\left(t - \frac{r}{a}\right)}{r}. \quad 6.28. \quad \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho_0 r^*} Q\left(t - \frac{\beta(z-v_0t)+r^*}{a(1-\beta^2)}\right),$$

где $\beta = \frac{v_0}{a}$, $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{e}_z$, $r^* = \sqrt{(z-v_0t)^2 + (1-\beta^2)(x^2 + y^2)}$. Указание. Потенциал скоростей

$$u(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho_0} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\delta\left[\mathbf{r}' - \mathbf{v}\left(t - \frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{a}\right)\right] Q\left(t - \frac{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}{a}\right) d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}$$

после замен $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{s}$ и $\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{v}}{a}s = \mathbf{R}$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$, $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\xi, \eta, \zeta)$,

$\mathbf{R} = \mathbf{R}(X, Y, Z)$, приобретает форму:

$$u(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho_0} \frac{Q\left(t - \frac{s(X, Y, Z)}{a}\right)}{s(X, Y, Z)} \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(X, Y, Z)} \Big|_{\mathbf{R}=0}.$$

Преобразование $s(\xi, \eta, \zeta) \rightarrow \mathbf{R}(X, Y, Z)$ имеет вид:

$$x + \xi = X, \quad y + \eta = Y, \quad z + \zeta - vt = \beta \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} = Z,$$

откуда

$$\frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(X, Y, Z)} = 1 + \frac{\beta \zeta}{s}.$$

Чтобы найти значение функции s при $\mathbf{R} = 0$ нужно воспользоваться формулой замены переменных: $\mathbf{r} + \mathbf{s} - \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{v}}{a}s = 0$, или $s^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{v}t + \frac{\mathbf{v}}{a}s)^2 = 0$. Для s получается уравнение $s^2(1 - \beta^2) - 2\beta(z - vt)s - [x^2 + y^2 + (z - vt)^2] = 0$, решение которого $s = \frac{\beta(z - vt) + r^*}{1 - \beta^2}$. Значение функции ζ при $\mathbf{R} = 0$ определяется из уравнения, связывающего переменные ζ и Z : $\zeta = -(z - vt) - \beta s$.

$$6.29. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{x+a(t-\tau)} t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) J_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(\xi-x)^2}{a^2}} \right) d\xi.$$

$$6.30. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^{t - \frac{|x|}{q}} f(\tau) J_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(\xi-x)^2}{a^2}} \right) d\xi \eta \left(t - \frac{|x|}{q} \right) d\xi,$$

где $c^2 = \frac{k}{\rho}$, $f(t) = \frac{F_0(t)}{\rho}$.

$$6.31. \quad u(x, t) = \begin{cases} f\left(t + \frac{x}{a_2}\right) + \frac{\sqrt{E_2 \rho_2} - \sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_2 \rho_2} + \sqrt{E_1 \rho_1}} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right) \eta\left(t - \frac{x}{a_2}\right), & x \geq 0, \\ \frac{2\sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_2 \rho_2} + \sqrt{E_1 \rho_1}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right) \eta\left(t + \frac{x}{a_1}\right), & x < 0. \end{cases}$$

Волна не отражается, если $E_2 \rho_2 = E_1 \rho_1$.

$$6.32. \quad u(x, t) = \frac{u_0(x-at) + u_0(x+at)}{2} + \frac{k}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_0(\xi) J_1 \left(k \sqrt{t^2 - \frac{(\xi-x)^2}{a^2}} \right) \frac{t d\xi}{\sqrt{t^2 - \frac{(\xi-x)^2}{a^2}}} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) J_0 \left(k \sqrt{t^2 - \frac{(\xi-x)^2}{a^2}} \right) d\xi.$$

$$6.33. \quad u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < at} \frac{u_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{\sqrt{a^2 t^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| < at} \frac{u_1(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'}{\sqrt{a^2 t^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}},$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y. \quad 6.34. \quad \rho(0, t) = \rho_0 \left\{ 1 + \frac{s_0}{1+a^2 t^2} \left[1 - \frac{at}{\sqrt{1+a^2 t^2}} \ln(at + \sqrt{1+a^2 t^2}) \right] \right\}.$$

$$6.35. \quad u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=at} \frac{u_0(\mathbf{r}') ds}{t} + \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=at} \frac{u_1(\mathbf{r}')}{t} ds.$$

$$6.36. \quad \frac{\rho(r, t)}{\rho_0} = 1 + s(x, t), \quad \frac{s(x, t)}{s_0} = \frac{r-at}{2r} [\eta(r_0 + r - at) - \eta(|r_0 - r| - at)] + \\ + \eta(r_0 - r - at).$$

$$6.37. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+a^2 t^2}} e^{-\frac{\alpha x^2}{4a(1+\alpha^2 t^2)}} \cos \left[\frac{\alpha^2 x^2 t}{4a(1+\alpha^2 t^2)} - \delta \right], \quad tg \delta = \frac{\alpha t}{1+\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}.$$

Указание. Построение решения связано с вычислением интегралов. Чтобы

установить равенство

$$\int_0^\infty e^{kx^2} dx = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi_0 = \arg k \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (6.58)$$

нужно показать, что значение интеграла не изменится при деформации контура интегрирования в луч, образующий угол $(\pi - \varphi_0)/2$ с положительным направлением оси $0x$ (рис.6.4.а).

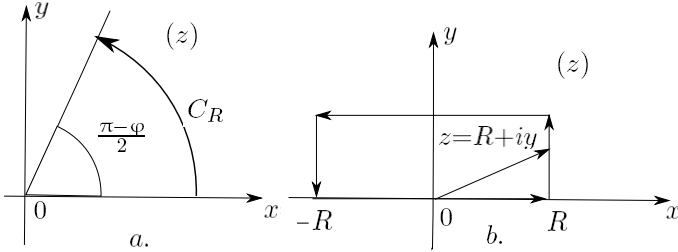


Рис. 6.4

Для этого следует применить теорему Коши для сектора радиуса R , где подынтегральная функция аналитична. Интеграл по дуге C_R стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$, что вытекает (после замены $2\varphi + \varphi_0 = \pi - \psi$) из первенства $\cos \psi \geq 1 - \frac{2}{\pi}|\psi|$, $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ и оценки $\left| \int_{C_R} e^{kz^2} dz \right| \leq R \int_0^{\left| \frac{\pi - \varphi_0}{2} \right|} e^{|k|R^2 \cos(2\varphi + \varphi_0)} d\varphi =$
 $= R \int_0^{|\pi - \varphi_0|} e^{-|k|R^2 \cos \psi} d\psi \leq R \int_0^{|\pi - \varphi_0|} e^{-|k|R^2(1 - \frac{2}{\pi}\psi)} d\psi = O\left(\frac{1}{R}\right).$
 Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{kx^2} dx = \int_0^\infty e^{i \frac{\pi - \varphi_0}{2}} e^{kz^2} dz.$$

Последний интеграл заменой $\sqrt{k}z = ir$ сводится, с точностью до множителя, к интегралу Пуассона, вычисление которого завершает доказательство соотношения (6.58). Из доказанного равенства следует, что

$$\int_{-\infty}^\infty e^{i\beta x} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \cos \alpha x^2 \\ \sin \alpha x^2 \end{array} \right\} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \left(\cos \frac{\beta^2}{4\alpha} \pm \sin \frac{\beta^2}{4\alpha} \right), \quad \alpha > 0. \quad (6.59)$$

Для вывода соотношения

$$\int_{-\infty}^\infty e^{k(x+b)^2} dx = i \sqrt{\frac{\pi}{k}}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \arg k \leq \frac{3\pi}{2}, \quad (6.60)$$

где $b = b_1 + ib_2$ любое комплексное число, если $\mathbf{Re} k = \mathbf{Re} (k_1 + i k_2) = k_1 < 0$, а если $k_1 = 0$, $k_2 \neq 0$, то $b_2 k_2 \geq 0$, следует ввести новую переменную $z = x + b$, что приводит к интегралу

$$\int_{-\infty + i b_2}^{\infty + i b_2} e^{kz^2} dz.$$

При деформации контура в действительную ось значение интеграла не изменится. Для доказательства надо применить теорему Коши к прямоугольнику (рис. 6.4.b) (внутри него подынтегральная функция аналитична) и убедиться, что интегралы по контурам L_{1R} , L_{2R} стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Например, для интеграла по L_{2R} это вытекает из оценки

$$\left| \int_{L_{2R}} e^{kz^2} dz \right| \leq e^{k_1(R^2 - b_2^2)} \left| \int_0^{b_2} e^{-2k_2 R y} dy \right|.$$

Доказательство соотношения (6.60) следует теперь из (6.58).

С помощью (6.60) устанавливается следующий результат:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha \xi^2}{4a} + i \frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi = i \sqrt{\frac{\pi}{k}} e^{-\frac{i \alpha x^2}{16ka^2t}},$$

где $\alpha \geq 0$, $a \geq 0$, $k = \frac{i-\alpha t}{4at}$, $\frac{\pi}{2} \leq \arg k < \pi$.

$$\mathbf{6.38.} \quad G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a} \left[\eta \left(t - \frac{|\xi - x|}{a} \right) \mp \eta \left(t - \frac{\xi + x}{a} \right) \right].$$

$$\mathbf{6.39.} \quad G(x, \xi, t) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{1}{2a} \eta \left(t - \frac{\xi + x}{a} \right) + \eta \left(t - \frac{|\xi - x|}{a} \right), \quad \alpha = \frac{ka}{ES}.$$

$$\mathbf{6.40.} \quad u(x, t) = \frac{1}{a\rho S} \left[1 - e^{-\frac{a\rho S}{m} \left(t - \frac{x}{a} \right)} \right] \cdot \eta \left(t - \frac{x}{a} \right).$$

$$\mathbf{6.41.} \quad G(x, \xi, t) = \frac{1}{2a} \eta \left(t - \frac{|\xi - x|}{a} \right) + \frac{1}{a} \left[\frac{1}{2} - e^{-h \left(t - \frac{\xi + x}{a} \right)} \right] \eta \left(t - \frac{\xi + x}{a} \right), \quad h = \frac{1}{aLC_0},$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad \mathbf{6.42.} \quad q(t) = \frac{2u_0 h C_0}{h^2 + \omega^2} (h \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-ht}), \quad h = \frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

$$\mathbf{6.43.} \quad u(x, t) = \mp f(at - x) \eta(at - x). \quad \mathbf{6.44.} \quad u(x, t) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} f(at - x) \eta(at - x), \quad \alpha = \frac{ka}{ES}.$$

$$\mathbf{6.45.} \quad u(x, t) = \frac{F_0}{2a\omega\rho} \left\{ \left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{|x - x_0|}{a} \right) \right] \eta \left(t - \frac{|x - x_0|}{a} \right) - \right. \\ \left. - \left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{x + x_0}{a} \right) \right] \eta \left(t - \frac{x + x_0}{a} \right) \right\}.$$

$$\mathbf{6.46.} \quad \tilde{G}(x, \xi, t) = e^{-\beta t} [G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t)], \quad \beta = \frac{R}{L}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{CL}}, \quad \text{функция } G(x, t) \text{ определена выражением (6.54).}$$

$$\mathbf{6.47.} \quad \tilde{G}(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) + G(x + \xi, t) \quad \text{где } G(x, t) \text{ определена выражением (6.57), в котором } \beta = \frac{R}{2L}, \quad a^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$\mathbf{6.48.} \quad u(x, t) = \mu \left(t - \frac{x}{a} \right) \eta \left(t - \frac{x}{a} \right). \quad \text{Решение. Задача}$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$$

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,$$

эквивалентна (см.(10.15)) задаче с однородным граничным условием

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} - a^2 \mu(t) \delta'(x), \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Решение выражается через функцию Грина по формуле

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty (-a^2 \mu(\tau) \delta'(\xi)) G(x, \xi, t - \tau) d\xi a^2 \int_0^t \mu(\tau) G_\xi(x, 0, t - \tau) d\tau.$$

В данном случае (см. задачу 6.38) $G_\xi(x, 0, t - \tau) \frac{1}{a^2} \delta(t - \tau - \frac{x}{a})$, следовательно,

$$u(x, t) = \int_0^t \mu(\tau) \delta(t - \tau - \frac{x}{a}) d\tau = \mu(t - \frac{x}{a}) \eta(t - \frac{x}{a}).$$

6.49. $u(x, t) = \beta e^{-\beta(t - \frac{x}{a})} \int_0^{t - \frac{x}{a}} \mu(\tau) e^{\beta\tau} d\tau \cdot \eta(t - \frac{x}{a}), \quad \beta = \frac{k}{S\sqrt{\rho E}}, \quad a^2 = \frac{E}{\rho}.$

6.50. $i(x, t) = E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} e^{-\beta t} I_0\left(\beta \sqrt{t^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right) \eta\left(t - \frac{|x|}{a}\right), \quad \beta = \frac{R}{2L}, \quad a^2 = \frac{1}{LC}.$

6.51. $G(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t} - ht}.$ **6.52.** $u(x, t) = \frac{Q}{2} \sqrt{\frac{R}{\pi C(t - \tau)}} e^{-\frac{RC(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}}.$

6.53. $u(x, t) = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{R}{\pi C(t - \tau)}} e^{-\frac{RC(x - \xi)^2}{4(t - \tau)}} - \frac{G}{C}(t - \tau).$

6.54. $G(x, t) = \frac{q}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt} - ht}.$ **6.55.** $u(r, t) = \frac{Q e^{-\frac{r^2}{4Dt} - \alpha t}}{8(\pi D t)^{\frac{3}{2}}}.$

6.56. $G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{(x - v_0 t)^2}{4Dt}}.$ Указание. Сделать замену $\xi = x - v_0 t$.

6.57. $u(x, t) = \frac{a^2 Q}{k_2 S_0} \begin{cases} \frac{2a_1 k_2}{a_1 k_2 + a_2 k_1} \cdot \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{x}{a_1} - \frac{\xi}{a_2}\right)^2}, \\ \frac{a_1 k_2 - a_2 k_1}{a_1 k_2 + a_2 k_1} \cdot \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x + \xi)^2}{4a_2^2 t}} + \frac{1}{2a_2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a_2^2 t}}, \end{cases}$

где 1-я строка соответствует $x \leq 0, \xi \geq 0$, 2-ая — $x > 0, \xi \geq 0$. При $\xi < 0$ решение получается заменами: $\xi \rightarrow -\xi, x \rightarrow -x, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$. Указание. Применить преобразование Лапласа.

6.58. $u(x, t) = Q \sqrt{\frac{R_2}{C_2}} \begin{cases} \frac{\sqrt{C_2 R_1}}{\sqrt{C_1 R_2 + C_2 R_1}} e^{-\frac{1}{4t} \left(\frac{\xi}{a_2} - \frac{x}{a_1}\right)^2}, & x < 0, \\ \frac{e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a_2^2 t}}}{2\sqrt{\pi t}} - \frac{\sqrt{C_2 R_1}}{\sqrt{C_1 R_2 + C_2 R_1}} \frac{e^{-\frac{(x + \xi)^2}{4a_2^2 t}}}{2\sqrt{\pi t}}, & 0 < x, \end{cases}$

где $\xi > 0$. Если $\xi < 0$, то в полученных выражениях надо сделать замены: $x \rightarrow -x, \xi \rightarrow -\xi, 1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1$.

Указание. Применить функцию Грина задачи 6.57.

6.59.

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{Q}{\rho C S} \left[G_1(x, \xi, t) + \frac{C \rho S}{C_0} e^{\alpha^2 t + \frac{\alpha}{a} |x + \xi|} \mathcal{E} r f \left(\frac{|x + \xi|}{2a\sqrt{t}} + \alpha\sqrt{t} \right) \right], \\ \frac{Q}{C_0} e^{\alpha^2 t + \frac{\alpha}{a} |x - \xi|} \mathcal{E} r f \left(\frac{|x - \xi|}{2a\sqrt{t}} + \alpha\sqrt{t} \right), \end{cases} \quad (6.61)$$

где 1-я строка соответствует $x\xi \geq 0$, 2-ая — $x\xi \leq 0$,

$$G_1(x, \xi, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x + \xi)^2}{4a^2 t}} \right), \quad \alpha = \frac{2kS}{aC_0}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{6.60.} \quad u(x, t) = \frac{Q}{S} \begin{cases} G_2(x, \xi, t) - h e^{2h|\xi+x|+4Dh^2t} \mathcal{E}rf\left(\frac{|x+\xi|}{2\sqrt{Dt}} + 2h\sqrt{Dt}\right), & x\xi \leq 0 \\ h e^{2h|x-\xi|+4Dh^2t} \mathcal{E}rf\left(\frac{|x-\xi|}{2\sqrt{Dt}} + 2h\sqrt{Dt}\right), & x\xi \geq 0, \end{cases} \\ G_2(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4Dt}} \right). \end{aligned}$$

6.61.

$$u(r, t) = \frac{Q_0}{4\pi k t} I_0 \left(\frac{r r'}{2a^2 t} \right) e^{-\frac{r^2 + r'^2}{4a^2 t}}. \quad (6.62)$$

Указание. См. задачу 3.195.

6.62.

$$u(r, z, t) = \frac{Q}{C\rho} \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3} I_0 \left(\frac{r r'}{2a^2 t} \right) e^{-\frac{r^2 + r'^2 + z^2}{4a^2 t}}. \quad (6.63)$$

Указание. Применить преобразования Фурье и Ганкеля.

6.64, 6.65, 6.66, $n(r, t) = Q_0 \frac{e^{-\frac{r^2}{4vDt} - \Sigma_c v t}}{(4\pi D v t)^{\frac{n}{2}}}$, где $n = 1, 2, 3$ соответственно.

6.67, 6.68, 6.69, $q(r, t) = \frac{Q_0 \varphi(u) e^{-\frac{r^2}{4\tau(u) t}}}{(4\pi \tau(u) t)^{\frac{n}{2}}}$, где $n = 1, 2, 3$ соответственно, функция $\varphi(u)$ имеет вид (1.63), τ и u связаны соотношением (1.64). Если $n = 3$, то $r^2(u) = 6\tau(u)$. Указание. Средний квадрат

$$\overline{r^2(u)} = \int_0^\infty w(r, u) r^2 dr,$$

где $w(r, u) dr$ — вероятность того, что нейтрон приобретет летаргию u в сферическом слое $(r, r + dr)$, равная $w(r, u) dr = \frac{q(r, u) 4\pi r^2 dr}{\int_0^\infty q(r, u) 4\pi r^2 dr}$.

6.70. $G(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{im}{2\pi\hbar t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{\frac{imr^2}{2\hbar t}}.$

6.71. $u(x, t) = \frac{Q|x|}{2kS} \left[\psi\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t}}\right) - \psi\left(\frac{|x|}{2\sqrt{t-t_0}}\right) \eta(t-t_0) \right],$ где

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi} e^{-\xi^2} - \mathcal{E}rf\xi. \quad (6.64)$$

6.72. $u(x, t) = \frac{a^2 Q}{4kl} \left(erf \frac{l+x}{2a\sqrt{t}} + erf \frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right).$

6.73. $u(x, t) = \frac{q_0 a^2 t}{2k} \left[\psi\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right) + \psi\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right) \right], \quad \psi(\xi) = erf\xi + 2\xi \left(\frac{1}{\pi} e^{-\xi^2} - |\xi| erf|\xi| \right).$

6.74. $u(x, t) = \frac{q_0 |x|}{2k} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left[\psi\left(\frac{\sqrt{\alpha}|x|}{\sqrt{1+4a^2\alpha t}}\right) - \psi(\sqrt{\alpha}|x|) \right], \quad \psi(\xi)$ имеет вид (6.64).

6.75. $u(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{4\pi k r} \left[\mathcal{E}rf\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right) - \eta(t-t_0) \mathcal{E}rf\left(\frac{r}{2a\sqrt{t-t_0}}\right) \right].$

6.76. $u(x, t) = \frac{Q}{4S\sqrt{Dh}} \left[e^{-|x|\sqrt{\frac{h}{D}}} \mathcal{E}rf\left(\frac{|x|}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{ht}\right) - e^{|x|\sqrt{\frac{h}{D}}} \mathcal{E}rf\left(\frac{|x|}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{ht}\right) \right].$

Указание. Решение выражается через интеграл

$$I(\beta) = \int_y^\infty e^{-\alpha^2 \xi^2 - \frac{\beta^2}{\xi^2}} d\xi, \quad \alpha > 0, \beta \geq 0.$$

Функция $I(\beta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$I'(\beta) + 2\alpha I(\beta) = 2e^{2\alpha\beta} \mathcal{Erf} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right),$$

которое получается дифференцированием интеграла $I(\beta)$ по параметру β с последующей заменой $\alpha\xi - \frac{\beta}{\xi} = t$ и начальному условию $I(0) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{Erf}(\alpha y)$. Отсюда

$$\int_y^\infty e^{-\alpha^2 \xi^2 - \frac{\beta^2}{\xi^2}} d\xi = \frac{1}{2\alpha} \left[e^{2\alpha\beta} \mathcal{Erf} \left(\alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + e^{-2\alpha\beta} \mathcal{Erf} \left(\alpha y - \frac{\beta}{y} \right) \right]. \quad (6.65)$$

6.77. $u(r, t) = tv(x, t) - v(x, t - t_0)\eta(t - t_0)$, где

$$v(x, t) = \frac{Q_0 a e^{\alpha t}}{4Sk\sqrt{h+\alpha}} \left[e^{-\frac{\sqrt{h+\alpha}|x|}{a}} \mathcal{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{(h+\alpha)t} \right) + e^{\frac{\sqrt{h+\alpha}|x|}{a}} \mathcal{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{(h+\alpha)t} \right) \right].$$

6.78. $u(r, t) = tv(x, t, h) + \frac{\partial v(x, t, h)}{\partial h} - [tv(x, t - t_0, h) + \frac{\partial v(x, t - t_0, h)}{\partial h}]$, где

$$v(x, t) = \frac{Q_0 a}{4Sk t_0 \sqrt{h}} \left[e^{-\frac{\sqrt{h}|x|}{a}} \mathcal{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{ht} \right) - e^{\frac{\sqrt{h}|x|}{a}} \mathcal{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{ht} \right) \right].$$

6.79. $u(r, t) = \frac{Q}{8\pi D r} \left[e^{\sqrt{\frac{x}{D}} r} \mathcal{Erf} \left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{\alpha t} \right) + e^{-\sqrt{\frac{x}{D}} r} \mathcal{Erf} \left(\frac{r}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{\alpha t} \right) \right]$.

Указание. Решение выражается через интеграл (6.65).

$$\begin{aligned} \textbf{6.80. } u(x, t) = \frac{Q_0}{2C\rho v_0} e^{-\frac{v_0(x-v_0 t)}{2a^2}} & \left[e^{-\frac{v_0|x-v_0 t|}{2a^2}} \mathcal{Erf} \left(\frac{|x-v_0 t|}{2a\sqrt{t}} - \frac{v_0\sqrt{t}}{2a} \right) - \right. \\ & \left. - e^{\frac{v_0|x-v_0 t|}{2a^2}} \mathcal{Erf} \left(\frac{|x-v_0 t|}{2a\sqrt{t}} + \frac{v_0\sqrt{t}}{2a} \right) \right]. \end{aligned}$$

Указание. Применить (6.65).

$$\textbf{6.81. } u(r, t) = \frac{Q}{8klr_0^2 \pi t} \int_0^{r_0} I_0 \left(\frac{rr'}{2a^2 t} \right) e^{-\frac{r^2+r'^2}{4a^2 t}} r' dr' \left(\operatorname{erf} \frac{l+z}{2a\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{l-z}{2a\sqrt{t}} \right).$$

Указание. Функция Грина определена выражением (6.63), где $Q = C\rho$.

$$\textbf{6.82. } 1) u(0, t) = \frac{u_0 l}{2a\sqrt{t}} e^{\frac{l^2}{4a^2 t}} \mathcal{Erf} \frac{l}{2a\sqrt{t}}; \quad 2) u(0, t) = \frac{u_0 l \sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \operatorname{erf} \frac{a\sqrt{t}}{l}.$$

$$\textbf{6.83. } q(0, t) = -\frac{kl u_0}{2\sqrt{\pi} a^2 t} e^{\frac{l^2}{4a^2 t}} \mathcal{Erf} \frac{l}{2a\sqrt{t}}.$$

$$\textbf{6.84. } 1) u(0, t) = \frac{u_0 l}{2a\sqrt{t}} e^{\frac{l^2}{4a^2 t}} \mathcal{Erf} \frac{l}{2a\sqrt{t}}; \quad 2) u(0, t) = \frac{u_0 l \sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}} \operatorname{erf} \frac{a\sqrt{t}}{l}.$$

$$\textbf{6.85. } q(0, t) = -\frac{kl u_0}{2a^2 \sqrt{\pi} t} e^{\frac{l^2}{4a^2 t}} \mathcal{Erf} \frac{l}{2a\sqrt{t}}.$$

$$\textbf{6.86. } u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{l+x}{2a\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

$$6.87. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{l}\right) \operatorname{erf} \frac{l+x}{2a\sqrt{t}} + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \operatorname{erf} \frac{l-x}{2a\sqrt{t}} - \frac{2x}{l} \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - \right. \\ \left. - \frac{l}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(l+x)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(l-x)^2}{4a^2t}} - 2e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \right) \right].$$

$$6.88. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{2} e^{\alpha^2 a^2 t} \left[e^{\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + e^{-\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right]; \\ u(x, t) = \frac{u_0 ch \frac{\alpha x}{\sqrt{\pi t}}}{\alpha a \sqrt{\pi t}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$6.89. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+4\alpha a^2 t}} e^{-\frac{\alpha x^2}{1+4\alpha a^2 t}}.$$

$$6.90. \quad u(x, t) = \frac{Ax}{(1+4\alpha a^2 t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\alpha x^2}{1+4\alpha a^2 t}}; \quad u(x, t) = \frac{Ax}{(4\alpha a^2 t)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$6.91. \quad u(x, t) = u_0 \sin \beta x e^{-\beta^2 a^2 t}. \quad 6.92. \quad u(x, t) = u_0 \frac{e^{-\frac{\alpha x^2 + \beta^2 a^2 t}{1+4\alpha a^2 t}}}{\sqrt{1+4\alpha a^2 t}} \cos \frac{\beta x}{1+4\alpha a^2 t}.$$

$$6.93. \quad u(x, t) = \left[\frac{u_1+u_2}{2} + \frac{u_2-u_1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] e^{-ht}.$$

$$6.94. \quad u(x, t) = u_0(1 - e^{-ht}) + u_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) e^{-ht}.$$

$$6.95. \quad u(x, t) = u_0 (1 - e^{-ht}) \eta(x) - \frac{u_0}{4} \left[e^{\frac{\sqrt{h}|x|}{a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{ht} \right) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\sqrt{h}|x|}{a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{ht} \right) - 2e^{-ht} \operatorname{Erf} \frac{|x|}{2a\sqrt{t}} \right] \operatorname{sign} x.$$

6.96. Если $\alpha \neq \sqrt{h}$, то

$$u(x, t) = \frac{hu_0}{h-\alpha^2 a^2} \left\{ e^{-\alpha|x|} - \frac{1}{2} e^{-(h-\alpha^2 a^2)t} \left[e^{\alpha|x|} \operatorname{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} + \frac{|x|}{2a\sqrt{t}} \right) + \right. \right. \\ \left. + e^{-\alpha|x|} \operatorname{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} - \frac{|x|}{2a\sqrt{t}} \right) \right] + \frac{\alpha a}{2\sqrt{h}} \left[e^{\frac{\sqrt{h}|x|}{a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{ht} \right) + \right. \\ \left. + e^{-\frac{\sqrt{h}|x|}{a}} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{ht} \right) \right] \right\}.$$

Если $\alpha a = \sqrt{h}$, то

$$u(x, t) = \frac{u_0}{4} \left[\left(1 + \alpha|x| \right) e^{-\alpha|x|} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} - \alpha a \sqrt{t} \right) - \right. \\ \left. - \left(1 - \alpha|x| \right) e^{\alpha|x|} \operatorname{Erf} \left(\frac{|x|}{2a\sqrt{t}} - \alpha a \sqrt{t} \right) \right] - \frac{\alpha a u_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 a^2 t - \frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

$$6.97. \quad u(x, t) = \frac{hu_0}{h+\alpha^2 a^2} \left[1 - e^{-(h+\alpha^2 a^2)t} \right] \sin \alpha x, \quad \alpha^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_j^2, \quad \alpha x = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$

$$6.98. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{1+\alpha} \begin{cases} 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}} \right), & x \leq 0, \\ 1 + \alpha \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}} \right), & x \geq 0, \quad \alpha = \frac{k_1 a_2}{k_2 a_1}. \end{cases}$$

Указание. Применить функцию Грина задачи (6.57).

$$6.99. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{2} \operatorname{Erf} \left(\frac{x-v_0 t}{2\sqrt{Dt}} \right). \quad \text{Указание. Функция Грина дана в ответе к}$$

задаче 6.56.

6.100. $u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+4\alpha Dt}} e^{-\frac{\alpha(x-v_0t)^2}{1+4\alpha Dt}}$. Указание. Функция Грина дана в ответе к задаче 6.56.

6.101. $u(0, t) = \frac{u_0}{k_1 a_2 + k_2 a_1} \left[k_1 a_2 e^{\alpha^2 a_1^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha a_1 \sqrt{t}) + k_2 a_1 e^{\alpha^2 a_2^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha a_2 \sqrt{t}) \right];$
 $u(0, t) = u_0 \frac{k_1 a_2^2 + k_2 a_1^2}{k_1 a_2 + k_2 a_1} \cdot \frac{1}{\alpha a_1 a_2 \sqrt{\pi t}} + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right), \quad t \rightarrow \infty.$

Указание. Функция Грина дана в ответе к задаче 6.57, где $Q = \frac{C_1 \rho_1}{S_0}$ при $\xi < 0$, $Q = \frac{C_2 \rho_2}{S_0}$ при $\xi \geq 0$.

6.102. 1) $u(0, t) = u_0(1 - e^{\alpha^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{t}))$, $\alpha = \frac{2kS}{aC_0}$,

$$\frac{u(0, t)}{u_0} = 2\alpha \sqrt{\frac{t}{\pi}} - \alpha^2 t + O(t^{\frac{3}{2}}), \quad t \rightarrow 0,$$

$$\frac{u(0, t)}{u_0} = 1 - \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}} + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right), \quad t \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \frac{u(0, t)}{u_0} = \frac{1}{2} \left[1 + e^{\alpha^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha \sqrt{t}) \right],$$

$$\frac{u(0, t)}{u_0} = 1 - \alpha \sqrt{\frac{t}{\pi}} + O(t), \quad t \rightarrow 0,$$

$$\frac{u(0, t)}{u_0} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi t}} + O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Указание. Функция Грина имеет вид (6.61) при $Q = C\rho$.

6.103. 1) $u(x, y, t) = \frac{Axy}{(1+4\alpha a^2 t)^3} e^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{1+4\alpha a^2 t}}$; 2) $u(x, y, t) = \frac{u_0}{1+4\alpha a^2 t} e^{-\frac{\alpha(x^2+y^2)}{1+4\alpha a^2 t}}$;

$$3) \quad u(x, y, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+4\beta^2 a^4 t^2}} \sin \frac{\beta xy}{1+4\beta^2 a^4 t^2} e^{-\frac{\beta^2 a^2 (x^2+y^2)t}{1+4\beta^2 a^4 t^2}}.$$

6.104. $u(x, t) = 1 + 4\alpha a^2 t \frac{u_0 e^{-\frac{(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i)^2}{1+4\alpha a^2 t}}}{\sqrt{1+4\alpha a^2 t}}$, $\alpha^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$. Указание.

Перенести начало координат в точку x и повернуть систему координат так, чтобы одна из новых осей была коллинеарна вектору α .

6.105. $u(0, t) = u_0 \left(1 - e^{-\frac{r_0^2}{4a^2 t}} \right)$. Указание. Функция Грина имеет вид

(6.62) при $Q = C\rho$. **6.106.** $u(0, t) = u_0 [1 - \alpha a \sqrt{\pi t} e^{\alpha^2 a^2 t} \operatorname{Erf}(\alpha a t)]$;

$$u(0, t) = \frac{u_0}{2\alpha^2 a^2 t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

Указание. См. предыдущую задачу.

6.107. 1) $u(r, t) = u_0 \frac{e^{-\frac{\alpha r^2}{1+4\alpha a^2 t}}}{(1+4\alpha a^2 t)^3} [r^2 + 4a^2 t(1+4\alpha a^2 t)]$;

$$2) \quad u(r, t) = u_0 \frac{e^{-\frac{4\alpha^2 a^2 r^2 t}{1+16\alpha^2 a^4 t^2}}}{\sqrt{1+16\alpha^2 a^4 t^2}} \cos\left(\frac{\alpha r^2}{1+16\alpha^2 a^4 t^2} + \delta\right), \quad tg \delta = 4\alpha a^2 t;$$

$$3) \quad u(r, t) = \frac{u_0}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{r^2}{8a^2 t}} \left[I_0\left(\frac{r^2}{8a^2 t}\right) - \frac{e^{-\frac{\alpha r^2}{2(1+4\alpha a^2 t)}}}{\sqrt{1+4\alpha a^2 t}} I_0\left(\frac{r^2}{8a^2 t(1+4\alpha a^2 t)}\right) \right].$$

Указание к п.2. Воспользоваться формулой

$$\int_0^\infty I_0(\xi) e^{-\gamma \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{\frac{1}{8\gamma}} I_0\left(\frac{1}{8\gamma}\right), \quad \gamma > 0.$$

Для ее доказательства $I_0(\xi)$ представить в интегральной форме, проинтегрировать по ξ и снова воспользоваться интегральным представлением.

$$6.109. \quad u(x, y, z, t) = \frac{u_0}{(1+4\alpha a^2 t)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\alpha r^2}{1+4\alpha a^2 t}}.$$

$$6.110. \quad 1) \quad u(x, y, z, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n x}{2n+1} e^{-(\beta^2 + \gamma_n^2) a^2 t} \times \frac{\cos \beta y e^{-\frac{\alpha z^2}{1+4\alpha a^2 t}}}{\sqrt{1+4\alpha a^2 t}}, \quad \gamma_n = \frac{\pi(2n+1)}{l};$$

$$2) \quad u(x, y, z, t) = \frac{u_0 \cos \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\beta y z}{1+4\beta^2 a^4 t^2}}{\sqrt{1+4\beta^2 a^4 t^2}} e^{-\frac{\beta^2 a^2 (y^2 + z^2) t}{1+4\beta^2 a^4 t^2}}.$$

$$6.111. \quad u(x, y, z, t) = \frac{8u_0 e^{-ht}}{\pi^2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2l_1} \cos \frac{\pi(2n+1)y}{2l_2} e^{-\lambda_{mn} a^2 t}}{(2m+1)(2n+1)} \operatorname{erf} \frac{z}{2a\sqrt{t}},$$

$$\lambda_{mn} = \frac{\pi^2}{4} \left[\frac{(2m+1)^2}{l_1^2} + \frac{(2n+1)^2}{l_2^2} \right].$$

$$6.112. \quad u(r, z, t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \left(\operatorname{erf} \frac{l+z}{2a\sqrt{t}} + \operatorname{erf} \frac{l-z}{2a\sqrt{t}} \right).$$

6.113.

$$1) \quad G_1(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) - G(x + \xi, t); \quad (6.66)$$

$$2) \quad G_2(x, \xi, t) = G(x - \xi, t) + G(x + \xi, t). \quad (6.67)$$

$G(x, t)$ определена формулой (6.13) при $n = 1$.

$$6.114. \quad u(x, t) = \frac{Q}{C} e^{-ht} G_1(x, x_0, t), \quad a^2 = \frac{1}{RC}, \quad h = \frac{G}{C}, \quad G_1(x, \xi, t) \text{ имеет вид (6.66).}$$

6.115.

$$u(r, t) = \frac{1}{8\pi a r r' \sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(r+r')^2}{4a^2 t}} \right]. \quad (6.68)$$

$$6.116. \quad u(r, t) = \frac{Q}{c\rho} G(r, r', t),$$

$$G(r, r', t) = \frac{1}{8\pi a r r' \sqrt{\pi t}} \left(e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(r+r'-2r_0)^2}{4a^2 t}} \right). \quad (6.69)$$

Указание. Замены $u(r, t) = v(r, t)/r$, $r - r_0 = \xi$ приводят к задаче для уравнения теплопроводности на полупрямой ($\xi > 0$) с нулевым граничным условием. 6.117. $G_1(x, \xi, t)$ имеет вид (6.66).

6.118. $\tilde{G}(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(x, \xi, t) G_1(y, \eta, t) G_1(z, \zeta, t)$, где $G_1(x, \xi, t)$ определена выражением (6.66).

$$6.119. \quad 1) \quad G_1(x, \xi, t) = \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi) X_n(x) e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 x;$$

$$2) \quad G_1(x, \xi, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} [G(x - \xi + 2nl, t) - G(x + \xi + 2nl, t)],$$

где функция $G(x, t)$ определена формулой (6.13) при $n = 1$.

$$\mathbf{6.120.} \quad 1) \quad G_2(x, \xi, t) = \frac{2}{t} \sum_{n=0}^{\infty} X_n(\xi) X_n(x) e^{-a^2 \lambda_n t}, \quad X_n(x) = \cos \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l} \right)^2 x;$$

$$2) \quad G_2(x, \xi, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n [G(x - \xi + 2nl, t) + G(x + \xi + 2nl, t)],$$

где функция $G(x, t)$ определена формулой (6.13) при $n = 1$.

$$\mathbf{6.121.} \quad q(x, y, z, \tau) = \frac{Q_0 \varphi(u) e^{-\frac{x^2+y^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{\frac{3}{2}}} \left[e^{-\frac{(z-a)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(z+a)^2}{4\tau}} \right], \quad \text{функция } \tau = \tau(u)$$

определена соотношением (1.64), $\varphi(u)$ имеет вид (1.146).

$$\mathbf{6.122.} \quad q(r, \tau) = \frac{Q_0 \varphi(u)}{8rr'\sqrt{\pi\tau}} \left[e^{-\frac{(r-r')^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(r+r')^2}{4\tau}} \right], \quad \text{где функция } \tau = \tau(u)$$

определена соотношением (1.64), $\varphi(u)$ имеет вид (1.146).

6.123. $u(x, t) = \frac{Q}{S} e^{-\beta t} G(x, \xi, t)$, где $G(x, \xi, t)$, функция Грина, определенная формулой (6.15), в которой $a^2 = D$.

$$\mathbf{6.124.} \quad G(x, \xi, t) = \frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}}{2a\sqrt{\pi t}} + \frac{k}{a^2 C_0} e^{\frac{k}{a^2 C_0}(x+\xi) + \frac{k^2 t}{a^2 C_0^2}} \mathcal{Erf} \left(\frac{x+\xi}{2a\sqrt{t}} + \frac{k\sqrt{t}}{aC_0} \right),$$

функция $G(x, \xi, t)$ имеет вид (6.15) при $h = \frac{kS}{a^2 C_0}$.

$$\mathbf{6.125.} \quad q(t) = q_0 e^{\frac{Ct}{C_0^2 R}} \mathcal{Erf} \left(\frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{Ct}{R}} \right).$$

$$\mathbf{6.126.} \quad q(t) = q_0 e^{\frac{Cx_0}{C_0} + \frac{Ct}{C_0^2 R}} \mathcal{Erf} \left(\frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{CR}{t}} + \frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{Ct}{R}} \right);$$

$$q(t) = \frac{2q_0}{x_0} \sqrt{\frac{t}{RC}} e^{-\frac{RCx_0^2}{4t}} (1 + O(t)), \quad t \rightarrow 0,$$

$$q(t) = C_0 \sqrt{\frac{R}{\pi Ct}} (1 + O(\frac{1}{t})), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$\mathbf{6.127.} \quad i(0, t) = \frac{q_0}{R_0} \sqrt{\frac{R}{C}} e^{-\frac{C}{R}} \left[\frac{e^{-\frac{RCx_0^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{R}{C}} e^{\frac{Rx_0}{R_0} + \frac{Rt}{R_0^2 C}} \mathcal{Erf} \left(\frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{Rt}{C}} + \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) \right].$$

6.128.

$$u(r, t) = \frac{Q}{c\rho} G(r, r', t), \quad G(r, r', t) = \frac{1}{8\pi a r r' \sqrt{\pi t}} \left[e^{-\frac{(r-r')^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(r+r'-2r_0)^2}{4a^2 t}} - \right. \\ \left. - 2b e^{b(r+r'-2r_0) + b^2 a^2 t} \mathcal{Erf} \left(\frac{r+r'-2r_0}{2a\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right) \right], \quad (6.70)$$

1. $b = \frac{1}{r_0}$; 2. $b = \frac{1}{r_0} + h$. Указание. Замены $u(r, t) = v(r, t)/r$, $r - r_0 = \xi$ приводят к смешанной задаче на полупрямой ($\xi > 0$).

$$\mathbf{6.129.} \quad 1) u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right];$$

$$2) u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right];$$

$$3) u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$\mathbf{6.130.} \quad 1) u(x, t) = \frac{u_0}{2} e^{\alpha^2 a^2 t} \left[e^{-\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right];$$

$$2) u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{1+4\alpha a^2 t}} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t(1+4\alpha a^2 t)}} \right) e^{-\frac{\alpha x^2}{1+4\alpha a^2 t}}.$$

$$\mathbf{6.131.} \quad 1) u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{l+x}{2\sqrt{Dt}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{l-x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right];$$

$$2) u(x, t) = \frac{u_0}{2} e^{\alpha^2 Dt} \left[e^{\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha \sqrt{Dt} + \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) + e^{-\alpha x} \operatorname{Erf} \left(\alpha \sqrt{Dt} - \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right].$$

$$\mathbf{6.132.} \quad u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{l+x}{2\sqrt{Dt}} \right) + \operatorname{Erf} \left(\frac{l-x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right].$$

$$\mathbf{6.133.} \quad u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$\mathbf{6.134.} \quad u(r, z, t) = \frac{q_0}{2ak\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r^2+z^2}{4a^2\tau}}}{t\sqrt{\tau}} d\tau \int_0^{r_0} I_0 \left(\frac{rr'}{2a^2\tau} \right) e^{-\frac{r'^2}{4a^2\tau}} r' dr'. \quad \text{Указание.}$$

Функция Грина получается методом продолжений и равна сумме влияний двух мгновенных точечных источников: $G(r, r', z - z', t) + G(r, r', z + z', t)$,

где $G(r, r', z, t)$ имеет вид (6.63) при $Q = C\rho$. **6.135.** В цилиндрической системе координат с началом в центре кольца температура полупространства

$$u(r, z) = \frac{Q}{4\pi ak\pi\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{r_0^2+r^2+z^2}{4a^2\tau}}}{\tau\sqrt{\tau}} I_0 \left(\frac{rr_0}{2a^2\tau} \right) d\tau. \quad u(0, z) = \frac{Q}{4\pi k\sqrt{r_0^2+z^2}} \operatorname{Erf} \frac{\sqrt{r_0^2+z^2}}{2a\sqrt{t}}.$$

$$\mathbf{6.136.} \quad 1) u(r, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{r+r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2t}} \right) \right];$$

$$2) u(r, t) = \frac{Ae^{-\frac{\alpha r^2}{\beta^2}}}{\beta^3 r} \left[\left(\frac{r^2}{\beta^2} + 2a^2 t \right) \operatorname{erf} \left(\frac{r}{2\beta a\sqrt{t}} \right) + \frac{2a}{\beta} \sqrt{\frac{t}{\pi}} r e^{-\frac{r^2}{4\beta^2 a^2 t}} \right],$$

где $\beta = \sqrt{1+4\alpha a^2 t}$. Указание. Воспользоваться функцией Грина (6.68).

$$\mathbf{6.137.} \quad u(r, t) = \frac{3a^2 Q}{8\pi k r_0^3} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{r+r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - \frac{2a}{r} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(e^{-\frac{(r+r_0)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(r-r_0)^2}{4a^2t}} \right) \right].$$

$$\text{определена соотношением (1.64). } \mathbf{6.139.} \quad u(r, t) = u_0 \left[1 - \frac{r_0}{r} \operatorname{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

Указание. Функция Грина определена выражением (6.69).

$$6.140. \quad u(r, t) = \frac{u_0 r_0}{2r} e^{\alpha^2 a^2 t} \left[e^{-\alpha(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} - \frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{\alpha(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} + \frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$u(r, t) = \frac{u_0 r_0 (r-r_0)}{2\alpha^2 a^3 t \sqrt{\pi t} r} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$u(r, t) = \frac{u_0 r_0}{r} e^{-\alpha(r-r_0) + \alpha^2 a^2 t} + O\left(\frac{e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}}{r}\right), \quad t \rightarrow \infty.$$

$$6.141. \quad u(r, t) = \frac{u_0 r_0}{2r} \left[e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\sqrt{\alpha t} - \frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} \right) - e^{\sqrt{\frac{\alpha}{D}}(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\sqrt{\alpha t} + \frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} \right) \right].$$

Указание. Функция Грина равна $e^{-\alpha t} G(r, r', t)$, $G(r, r', t)$ имеет вид (6.69).

$$6.142. \quad u(r, t) = \frac{Q}{r\alpha^2 r} \left\{ e^{-\alpha r_0} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{-\alpha r} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} e^{-\alpha r_0 + \alpha^2 a^2 t} \left[e^{-\alpha(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} - \frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{\alpha(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} + \frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \right\}.$$

Указание. Функция Грина определена выражением (6.69).

$$6.143. \quad u(r, t) = u_1 + (u_0 - u_1) e^{-ht} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \\ - \frac{u_1}{2} \left[e^{\frac{\sqrt{h}x}{a}} \mathcal{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \sqrt{ht} \right) + e^{-\frac{\sqrt{h}x}{a}} \mathcal{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \sqrt{ht} \right) \right].$$

$$6.144. \quad u_{1,2}(x, t) = \frac{Q_0}{2kS} \left[|x - x_0| \Psi \left(\frac{|x - x_0|}{2a\sqrt{t}} \right) \mp (x + x_0) \Psi \left(\frac{x + x_0}{2a\sqrt{t}} \right) \right],$$

функция $\Psi(\xi)$ определена выражением (6.64).

$$6.145. \quad u(x, t) = \frac{q_0}{2\alpha^2 k} e^{\alpha^2 a^2 t} \left[e^{\alpha x} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{-\alpha x} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} - \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] + \frac{q_0}{\alpha^2 k} \left(\mathcal{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - e^{-\alpha x} \right).$$

$$6.146. \quad u(x, y, t) = u_0 \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} \operatorname{erf} \frac{y}{2a\sqrt{t}}. \quad 6.147. \quad u(y, z, t) = u_0 \operatorname{erf} \frac{y}{2a\sqrt{t}} \operatorname{erf} \frac{z}{2a\sqrt{t}}.$$

$$6.148. \quad q(t) = Q \left[\mathcal{Erf} \left(\frac{x_0}{2\sqrt{Dt}} \right) - e^{hx_0 + h^2 Dt} \mathcal{Erf} \left(\frac{x_0}{2\sqrt{Dt}} + h\sqrt{Dt} \right) \right];$$

$$q(t) = Q \left[1 - (x_0 + \frac{1}{h}) \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}} \right] + O\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

$$6.149. \quad u(r, t) = u_0 \left\{ 1 - \frac{r_0}{br} \left[\mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{b^2 a^2 t + b(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} + ba\sqrt{t} \right) \right] \right\},$$

$b = \frac{1}{r_0} + h$. Указание. Функция Грина имеет вид (6.69), где $b = \frac{1}{r_0} + h$.

$$6.150. \quad 1) \quad u(x, t) = u_0 \left[1 - e^{hx + h^2 a^2 t} \mathcal{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t} \right) \right], \quad h = \frac{kS}{a^2 C_0};$$

$$2) \quad u(0, t) = 2\alpha u_0 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[1 - \alpha \sqrt{\pi t} e^{\alpha^2 t} \mathcal{Erf}(\alpha \sqrt{t}) \right];$$

$$u(0, t) \frac{u_0}{\alpha \sqrt{\pi t}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad t \rightarrow \infty. \quad \text{Указание. См. задачу 6.124.}$$

$$6.151. \quad u(x, t) = u_0 e^{\alpha^2 a^2 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{r_0}\right) e^{-\left(\frac{\mu_n a}{r_0}\right)^2 t}}{\mu_n J_1(\mu_n)} \times \\ \times \left[e^{-\alpha z} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} - \frac{z}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{\alpha z} \mathcal{Erf} \left(\alpha a \sqrt{t} + \frac{z}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$6.152. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x \mu(\tau) e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau. \quad 6.153. \quad u(x, t) = u_0 \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

$$6.154. \quad H(z, t) = H_0 \operatorname{Erf} \left(\frac{z}{\sqrt{\frac{\pi \mu_0}{t}}} \right).$$

$$6.155. \quad P^2(x, t) = P_1^2 + (P_0^2 - P_1^2) \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}}, \quad a^2 = \frac{kP_0}{\mu} \left[m + \frac{abRT}{(1+aP_0)^2} \right]^{-1}.$$

$$6.156. \quad u(x, t) = u_0 \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \eta(t - t_0) \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t-t_0}} \right) \right].$$

$$6.157. \quad u(x, t) = A \left(t + \frac{x^2}{2a^2} \right) \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) - \frac{Ax}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

$$6.158. \quad u(x, t) = -\frac{\partial v(x, t, \beta)}{\partial \beta} + \frac{\partial v(x, t-t_0, \beta)}{\partial \beta} \eta(t-t_0), \quad \text{где } v(x, t, \beta) = \\ = \frac{x e^{\alpha t}}{4a\sqrt{\alpha}} \left(e^{-2\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\alpha t} \right) - e^{2\sqrt{\alpha\beta}} \operatorname{Erf} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} + \sqrt{\alpha t} \right) \right], \quad \beta = \frac{x}{2a}.$$

$$6.159. \quad 1) u(x, t) = \frac{q_0 x}{D} \psi \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right);$$

$$2) u(x, t) = \frac{q_0 x}{D} \left[\psi \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) - \eta(t-t_0) \psi \left(\frac{x}{2\sqrt{D(t-t_0)}} \right) \right],$$

где $\psi(\xi)$ определена выражением (6.64).

6.160. $u(x, t) = a^2 h \int_0^t \mu(\tau) \tilde{G}(x, 0, t - \tau) d\tau$, функция $\tilde{G}(x, \xi, t)$ определена выражением (6.15). В частном случае

$$u(x, t) = A \left(t + \frac{x^2}{4a^2} + \frac{x}{a^2 h} + \frac{1}{a^2 h^2} \right) \operatorname{Erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - A \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left(\frac{x}{a} + \frac{2}{ah} \right) e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} - \\ - \frac{A}{a^2 h^2} e^{a^2 h^2 t + h x} \operatorname{Erf} \left(ah\sqrt{t} + \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

$$6.161. \quad u(x, t) = \frac{E_0}{2} \left[e^{\sqrt{RC}x} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) + \right. \\ \left. + e^{-\sqrt{RC}x} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} - \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) \right].$$

$$6.162. \quad u(x, t) = E_0 \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} \right) - e^{\frac{Rx}{R_0} + \frac{Rt}{R_0^2 C}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{RC}{t}} + \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{Gt}{C}} \right) \right].$$

$$6.163. \quad u(r, t) = \frac{u_0 r_0}{r} \operatorname{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right), \quad r \geq r_0.$$

$$6.164. \quad u(r, t) = \frac{Ar_0}{r} \left\{ \left[t + \frac{(r-r_0)^2}{2a^2} \right] \operatorname{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - \frac{r-r_0}{a} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{r-r_0}{4a^2t}} \right\}.$$

Указание. Функция Грина определена формулой (6.64).

$$6.165. \quad u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\operatorname{Erf} \left(\frac{x-v_0 t}{2a\sqrt{t}} - \frac{v_0 \sqrt{t}}{2a} \right) + e^{\frac{v_0(x-v_0 t)}{a^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x-v_0 t}{2a\sqrt{t}} + \frac{v_0 \sqrt{t}}{2a} \right) \right].$$

$$6.166. \quad P^2(x, t) = P_1^2 + \frac{1}{2}(P_0^2 - P_1^2) \left[1 + \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - e^{-\frac{V_0(x-2V_0 t)}{a^2}} \operatorname{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \frac{V_0 \sqrt{t}}{a} \right) \right],$$

$$a^2 = \frac{kP_0}{\mu} \left[m + \frac{abRT}{(1+aP_0)^2} \right]^{-1}.$$

$$\mathbf{6.167.} \quad u(x, t) = u_0 \left[\mathcal{Erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) - e^{hx+h^2Dt} \mathcal{Erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}} + h\sqrt{Dt} \right) \right].$$

$$\mathbf{6.168.} \quad u(r, t) = \frac{q_0 r_0^2}{kr} \left[\mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} \right) - e^{\frac{r-r_0}{r_0} + \frac{a^2 t}{r_0^2}} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2a\sqrt{t}} + \frac{a\sqrt{t}}{r_0} \right) \right].$$

Указание. Функция Грина имеет вид (6.70), где $b = \frac{1}{r_0}$.

6.169. Если $\alpha r_0^2 \neq D$, то

$$u(r, t) = \frac{q_0 r_0^2}{2Dr} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}(r-r_0)}}{\sqrt{\frac{\alpha}{D}+1}} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{\alpha t} \right) - \right. \\ \left. - \frac{e\sqrt{\frac{\alpha}{D}}(r-r_0)}{\sqrt{\frac{\alpha}{D}-1}} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{\alpha t} \right) + \frac{2e^{\frac{r-r_0}{r_0} + \left(\frac{D}{r_0^2} - \alpha\right)t}}{\frac{\alpha r_0^2}{D} - 1} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} + b\sqrt{Dt} \right) \right].$$

Если $\alpha r_0^2 = D$, то

$$u(r, t) = \frac{q_0 r_0^2}{2Dr} \left[\frac{1}{2} e^{-\frac{r-r_0}{r_0}} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} - \frac{\sqrt{Dt}}{r_0} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{2} + \frac{r-r_0}{r_0} + \frac{2Dt}{r_0^2} \right) e^{\frac{r-r_0}{r_0}} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} + \frac{\sqrt{Dt}}{r_0} \right) \right].$$

Указание. Функция Грина определена формулой (6.70) при $b = \frac{1}{r_0}$.

6.170. Если $\alpha \neq b^2 D$, где $b = \frac{1}{r_0} + h$, то

$$u(r, t) = \frac{u_0 h r_0}{2r} \left[\frac{e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{D}}(r-r_0)}}{\sqrt{\frac{\alpha}{D}+b}} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} - \sqrt{\alpha t} \right) - \right. \\ \left. - \frac{e\sqrt{\frac{\alpha}{D}}(r-r_0)}{\sqrt{\frac{\alpha}{D}-b}} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} + \sqrt{\alpha t} \right) + \frac{2b e^{b(r-r_0) + (b^2 D - \alpha)t}}{\frac{\alpha}{D} - b^2} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} + b\sqrt{Dt} \right) \right].$$

Если $\alpha = b^2 D$, то

$$u(r, t) = \frac{u_0 h r_0}{2r} \left\{ \frac{1}{2} e^{-b(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} - b\sqrt{Dt} \right) - \right. \\ \left. - \left[\frac{1}{2} + b(r-r_0) + 2b^2 Dt \right] e^{b(r-r_0)} \mathcal{Erf} \left(\frac{r-r_0}{2\sqrt{Dt}} + b\sqrt{Dt} \right) \right\}.$$

Указание. Функция Грина имеет вид (6.69), где $b = \frac{1}{r_0} + h$.

$$\mathbf{6.171.} \quad u(x, y, z, t) = u_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{y}{2a\sqrt{t}} \right) \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a\sqrt{t}} \right) \right].$$

$$\mathbf{6.172.} \quad P^2(x, y, t) = P_1^2 + (P_0^2 - P_1^2) \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} \operatorname{erf} \frac{y}{2a\sqrt{t}}, \quad a^2 = \frac{kP_0}{\mu} \left[m + \frac{abRT}{(1+aP_0)x} \right]^{-1}.$$

$$\mathbf{6.173.} \quad P^2(x, y, t) = P_1^2 + \frac{1}{2} (P_0^2 - P_1^2) \operatorname{erf} \frac{y}{2a\sqrt{t}} \times \\ \times \left[1 + \operatorname{erf} \frac{x}{2a\sqrt{t}} - e^{-\frac{V_0(x-2V_0t)}{a^2}} \mathcal{Erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} - \frac{V_0\sqrt{t}}{a} \right) \right],$$

$$\text{где } a^2 = \frac{kP_0}{\mu} \left[m + \frac{abRT}{(1+aP_0)x} \right]^{-1}. \quad \mathbf{6.174.} \quad u(x, y, z, t) = u_0 \sin(\alpha x + \beta y) \times \\ \times \left[ch \gamma z - \frac{1}{2} e^{\gamma z} \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a\sqrt{t}} + \gamma a\sqrt{t} \right) - e^{-\gamma z} \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a\sqrt{t}} - \gamma a\sqrt{t} \right) \right],$$

$$\text{где } \gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad \mathbf{6.175.} \quad u(x, y, z, t) = \frac{u_0}{2} \sin \alpha y \left[2ch \alpha x - \right.$$

$$-e^{\alpha x} \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + \alpha a\sqrt{t} \right) - e^{-\alpha x} \operatorname{erf} \left(x \frac{x}{2a\sqrt{t}} - \alpha a\sqrt{t} \right) \Big].$$

$$\mathbf{6.176.} \quad q(t) = \frac{k}{a\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\mu(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad \mathbf{6.177.} \quad u(x, 0) = u_0 \cos \frac{\alpha}{a} x.$$

$$\mathbf{6.178.} \quad u(x, 0) = \frac{qa}{k\alpha} \sin \frac{\alpha}{a} x. \quad \mathbf{6.179.} \quad G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{1}{r_{MP_1}} \right),$$

$$M = (x, y), \quad P = (\xi, \eta), \quad P_1 = (\xi, -\eta), \quad y \geq 0, \quad \eta \geq 0.$$

$$\mathbf{6.180.} \quad G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} - \ln \frac{1}{r_{MP_1}} - \ln \frac{1}{r_{MP_2}} + \ln \frac{1}{r_{MP_3}} \right), \quad M = (x, y),$$

$$P = (\xi, \eta), \quad P_1 = (\xi, -\eta), \quad P_2 = (-\xi, \eta), \quad P_3 = (-\xi, -\eta), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0.$$

$$\mathbf{6.181.} \quad G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi + \psi)}{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi - \psi)}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{n}.$$

Указание. Применить формулу: $z^n - r^n e^{in\varphi} = \prod_{m=0}^{n-1} \left[z - r e^{i[\varphi + \frac{2\pi m}{n}]} \right]$.

$$\mathbf{6.182.} \quad G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{r_{MP'}}{r_{MP}} - \ln \frac{r_{MP'_1}}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \varphi), \quad P = (\rho, \psi),$$

$$P' = (\rho, -\psi), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \psi \right), \quad P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, -\psi \right), \quad r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

$$\mathbf{6.183.} \quad G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{1}{4\pi} \left(\ln \frac{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi + \psi)}{r^{2n} + \rho^{2n} - 2r^n \rho^n \cos n(\varphi - \psi)} - \right.$$

$$\left. - \ln \frac{r^{2n} + \rho_1^{2n} - 2r^n \rho_1^n \cos n(\varphi + \psi)}{r^{2n} + \rho_1^{2n} - 2r^n \rho_1^n \cos n(\varphi - \psi)} \right), \quad r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{n}, \quad \rho_1 = \frac{r_0^2}{\rho}.$$

$$\mathbf{6.184.} \quad G(M, P) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{r_{MP'}}{r_{MP}} - \ln \frac{r_{MP'_1}}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \varphi), \quad P = (\rho, \psi),$$

$$P' = (\rho, -\psi), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \psi \right), \quad P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, -\psi \right), \quad r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi.$$

$$\mathbf{6.185.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (x, y, z), \quad P = (\xi, \eta, \zeta), \quad P_1 = (\xi, \eta, -\zeta),$$

$$z \geq 0, \quad \zeta \geq 0. \quad \mathbf{6.186.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP_1}} - \frac{1}{r_{MP_2}} + \frac{1}{r_{MP_3}} \right), \quad M = (x, y, z),$$

$$P = (\xi, \eta, \zeta), \quad P_1 = (\xi, -\eta, \zeta), \quad P_2 = (-\xi, \eta, \zeta), \quad P_3 = (-\xi, -\eta, \zeta), \quad x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

$$\xi \geq 0, \quad \eta \geq 0. \quad \mathbf{6.187.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{r_{MP_k}} - \frac{1}{r_{MQ_k}} \right), \quad M(r, \varphi, z)$$

$$P_k = (\rho, \frac{2k\pi}{n} + \psi, \zeta), \quad Q_k = (\rho, \frac{2k\pi}{n} - \psi, \zeta), \quad r \geq 0, \quad \rho \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{n}.$$

$$\mathbf{6.188.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{r_{MP_k}} - \frac{1}{r_{MP'_k}} \right), \quad M = (x, y, z), \quad P_1 = (\xi, \eta, \zeta),$$

$$P_2 = (-\xi, -\eta, \zeta), \quad P_3 = (-\xi, \eta, -\zeta), \quad P_4 = (\xi, \eta, -\zeta), \quad P'_k(\mathbf{r}) = P_k(-\mathbf{r}),$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0, \quad \xi \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad \zeta \geq 0. \quad \mathbf{6.189.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right),$$

$$M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right), \quad r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0.$$

$$\mathbf{6.190.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP'}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} + \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP'_1}} \right), \quad M = (r, \theta, \varphi),$$

$$P = (\rho, \theta', \varphi'), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right), \quad P' = (\rho, \pi - \theta', \varphi'), \quad P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \pi - \theta', \varphi' \right),$$

$$r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta' \leq \frac{\pi}{2}. \quad \mathbf{6.191.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} \right),$$

$$M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi' \right), \quad r \geq r_0, \quad \rho \geq r_0.$$

$$\mathbf{6.192.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{1}{r_{MP'}} - \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP_1}} + \frac{r_0}{\rho} \frac{1}{r_{MP'_1}} \right),$$

$$M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (\rho, \theta', \varphi'), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \theta', \varphi'\right), \quad P' = (\rho, \pi - \theta', \varphi'),$$

$$P'_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \pi - \theta', \varphi'\right), \quad r \geq r_0, \quad \rho \geq r_0, \quad \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \theta' \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{6.193.} \quad G(M, P) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{r_{MP_k}} - \frac{1}{r_{MQ_k}} \right),$$

$$M = (x, y, z), \quad P_k = (\xi, \eta, \zeta + 2kl), \quad Q_k = (\xi, \eta, -\zeta + 2kl), \quad 0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq \zeta \leq l.$$

$$\mathbf{6.194.} \quad u(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi k} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta}} - \frac{r_0}{d} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \theta}} \right), \quad d_1 = \frac{r_0^2}{d}.$$

$$\mathbf{6.195.} \quad u(r, \theta) = q \left[\ln \frac{1}{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi} - \ln \frac{1}{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \varphi} \right] + C, \quad d_1 = \frac{r_0^2}{d}.$$

$$\mathbf{6.196.} \quad u(x, y) = p \frac{4y(x^2 + y^2 - h^2)}{(x^2 + y^2 + h^2)^2 - 4y^2 h^2}.$$

$$\mathbf{6.197.} \quad u(x, y, z) = Px \left[\frac{1}{(x^2 + y^2 + (z-h)^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + (z+h)^2)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

$$\mathbf{6.198.} \quad u(r, \varphi) = 2p \left(\frac{r \cos \varphi - d}{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi} + \frac{r}{d} \cdot \frac{r - d_1 \cos \varphi}{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \varphi} \right), \quad d_1 = \frac{r_0^2}{d}.$$

$$\mathbf{6.199.} \quad u(r, \theta) = P \left[\frac{r \cos \theta - d}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r_0 r}{d^2} \cdot \frac{r - d_1 \cos \theta}{(r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right], \quad d_1 = \frac{r_0^2}{d}.$$

$$\mathbf{6.200.} \quad Q' = -\frac{r_0}{d} Q. \quad \mathbf{6.201.} \quad Q' = -\frac{2r_0 q}{\ln} \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d}.$$

$$\mathbf{6.202.} \quad 1) Q' = -\frac{\pi r_0}{d} Q; \quad 2) Q' = -\frac{2r_0}{d} Q. \quad \mathbf{6.203.} \quad Q' = -\frac{r_0}{\sqrt{d^2 + r_1^2}} Q.$$

$$\mathbf{6.204.} \quad Q' = -\frac{2Qr_0}{r_1^2} (\sqrt{d^2 + r_1^2} - d^2).$$

$$\mathbf{6.205.} \quad G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi \varepsilon_1} \left(\frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), & z \geq 0, \quad \zeta \geq 0, \\ \frac{1}{4\pi \varepsilon_2} \frac{1}{r_{MP}}, & z \leq 0, \quad \zeta \geq 0 \end{cases}$$

$$r_{MP} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad r_{MP_1} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}.$$

Функция Грина при $\zeta \leq 0$ получается заменами $z \rightarrow -z$, $\zeta \rightarrow -\zeta$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 1$.

$$\mathbf{6.206.} \quad G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{1}{r_{MP_1}} \right), & y \geq 0, \quad \eta \geq 0, \\ \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{1}{r_{MP}}, & y \leq 0, \quad \eta \geq 0. \end{cases}$$

$$r_{MP} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad r_{MP_1} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}. \quad \text{Функция Грина}$$

при $\eta \leq 0$ получается заменами $y \rightarrow -y$, $\eta \rightarrow -\eta$, $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 \rightarrow \varepsilon_1$.

$$\mathbf{6.207.} \quad G(r, \rho) = \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{r_0}{\rho r_{MP_1}} \right), & r \leq r_0, \quad \rho \leq r_0, \\ \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{r_0}{r} \right), & r \geq r_0, \quad \rho \leq r_0, \\ \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \ln \frac{1}{r_{MP}}, & r \leq r_0, \quad \rho \geq r_0, \\ \frac{1}{\varepsilon_2} \left(\ln \frac{1}{r_{MP}} + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} \ln \frac{r}{\rho r_{MP_1}} \right), & r \geq r_0, \quad \rho \geq r_0, \end{cases}$$

$$M = (r, \varphi), \quad P = (\rho, \psi), \quad P_1 = \left(\frac{r_0^2}{\rho}, \psi\right). \quad \mathbf{6.208.} \quad u(x, y) = \frac{4q}{\varepsilon + 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C.$$

$$\mathbf{6.209.} \quad u(x, y, z) = \frac{2pz}{(\varepsilon + 1)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad \mathbf{6.210.} \quad A(r, \theta) = \frac{2\mu_1 \mu_2 \sin \theta}{c(\mu_1 + \mu_2)r^3} \mathbf{e}_\varphi.$$

$$\mathbf{6.211.} \quad \mathbf{F} = \frac{Q^2}{4d^2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \mathbf{e}_d. \quad \mathbf{6.212.} \quad \mathbf{F} = \frac{q^2}{d} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \mathbf{e}_d. \quad \mathbf{6.213.} \quad \mathbf{F} = 2q^2 \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \frac{\mathbf{d}}{r_0^2 - d^2}.$$

$$\mathbf{6.214.} \quad \mathbf{F} = \frac{2q^2}{d^2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{r_0^2 \mathbf{d}}{d^2 - r_0^2}. \quad \mathbf{6.215.} \quad \mathbf{F} = \frac{2J^2}{c^2} \frac{\mu-1}{\mu+1} \frac{\mathbf{d}}{r_0^2 - d^2}. \quad \mathbf{6.216.} \quad \mathbf{F} = \frac{2J^2}{c^2} \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{r_0^2 \mathbf{d}}{d^2 - r_0^2}.$$

$$\mathbf{6.217.} \quad \sigma(x, y) = -\frac{Qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad Q' = -Q. \quad \mathbf{6.218.} \quad \sigma(x) = -\frac{qd}{\pi(x^2 + d^2)}, \quad q' = -q.$$

$$\mathbf{6.219.} \quad 1) \quad \sigma(x, y) = -\frac{Qy_0}{2\pi} \{[(x-x_0)^2 + y_0^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} - [(x+x_0)^2 + y_0^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}}\},$$

$$Q_x = -\frac{2Q}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0},$$

$$2) \quad \sigma(x, y) = -\frac{Qx_0}{2\pi} \{[x_0^2 + (y-y_0)^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}} - [x_0^2 + (y+y_0)^2 + z^2]^{-\frac{3}{2}}\},$$

$$Q_y = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}.$$

$$\mathbf{6.220.} \quad \sigma(\varphi) = -\frac{q}{2\pi r_0} \cdot \frac{d^2 - r_0^2}{d^2 + r_0^2 - 2r_0 d \cos \varphi}, \quad q' = -q, \quad \mathbf{p} = -q \frac{r_0^2}{d^2} \mathbf{d}.$$

$$\mathbf{6.221.} \quad \sigma(\theta) = -\frac{Q}{4\pi r_0} \cdot \frac{|r_0^2 - d^2|}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}, \quad 1) \quad Q' = -Q, \quad \mathbf{P}' = -Q\mathbf{d};$$

$$2) \quad Q' = -\frac{r_0}{d} Q, \quad \mathbf{P}' = -Q \frac{r_0^2}{d^3} \mathbf{d}.$$

$$\mathbf{6.222.} \quad \sigma(\varphi) = -\frac{2qd}{\pi} \cdot \frac{(r_0^2 - d^2) \sin \varphi}{(r_0^2 + d^2)^2 - 4r_0^2 d^2 \sin^2 \varphi}, \quad \sigma(r) = -\frac{qd}{\pi} \cdot \frac{(r_0^2 - d^2)(r_0^2 - r^2)}{(r^2 + d^2)(r_0^4 + r^2 d^2)}.$$

$$\mathbf{6.223.} \quad \sigma(\varphi) = -\frac{2qd}{\pi} \cdot \frac{(d^2 - r_0^2) \cos \varphi}{(r_0^2 + d^2)^2 - 4r_0^2 d^2 \cos^2 \varphi}, \quad \sigma(r) = -\frac{qd}{\pi} \cdot \frac{(d^2 - r_0^2)(r^2 - r_0^2)}{(r_0^2 + d^2)(r_0^4 + r^2 d^2)}.$$

$$\mathbf{6.224.} \quad 1) \quad \sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2 + l^2}}; \quad 2) \quad \sigma(x, y) = -\frac{ql}{2\pi(y^2 + l^2)} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + l^2}}\right).$$

$$\mathbf{6.225.} \quad 1) \quad \sigma(x) = -\frac{2pdx}{\pi(x^2 + d^2)^2}; \quad 2) \quad \sigma(x) = \frac{p(x^2 - d^2)}{\pi(x^2 + d^2)^2}.$$

$$\mathbf{6.226.} \quad 1) \quad \sigma(x) = \frac{3Pdx}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{5}{2}}}; \quad 2) \quad \sigma(x) = \frac{P(x^2 + y^2 - 2d^2)}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\mathbf{6.227.} \quad \sigma(\varphi) = p \frac{(d^2 + r_0^2) \cos \varphi - 2dr_0}{\pi(d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \varphi)^2}, \quad q' = 0, \quad \mathbf{p}' = \frac{r_0^2}{d^2} \mathbf{p}.$$

$$\mathbf{6.228.} \quad \sigma(\varphi) = -p \frac{(r_0^2 - d^2) \sin \varphi}{\pi(d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \varphi)^2}, \quad q' = 0, \quad \mathbf{p}' = -\mathbf{p}.$$

$$\mathbf{6.229.} \quad \sigma(\theta) = -P \frac{d^3 - 5dr_0^2 + r_0(3r_0^2 + d^2) \cos \theta}{4\pi r_0(d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \theta)^{\frac{5}{2}}}, \quad Q' = 0, \quad \mathbf{P}' = -\mathbf{P}.$$

$$\mathbf{6.230.} \quad \sigma(\theta, \varphi) = -\frac{3P|r_0^2 - d^2| \sin \theta \cos \varphi}{4\pi(r_0^2 + d^2 - 2dr_0 \cos \theta)^{\frac{5}{2}}}, \quad 1) \quad Q' = 0, \quad \mathbf{P}' = -\mathbf{P};$$

$$2) \quad Q' = 0, \quad \mathbf{P}' = -\frac{r_0^3}{d^3} \mathbf{P}. \quad \mathbf{6.231.} \quad 1) \quad \mathbf{F} = -\frac{3P^2(\varepsilon-1)}{8d^4(\varepsilon+1)} \mathbf{e}_z. \quad 2) \quad \mathbf{F} = -\frac{3P^2(\varepsilon-1)}{16d^4(\varepsilon+1)} \mathbf{e}_z.$$

$$\mathbf{6.232.} \quad \mathbf{F} = \frac{p^2(\varepsilon-1)}{2d^3(\varepsilon+1)} \mathbf{e}_y, \text{ где вектор } \mathbf{e}_y \text{ перпендикулярен к плоскости } z = 0.$$

$$\mathbf{6.233.} \quad \mathbf{F} = \frac{4p^2(\varepsilon-1)dr_0^2}{(\varepsilon+1)(r_0^2 - d^2)^3} \mathbf{e}_d. \quad \mathbf{6.234.} \quad \mathbf{F} = \frac{4p^2(\varepsilon-1)dr_0^2}{(\varepsilon+1)(d^2 - r_0^2)^3} \mathbf{e}_d.$$

$$\mathbf{6.235.} \quad u(x, y) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x^2 + y^2 - l^2}{2ly}. \quad \mathbf{6.236.} \quad u(x, y) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{l^2 + x^2 - y^2}{2lx}.$$

$$\mathbf{6.237.} \quad u(r, \varphi) = \frac{u_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^n - l^n \cos n\varphi}{l^n \sin n\varphi}. \quad \mathbf{6.238.} \quad u(x, y) = u_0(e^{-y} \sin x - e^{-x} \sin y).$$

$$\mathbf{6.240.} \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)f(\psi)d\psi}{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos(\varphi - \psi)}.$$

$$1) \quad u(r, \varphi) = \frac{3u_0}{4} \left(1 + \frac{3r^4}{r_0^4} \cos 4\varphi\right); \quad 2) \quad u(r, \varphi) = \frac{u_0}{4} \left(3\frac{r}{r_0} \sin \varphi - \frac{r^3}{r_0^3} \sin 3\varphi\right).$$

$$\mathbf{6.241.} \quad u(r, \varphi) = \frac{(16r_0^2 - r^2)u_0}{15(16r_0^2 + r^2 + 8r_0r \cos \varphi)}. \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - r_0^2)f(\psi)d\psi}{r^2 + r_0^2 - 2r_0r \cos(\varphi - \psi)}.$$

$$1) u(r, \varphi) = \frac{u_0 r_0}{16r} \left(2 \cos \varphi - \frac{r_0^2}{r^2} \cos 3\varphi - \frac{r_0^4}{r^4} \cos 5\varphi \right); \quad 2) u(r, \varphi) = u_0 \frac{r_0^n}{r^n} \sin(n\varphi + \alpha).$$

$$\mathbf{6.242.} \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r^2 - r_0^2)f(\psi) d\psi}{r_0^2 + r^2 - 3r_0r \cos(\varphi - \psi)}$$

$$1) u(r, \varphi) = \frac{u_0 r_0}{16} \left(2 \cos \varphi - \frac{r_0^2}{r^2} \cos 3\varphi - \frac{r_0^4}{r^4} \cos 5\varphi \right); \quad 2) u(r, \varphi) = u_0 \frac{r_0^n}{r^n} \sin(n\varphi + \alpha).$$

$$\mathbf{6.243.} \quad u(r, \varphi) = \frac{2u_0 r_0 r \sin \varphi}{r_0^2 + 49r^2 + 14r_0 r \cos \varphi}.$$

$$\mathbf{6.244.} \quad u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zf(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$u(x, y, z) = \frac{u_0}{4} + \frac{u_0}{2\pi} \left(\arctg \frac{x}{z} + \arctg \frac{y}{z} + \arctg \frac{xy}{z\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

$$\mathbf{6.245.} \quad u(x, y, z) = \frac{2u_0}{\pi} \arctg \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \quad \mathbf{6.246.} \quad u(x, y, z) = u_0 e^{-z\sqrt{x^2 + y^2}} \sin xy.$$

$$\mathbf{6.247.} \quad q(x, y) = -\frac{q_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{(l_1 - x)^2 + y^2 + l_2^2} - x + l_1}{\sqrt{(l_1 + x)^2 + y^2 + l_2^2} - x - l_1}.$$

$$\mathbf{6.248.} \quad u(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \left(u_1 \arctg \frac{yz}{xr} + u_2 \arctg \frac{zx}{yr} + u_3 \arctg \frac{xy}{zr} \right), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\mathbf{6.249.} \quad u(r, \theta, \varphi) = \frac{r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(r_0^2 - r^2)f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(r_0^2 + r^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi'); \quad u(r, \theta, \varphi) = u_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \sin^n \theta \cos n\varphi.$$

$$\mathbf{6.250.} \quad u(r, \theta, \varphi) = \frac{r_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(r^2 - r_0^2)f(\theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi'}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \gamma)^{\frac{3}{2}}}, \quad \cos \gamma \text{ тот же, что и}$$

в ответе к предыдущей задаче; $u(r, \theta, \varphi) = u_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \sin^n \theta \sin n\varphi.$

$$\mathbf{6.251.} \quad u(r, \theta, \varphi) = u_0 \frac{r_0}{r} + \frac{Q}{4\pi k} \left(\frac{1}{r_{MP}} - \frac{r_0}{d} \frac{1}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (r, \theta, \varphi), \quad P = (d, 0, 0),$$

$$P_1 = \left(\frac{r_0^2}{d}, 0, 0 \right). \quad \mathbf{6.252.} \quad \sigma(\theta, \varphi) = \frac{Q_0}{4\pi r_0^2} + \frac{Q}{4\pi dr_0} \left[1 - d \frac{d^2 - r_0^2}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

$$\mathbf{6.253.} \quad G(M, P) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kr_{MP}); \quad G(M, P) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kr_{MP}); \quad M = (x, y),$$

$$P = (\xi, \eta). \quad \mathbf{6.254.} \quad G_1(M, P) = G(M, P) - G(M, P_1), \quad M = (x, y), \quad P = (\xi, \eta),$$

$$P_1 = (\xi, -\eta). \quad \text{Функция } G(M, P) \text{ приведена в ответе к предыдущей задаче.}$$

$$\mathbf{6.255.} \quad G_1(M, P) = G(M, P) \mp G(M, P_1), \quad M = (x, y, z), \quad P = (\xi, \eta, \zeta),$$

$$P_1 = (\xi, \eta, -\zeta), \quad \text{где } G(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} e^{-ikr_{MP}} \text{ или } G(M, P) = \frac{1}{4\pi r_{MP}} e^{ikr_{MP}}.$$

$$\mathbf{6.256.} \quad u(r) = \frac{Q}{4\pi Dr} e^{-kr}. \quad \mathbf{6.257.} \quad u(r) = \frac{q}{2\pi D} K_0(kr).$$

$$\mathbf{6.258.} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{Q_0}{4\pi D} \left(\frac{e^{-kr_{MP}}}{r_{MP}} + \frac{e^{-kr_{MP_1}}}{r_{MP_1}} \right), \quad M = (x, y, z), \quad P = (0, 0, d),$$

$$P_1 = (0, 0, -d). \quad \mathbf{6.259.} \quad u(\mathbf{r}) = \frac{q}{2\pi D} [K_0(kr_{MP}) + K_0(kr_{MP_1})], \quad M = (x, y),$$

$P = (0, d)$, $P_1 = (0, -d)$. **6.260.** $\Phi(x) = \frac{Q_0 L}{2D} e^{-\frac{|x|}{L}}$.

6.261. $\Phi(r) = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0\left(\frac{r}{L}\right)$. **6.262.** $\Phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi D r} e^{-\frac{r}{L}}$; $\overline{r^2} = 6L^2$, где L — длина диффузии (см. задачу 1.166). Диффузионное приближение применимо на больших расстояниях от источника: $r \gg \frac{1}{\Sigma_c}$. Указание. Средний квадрат

$$\overline{r^2} = \int_{\mathbf{R}^3} w(r) r^2 dr,$$

где $w(r) dr$ — вероятность того, что нейтрон поглотится в элементе объема dr , равная отношению числа нейтронов, поглощенных в элементе dr за единицу времени к полному числу нейтронов, поглощенных во всем пространстве за единицу времени: $w(r) dr = \frac{\Sigma_c \Phi(r) dr}{Q_0}$. В диффузионном приближении

$$\left| \frac{1}{\Sigma_c \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right| = \frac{1}{L \Sigma_c} + \frac{1}{r \Sigma_c} \ll 1$$

6.263. $\Phi(r) = \frac{Q_0 L}{8\pi D r r'} \left(e^{-\frac{|r-r'|}{L}} - e^{-\frac{r+r'}{L}} \right).$

6.264. $\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q_0}{2\pi D} \left(\frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}{L}}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} - \frac{e^{-\frac{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|}{L}}}{|\mathbf{r}+\mathbf{r}_0|} \right).$

6.265. $\Phi(x, y) = \frac{Q_0}{2\pi D} \left[K_0 \left(\frac{\sqrt{x^2 + (y-a)^2}}{L} \right) - K_0 \left(\frac{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}}{L} \right) \right].$

6.266. $G(x, \xi) = \begin{cases} (1 - \frac{1}{\xi})(\frac{2}{x} - 1), & 1 \leq x \leq \xi, \\ (1 - \frac{1}{\xi})(\frac{2}{x} - 1), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$

6.267. $G(x, \xi) = \frac{1}{2} \begin{cases} \ln \frac{1+x}{1-x}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \ln \frac{1+\xi}{1-\xi}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$

6.268. $G(x, \xi) = \frac{1}{3} \begin{cases} \left[1 - tg \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cdot \left[2 + tg \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left[1 - tg \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \cdot \left[2 + tg \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right], & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

6.269. $G(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} 1 - \ln tg \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\pi}{8} \right), & -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi, \\ 1 - \ln tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$

6.270. $G(x, \xi) = \frac{1}{3} \begin{cases} 16 - ctg^3 x - 3 ctg x, & \frac{\pi}{4} \leq x \leq \xi, \\ 16 - ctg^3 \xi - 3 ctg \xi, & \xi \leq x \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases}$

6.271. $G(x, \xi) = \frac{e\sqrt{\pi}}{2(1+erf 1)} \begin{cases} [1+erf(x-1)] \cdot [erf 1 - erf(\xi-1)], & 1 \leq x \leq \xi, \\ [1+erf(\xi-1)] \cdot [erf 1 - erf(x-1)], & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$

6.272. $G(x, \xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1+x}{1+\xi}}, & -1 \leq x \leq \xi, \\ \sqrt{\frac{1+\xi}{1+x}}, & \xi \leq x \leq 0. \end{cases}$

6.273. $G(x, \xi) = \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{1-\xi}{1-x}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1-x}{1-\xi}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$

$$\mathbf{6.274.} \quad G(x, \xi) = \frac{1}{6} \begin{cases} \frac{(1+x)^5}{1+\xi}, & -1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{(1+\xi)^5}{1+x}, & \xi \leq x \leq 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.275.} \quad G(x, \xi) = \frac{1}{10\xi^2 x^2} \begin{cases} x^{10} + \frac{7}{3}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \xi^{10} + \frac{7}{3}, & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.276.} \quad G(x, \xi) = \frac{1}{3} \begin{cases} \left(\sqrt{\xi} + \frac{2}{\sqrt{\xi}} \right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) \left(\sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}} \right), & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.277.} \quad G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 + \xi \operatorname{arctg} \xi - \frac{\pi+3}{4}\xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi(1 + x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi+3}{4}x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.278.} \quad G(x, \xi) = \begin{cases} x^2 e^{-\xi}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi^2 e^{-x}, & \xi \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.279.} \quad G(x, \xi) = \begin{cases} x + \xi - \ln \xi - \frac{3}{2}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ x - \ln x + \xi - \frac{3}{2}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.280.} \quad G(x, \xi) = -\frac{1}{2} \begin{cases} \ln(1-x)(1+\xi) + 2\ln 2 - 1, & -1 \leq x \leq \xi, \\ \ln(1+x)(1-\xi) + 2\ln 2 - 1, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.281.} \quad G(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \left[\frac{1}{2} \sin \xi + (\pi - \xi) \cos \xi \right] \sin x - x \cos x \sin \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left[\frac{1}{2} \sin x + (\pi - x) \cos x \right] \sin \xi - \xi \cos \xi \sin x, & \xi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.282.} \quad G(x, \xi) = \frac{2}{\pi} \begin{cases} \left[\frac{1}{2} \sin \xi + \left(\frac{\pi}{2} - \xi \right) \cos \xi \right] \sin x - x \cos x \sin \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left[\frac{1}{2} \sin x + \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos x \right] \sin \xi - \xi \cos \xi \sin x, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.283.} \quad G(x, \xi) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \left[\frac{1}{2} \cos \xi + (\pi - \xi) \sin \xi \right] \cos x + x \sin x \cos \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left[\frac{1}{2} \cos x + (\pi - x) \sin x \right] \cos \xi - \xi \sin \xi \cos x, & \xi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.284.} \quad u(x) = \frac{1}{3} \sqrt{x-1} (\ln(x-1) - \frac{2}{3}). \quad \mathbf{6.285.} \quad u(x) = \frac{1}{10} x^2 (x^2 - 1).$$

$$\mathbf{6.286.} \quad u(x) = \frac{1}{2} x^2 (x - x^{\frac{2}{3}}). \quad \mathbf{6.287.} \quad u(x) = \frac{1}{2} (\cos x - \sin x) (1 + \cos x - \sin x).$$

$$\mathbf{6.288.} \quad u(x) = x \ln x. \quad \mathbf{6.289.} \quad u(x) = -\frac{1}{4} \sin 2x. \quad \mathbf{6.290.} \quad u(x) = x + \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} x - \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{6.291.} \quad u(x) = 2 \operatorname{arctg} e^x - e(x - \ln \operatorname{ch} x) - \frac{\pi}{2}.$$

$$\mathbf{6.292.} \quad u(x) = \frac{1}{2x} (e^{-x^2} - 1) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\operatorname{erf} x - \operatorname{erf} 1). \quad \mathbf{6.293.} \quad u(x) = \frac{\ln(2-x)}{2-x} + \frac{x+1}{2}.$$

$$\mathbf{6.294.} \quad u(x) = \frac{\pi}{4} (\operatorname{erf} x + \operatorname{erf} 1 - e^3 \operatorname{erf}(x+1)). \quad \mathbf{6.295.} \quad u(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} (x - \sin x).$$

$$\mathbf{6.296.} \quad u(x) = \frac{1-x}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{x^2} (\operatorname{erf} x - \operatorname{erf} 1).$$

$$\mathbf{6.297.} \quad u(x) = \lambda \int_1^4 G(x, \xi) \xi^2 u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \frac{1}{5} \begin{cases} \frac{x}{\xi^4}, & 1 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi}{x^4}, & \xi \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$\mathbf{6.298.} \quad u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi^2 u(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} e^{-\xi} (1 - e^{-x}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{-x} (1 - e^{-\xi}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.299. \quad u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{arctg} \frac{\xi}{\sqrt{2}}, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.300. \quad u(x) = \lambda \int_0^\pi G(x, \xi) \xi u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = e^{-(x+y)} \begin{cases} \sin x (\sin \xi + \cos \xi), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \sin \xi (\sin x + \cos x), & \xi \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$6.301. \quad u(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi) \xi^3 u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} -\sin \xi (\sin x + \cos x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ -\sin x (\sin \xi + \cos \xi), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$6.302. \quad u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi e^{4\xi} u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \frac{1}{7} \begin{cases} e^{-6\xi} (e^x - e^{-6x}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{-6x} (e^\xi - e^{-6\xi}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.303. \quad u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) e^{-\xi} u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \frac{1}{6} \begin{cases} e^{-2\xi} (e^{4x} - e^{-2x}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{-2x} (e^{4\xi} - e^{-2\xi}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.304. \quad u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \xi u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = -\frac{1}{7} \begin{cases} x^3 \left(\xi^3 - \frac{1}{\xi^4} \right), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi^3 \left(x^3 - \frac{1}{x^4} \right), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.305. \quad u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) \sqrt{\xi} e^\xi u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} e^{-\xi} sh x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ e^{-x} sh \xi, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.306. \quad u(x) = \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi) \xi^3 \sin^4 \xi u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \begin{cases} ctg \xi + \frac{1}{3} ctg^3 \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ ctg x + \frac{1}{3} ctg^3 x, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$6.307. \quad u(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi) e^{-\xi^2} u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\xi^2 + x^2} \begin{cases} \operatorname{erf} \xi - \operatorname{erf} 1, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \operatorname{erf} x - \operatorname{erf} 1, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.308. \quad u(x) = \lambda \int_{-1}^1 G(x, \xi) e^{\xi^2} u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = \frac{\sqrt{p_1}}{4 \operatorname{erf} 1} \begin{cases} (\operatorname{erf} x + \operatorname{erf} 1) (\operatorname{erf} 1 - \operatorname{erf} \xi), & -1 \leq x \leq \xi, \\ (\operatorname{erf} \xi + \operatorname{erf} 1) (\operatorname{erf} 1 - \operatorname{erf} x), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$6.309. \quad u(x) = \lambda \int_1^e G(x, \xi) \xi u(\xi) d\xi, \\ G(x, \xi) = -\frac{1}{e} \begin{cases} x(e \ln \xi - \xi), & 1 \leq x \leq \xi, \\ \xi(e \ln x - x), & \xi \leq x \leq e. \end{cases}$$

$$6.310. \quad u(x) = \lambda \int_0^4 G(x, \xi) e^\xi u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} x e^{-\xi}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi e^{-x}, & \xi \leq x \leq 4. \end{cases}$$

$$6.311. \quad u(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad G(x, \xi) = \frac{1}{6} \begin{cases} 3\xi x^2 - x^3, & 0 \leq x \leq \xi, \\ 3\xi^2 x - \xi^3, & \xi \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$6.312. \quad u(x) = \lambda \int_0^l G(x, \xi) u(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \frac{1}{6l^3} \begin{cases} (l - \xi)^2 x^2 (3l\xi - 2\xi x - lx), & 0 \leq x \leq \xi, \\ (l - x)^2 \xi^2 (3lx - 2\xi x - l\xi), & \xi \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$6.314. \quad u(x) = (\lambda + \alpha(1 - \alpha)) \int_{-1}^1 G(x, \xi) u(\xi) d\xi, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$G(x, \xi) = -\frac{\pi}{2 \sin \pi \alpha} \begin{cases} F(\alpha, 1 - \alpha, 1, \frac{1+x}{2}) F(\alpha, 1 - \alpha, 1, \frac{1-\xi}{2}), & -1 \leq x \leq \xi, \\ F(\alpha, 1 - \alpha, 1, \frac{1-x}{2}) F(\alpha, 1 - \alpha, 1, \frac{1+\xi}{2}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Указание. Замена $x = 2y - 1$ преобразует уравнение

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' - \alpha(1 - \alpha)u = 0$$

в гипергеометрическое $y(1 - y)u'' + (1 - 2y)u' - \alpha(1 - \alpha)u = 0$.

Ограниченными решениями в точках $x = -1$ и $x = 1$ соответственно будут $u_1(x) = F(\alpha, 1 - \alpha, 1, \frac{1+x}{2})$ и $u_2(x) = F(\alpha, 1 - \alpha, 1, \frac{1-x}{2})$. Для вычисления произведения $(1 - \xi^2)W[u_1, u_2]$ воспользоваться разложением

$$F(\alpha, 1 - \alpha, 1, x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \ln(1 - x) + O(1), \quad x \rightarrow 1 - 0.$$

$$6.315. \quad u(x) = (\lambda + \alpha + 1) \int_0^\infty G(x, \xi) \xi^\alpha e^{-\xi} u^2(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = e^{x+\xi} \begin{cases} \int_\xi^\infty \eta^{-\alpha-1} e^{-\eta} d\eta, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \int_x^\infty \eta^{-\alpha-1} e^{-\eta} d\eta, & \xi \leq x < \infty. \end{cases}$$

Указание. В уравнении $xu'' + (\alpha + 1 - x)u' - \mu u = 0$ заменить $u(x) = e^{kx}v(x)$ и выбрать k и μ так, чтобы коэффициент при v обратился в нуль.

$$6.316. \quad u(x) = (\lambda + 2) \int_{-\infty}^\infty G(x, \xi) e^{-\xi^2} u^2(\xi) d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{x^2 + \xi^2} \begin{cases} \operatorname{erf} \xi (1 + \operatorname{erf} x), & -\infty \leq x \leq \xi, \\ (1 + \operatorname{erf} \xi) \operatorname{erf} x, & \xi \leq x < \infty. \end{cases}$$

Указание. В уравнении $u'' - 2xu' - \mu u = 0$ заменить $u(x) = e^{kx^2}v(x)$ и выбрать k и μ так, чтобы коэффициент при v стал нулем.

6.317. Решение. Пусть $f^- = e^{-ikx} + \varphi$; тогда φ — решение задачи

$$\varphi'' + k^2 \varphi = (e^{-ikx} + \varphi)u, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi = 0.$$

Функция Грина удовлетворяет условиям

$$G'' + k^2 G = -\delta(x - \xi), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} G = 0.$$

Отсюда

$$G(x, \xi) = \begin{cases} 0, & x \leq \xi, \\ \frac{1}{k} \sin k(\xi - x), & \xi \leq x, \end{cases}$$

$$\varphi(x, k) = -\frac{1}{k} \int_{-\infty}^x \sin k(\xi - x) u(\xi) (e^{-ik\xi} + \varphi(\xi, k)) d\xi,$$

что равносильно интегральному уравнению для $f^-(x, k)$.

6.321. Частота собственных колебаний $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l} \mu_n}$, амплитуда колебаний

$u_n(x) = u_n(\xi l) = X_n(\xi)$, где μ_n — характеристическое число, $X_n(\xi)$ — собственная функция уравнения

$$X(x) = \mu \int_0^1 K(x, \xi) X(\xi) d\xi, \quad K(x, \xi) = - \begin{cases} \ln \xi, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \ln x, & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

6.322. Частота собственных колебаний $\omega_n = \sqrt{\mu_n}$, амплитуда колебаний $u_n(x) = \sqrt{K(x)} X_n(x)$, где μ_n — характеристическое число, $X_n(x)$ — собственная функция уравнения с симметричным ядром

$$X_n(x) = \mu \int_0^l K(x, \xi) X_n(\xi) d\xi, \quad K(x, \xi) = \sqrt{K(\xi)K(x)} \begin{cases} \int_0^x \frac{d\eta}{G\eta}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \int_0^\xi \frac{d\eta}{G\eta}, & \xi \leq x \leq l. \end{cases}$$

6.323. $\omega_n = \frac{a}{l^2} \sqrt{\mu_n}$, μ_n — характеристическое число уравнения

$$u(x) = \mu \int_0^1 K(x, \xi) u(\xi) d\xi$$

с ядром

$$\begin{aligned} 1) \quad K(x, \xi) &= \frac{1}{6} \begin{cases} x^2(1-\xi)^2[3\xi - x(1+2\xi)], & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi^2(1-x)^2[3x - \xi(1+2x)], & \xi \leq x \leq 1; \end{cases} \\ 2) \quad K(x, \xi) &= \frac{1}{6} \begin{cases} x^2(3\xi - x), & 0 \leq x \leq \xi, \\ \xi^2(3x - \xi), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

6.324. 1) $1.57076 \leq \frac{l}{a} \omega_1 \leq 1.57647$, $\frac{l}{a} \omega_1 = \frac{\pi}{2} \approx 1.57080$.

$$2) \quad 1.2022 \sqrt{\frac{g}{l}} \leq \omega_1 \leq 1.2154 \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\mu_{01}}{2} \approx 1.2024 \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Решение п.1. Ввиду симметричности ядра (6.52)

$$A_{2m} = \int_0^1 K_{2m}^2(x, x) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 K_m(x, \xi) K_m(\xi, x) d\xi = 2 \int_0^1 dx \int_0^x K_m^2(x, \xi) d\xi.$$

Если $\xi \leq x$, то $K(x, \xi) = \xi$,

$$K_2(x, \xi) = \int_0^1 K(x, t) K(t, x) dt = \int_0^\xi t^2 dt + \int_\xi^x t \xi dt + \int_x^1 x \xi dt = \frac{\xi^3}{6} - \frac{\xi x^2}{2} + \xi x,$$

следовательно,

$$A_2 = 2 \int_0^1 dx \int_0^x \xi^2 d\xi = \frac{1}{6}, \quad A_4 = 2 \int_0^1 dx \int_0^x \left(\frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi x^2}{2} - \xi x \right)^2 d\xi = \frac{17}{630}.$$

Остается применить неравенство (6.53) и соотношение $\omega_1 = \frac{a}{l} \sqrt{\mu_1}$.

6.325. $1.2027 \frac{a}{l} \leq \omega_1 \leq 1.2062 \frac{a}{l}$.

Глава 7

МЕТОД КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Одним из объектов приложения метода конформных отображений является плоское стационарное векторное поле с компонентами $A_x(x, y)$, $A_y(x, y)$, которое трактуется как поле векторов $A = A_x + i A_y$ на комплексной плоскости (z). Этот метод применим для изучения электростатического и магнитостатического полей, магнитного поля постоянных токов, поля скоростей потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости, поля скоростей идеального газа и жидкости в процессе фильтрации, поля стационарных тепловых потоков и других (двумерных) потенциальных векторных полей, математической моделью которых служит краевая задача для уравнения Пуассона в области Ω с граничными условиями 1-го, 2-го, 3-го типов. Применение конформных отображений для решения подобных задач основано на следующем свойстве: тип уравнения и тип граничного условия не меняется при замене переменных, которая определяется аналитической функцией $w(z)$, реализующей конформное отображение области Ω (переход от переменных x, y к переменным ξ, η определяется соотношением $\xi + i\eta = w(x + iy)$, т.е. $\xi = \text{Re } w$, $\eta = \text{Im } w$).

Благодаря этому свойству, краевая задача в данной области преобразуется соответствующим конформным отображением в аналогичную задачу в специальной области, для которой решение уже известно или известен метод построения решения.

Следует выделить физические задачи, в которых рассматриваются плоские поля, обусловленные сосредоточенными (двухмерными) источниками — зарядами, вихрями, диполями и т.п. Соответствующее уравнение Пуассона содержит в правой части δ -функцию и ее производную. Такое уравнение остается инвариантным относительно указанной замены переменных. На этом факте, в частности, основано применение конформных отображений для построения функции Грина задачи Дирихле в ряде плоских областей. Преимущество данного метода по сравнению с методом изображений или методом Фурье состоит в том, что техника построения функции Грина является более простой, а для некоторых областей, таких как угол, полоса и др., эта функция получается в замкнутом виде, а не в форме ряда.

Для описания потенциального поля $A(z)$ в области Ω , при условии $A(z) \in C^1(\Omega)$, употребляется комплексный потенциал $w(z)$. Это аналитическая функция, вещественная (или мнимая) часть которой представляет собой обычный скалярный потенциал поля $A(z)$. При решении краевых задач с помощью конформного отображения в ряде случаев можно избежать фактической замены переменных, обусловленной этим отображением (соответствующая процедура осуществляется неявным образом), если привлечь к решению комплексный потенциал. Более того, применение функции $w(z)$ сводит решение многих краевых задач (например, задачу Дирихле с кусочно-постоянными граничными условиями, задачу Дирихле в эксцентрическом кольце и др.) к построению некоторого конформного отображения. Для определения скалярного потенциала поля A также целесообразно использовать комплексный потенциал, построение которого является более простой задачей, чем решение задачи Дирихле. Кроме того, ряд физических величин — поле A , плотность заряда на

проводнике, сила, действующая на заряд, давление в жидкости и др.— непосредственно выражаются через функцию $w(z)$ (точнее, через $w'(z)$) при этом соответствующие вычисления оказываются значительно проще тех, в которых применяется скалярный потенциал.

Для решения задач применяются конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями; в некоторых случаях следует привлечь интеграл Кристоффеля-Шварца.

Литература к главе: [40], [63], [23], [15].

7.1. Комплексный потенциал; решение задачи Дирихле с кусочно-постоянными граничными условиями

Пример 7.1. 1. Определение и построение комплексного потенциала $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ векторного потенциального поля $A(x, y) = A_x(x, y) + i A_y(x, y)$ без источников в односвязной области $\Omega_z \in R^2$ с границей $\partial\Omega_z = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (рис.7.1), если $A \in C^1(\Omega_z)$, $v|_{\Gamma_1} = v_1$, $v|_{\Gamma_2} = v_2$, где v_1 и v_2 — вещественные константы.

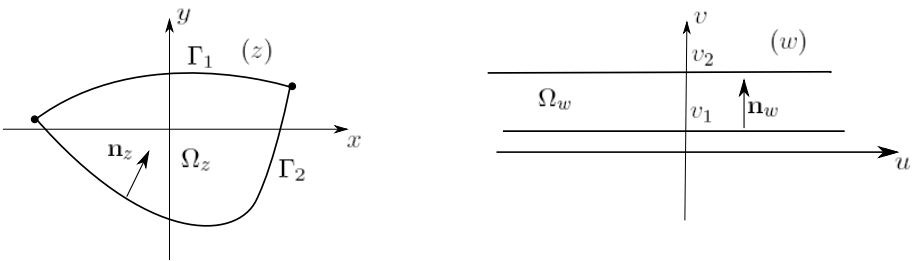


Рис. 7.1

2. Применение комплексного потенциала для определения электростатического поля $E = E_x + i E_y$ в пространстве между параллельными плоскостями $y=0$, $y=H$, потенциалы которых 0 и $v_0\eta(x)$ соответственно.

1. Из условий отсутствия источников и потенциальности поля

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A = 0 &\Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0, \\ \operatorname{rot} A = 0 &\Rightarrow \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

вытекает существование однозначных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, таких, что ¹

$$du = -A_y dx + A_x dy, \quad (7.2)$$

$$dv = -A_x dx - A_y dy. \quad (7.3)$$

Проверка показывает, что u и v — гармонические функции в Ω_z , удовлетворяющие условиям Коши-Римана. Отсюда следует существование однозначной аналитической в области Ω_z функции $w(z) = u + iv$, называемой комплексным потенциалом поля A . Так как

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -A_y - i A_x = -i \bar{A},$$

где черта над A означает операцию комплексного сопряжения, то

$$A = -i \overline{w'}. \quad (7.4)$$

Согласно соотношению (7.3) вектор $A = -\nabla v$, следовательно, уравнения $v(x, y) = C_1$ описывают семейство эквипотенциальных линий поля A . Поскольку $(\nabla u, \nabla v) = u_x v_x + u_y v_y = A_y A_x - A_x A_y = 0$ (применены соотношения (7.2) и (7.3)), то вектор A направлен по касательной к линии $u(x, y) = C_2$; таким образом, $u(x, y) = C_2$ — семейство силовых линий (линий тока) поля A .

Один из способов построения комплексного потенциала состоит в восстановлении аналитической функции $w(z)$ по ее мнимой части $v(x, y)$, которая является решением задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= 0, & (x, y) &\in \Omega_z, \\ v|_{\Gamma_1} &= v_1, & v|_{\Gamma_2} &= v_2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

¹Выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, где $P \in C^1$, $Q \in C^1$, является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Другой способ, не связанный с непосредственным решением задачи (7.5), основан на применении конформных отображений. Пусть $w = u + i v$ — комплексный потенциал. Если точка z принадлежит Γ_1 , то $v = \text{Const}$, т.е. аналитическая в Ω_z функция $w = u + i v$ отображает семейство линий $v(x, y) = C$ плоскости (z) в семейство параллельных прямых $\text{Im } w = C$ на плоскости (w). Следовательно, для построения комплексного потенциала нужно конформно отобразить (см. задачу 7.1) область Ω_z на полосу Ω_w , ограниченную прямыми $\text{Im } w = v_1$ и $\text{Im } w = v_2$, которые являются образами дуг Γ_1 и Γ_2 (рис. 7.1.) Если комплексный потенциал известен, то его мнимая часть $v = \text{Im } w$ — решение задачи Дирихле (7.5).

2. Потенциал электростатического поля является решением задачи Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta v(x, y) &= 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < H, \\ v(x, 0) &= 0, \quad v(x, H) = v_0 \eta(x). \end{aligned}$$

Для построения комплексного потенциала нужно конформно отобразить полосу ($0 < y < H$) в полосу ($0 < \text{Im } w < v_0$) так, чтобы часть границы ($0 < x < \infty, y = H$) перешла в прямую $\text{Im } w = v_0$, а остальная часть — в прямую $\text{Im } w = 0$. Это достигается композицией следующих отображений. Функция $z_1 = \exp(\frac{\pi z}{H})$ трансформирует полосу в полуплоскость $\text{Re } z_1 > 0$, а Γ_2 — в часть $\text{Re } z_1 < -1$ действительной оси. Линейное отображение $z_2 = z_1 + 1$ переводит полуплоскость $\text{Re } z_1 < -1$ в себя, при этом граничные значения 0 и v_0 располагаются соответственно на положительной и отрицательной частях действительной оси комплексной плоскости (z_2). Логарифмическая функция

$$w(z) = \frac{v_0}{\pi} \ln z_2 + C = \frac{v_0}{\pi} \ln \left(1 + e^{\frac{\pi z}{H}} \right) + C, \quad (7.6)$$

где C — вещественная постоянная, завершает построение ком-

плексного потенциала. Отсюда

$$\begin{aligned} v(x, y) = \operatorname{Im} w &= \frac{v_0}{\pi} \arg \left(1 + e^{\frac{\pi x}{H}} \cos \frac{\pi y}{H} + i e^{\frac{\pi x}{H}} \sin \frac{\pi y}{H} \right) = \\ &= \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-\frac{\pi x}{H}} + \cos \frac{\pi y}{H}}{\sin \frac{\pi y}{H}}. \end{aligned}$$

Поле определяется формулой (7.4), в которой $A=E$:

$$E = -i \overline{w'}. \quad (7.7)$$

Следовательно,

$$E = -i \frac{v_0}{H} \cdot \frac{e^{\frac{\pi \bar{z}}{H}}}{1 + e^{\frac{\pi \bar{z}}{H}}} = -\frac{v_0}{2H} \cdot \frac{\sin \frac{\pi y}{H} + i \left(e^{\frac{\pi x}{H}} + \cos \frac{\pi y}{H} \right)}{\cos \frac{\pi x}{H} + \cos \frac{\pi y}{H}}.$$

7.1. Доказать, что существует конформное отображение $w=w(z)$ односвязной области Ω_z (см. пример 7.1) на полосу $v_1 < \operatorname{Im} w < v_2$ (пусть $v_1 < v_2$), и это отображение единственно с точностью до аддитивной вещественной постоянной.

7.2. Найти стационарную температуру клина $0 < \varphi < \alpha$, грань $\varphi=0$ которого поддерживается при температуре v_1 , а грань $\varphi=\alpha$ — при температуре v_2 .

7.3. Определить электростатический потенциал внутри полого цилиндра, радиус которого r_0 , если потенциал поверхности

$$v(r_0, \varphi) = \begin{cases} v_1, & 0 < \varphi < \pi, \\ v_2, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

7.4. Найти стационарную температуру вне бесконечного цилиндра, радиус которого r_0 , если температура поверхности

$$(r_0, \varphi) = \begin{cases} v_1, & 0 < \varphi < \pi, \\ v_2, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

7.5. Определить электростатический потенциал $u(r, \varphi)$ внутри полого цилиндрического проводника, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), если диаметральной плоскостью заряжена до потенциала v_1 , а остальная поверхность — до потенциала v_2 .

7.6. Поперечное сечение длинного цилиндра — область, ограниченная двумя кругами: $(x-r_2)^2 + y^2 \leq r_2^2$, $(x-r_1)^2 + y^2 \geq r_1^2$. Внутренняя поверхность поддерживается при температуре v_1 , внешняя — при v_2 ; температура цилиндра не зависит от времени. Какова форма изотермической поверхности $v = \frac{v_1+v_2}{2}$?

7.7. Определить потенциал $u(r, \varphi)$ электростатического поля внутри полого цилиндрического проводника, поперечное сечение которого изображено на рис.7.2., если плоская часть поверхности имеет потенциал v_1 , а остальная часть — потенциал v_2 .

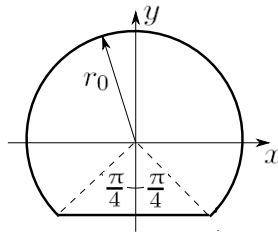


Рис. 7.2

7.8. Определить стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), если диаметральной плоскостью поддерживается при нулевой температуре, а поверхность $r=r_0$ — при температуре $v_0 \eta(\frac{\pi}{2} - \varphi)$.

7.9. Определить стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), если диаметральной плоскостью поддерживается при температуре 0° , а остальная поверхность — при температуре

$$v(r_0, \varphi) = \begin{cases} v_0, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ -v_0, & \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi. \end{cases}$$

7.10. Поперечное сечение полого цилиндра — пересечение двух кругов с центрами $O_1(0, -h_1)$ и $O_2(0, h_2)$, где $h_1=3a/4$, $h_2=15a/8$;

точки O_1, O_2 лежат на оси Oy , общая хорда кругов, длина которой $2a$, — на оси Ox . Найти потенциал электростатического поля внутри цилиндра, если потенциал поверхности равен v_1 при $y > 0$, v_2 — при $y < 0$.

7.11. Поперечное сечение однородного цилиндра — пересечение двух кругов с центрами $O_1(0, -h_1)$ и $O_2(0, -h_2)$, где $h_1 = 4a/3$, $h_2 = 35a/12$; точки O_1, O_2 лежат на оси Oy , общая хорда кругов, длина которой $2a$, — на оси Ox . Найти стационарную температуру цилиндра, если температура части поверхности радиуса r_1 равна v_1 , а остальной части — v_2 .

7.12. Температура бруса, поперечное сечение которого — полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), не зависит от времени; часть поверхности ($r = r_0$, $0 < \varphi < \alpha < \pi$) имеет температуру v_0 , а остальная часть — нулевую температуру. Найти плотность теплового потока через поверхность $r = r_0$.

7.13. Определить стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), если диаметральной плоскостью теплоизолирована, а остальная поверхность имеет температуру

$$v(r_0, \varphi) = \begin{cases} v_1, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{4}, \\ v_2, & \frac{\pi}{4} < \varphi < \pi. \end{cases}$$

7.14. Границей однородной среды является плоскость с цилиндрическим выступом, поперечное сечение которого — часть круга ($r < r_0$, $-(\frac{\pi}{2} - \alpha) < \varphi < \frac{3\pi}{2} - \alpha$), где $0 < \alpha < \pi$ (рис.7.3а.) Определить стационарную температуру в точке M среды, если температура плоскости v_1 , выступа — v_2 .

7.15. На поверхности грунта имеется цилиндрический вал, радиус которого r_0 (рис.7.3б.) Определить стационарную температуру грунта в точке M , если температура поверхности вала v_1 , а остальной поверхности — v_2 .

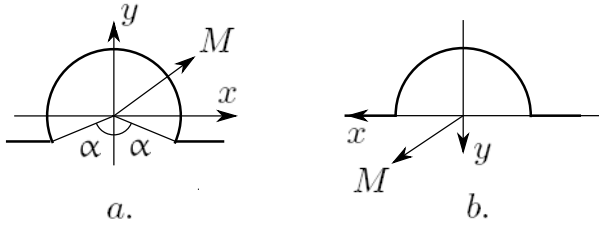


Рис. 7.3

7.16. Поперечным сечением полого цилиндрического проводника является сектор ($r < r_0$, $\varphi < \alpha < 2\pi$). Найти потенциал внутри проводника и вектор напряженности электростатического поля на грани $\varphi = \alpha$, если поверхность $r = r_0$ имеет потенциал v_1 , а остальная поверхность — потенциал v_2 .

7.17. В области ($r_0 < r$, $0 < \varphi < \alpha < 2\pi$) определена ограниченная гармоническая функция $v(x, y)$, принимающая на границе значения $v(r, 0) = v(r, \alpha) = v_1$, $v(r_0, \varphi) = v_2$. Какова эта функция?

7.18. Решить задачу Дирихле вне полукруга, радиус которого r_0 , если на полуокружности решение принимает постоянное значение v_1 , а на диаметре — постоянное значение v_2 .

7.19. Границей однородной среды ($y > 0$) является плоскость $y = 0$ с цилиндрическим выступом ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y > 0; a > b$). Определить стационарную плотность теплового потока через эллиптическую поверхность, если ее температура v_1 , а температура плоской части границы v_2 .

7.20. Решить предыдущую задачу, если поперечное сечение выступа имеет форму полуэллипса ($\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, y > 0; a > b$).

7.21. Стенки канала, поперечным сечением которого является полуполоса ($-a < x < a, 0 < y$), поддерживаются при температуре v_0 , а дно — при 0° . Определить стационарную температуру в канале.

7.22. Торец $x=0$ полуслоя ($0 < x, 0 < y < H$) поддерживается при нулевой температуре, а грани $y=0$ и $y=H$ — при температуре v_0 и $-v_0$ соответственно. Найти стационарную температуру полуслоя.

7.23. Найти потенциал внутри полого цилиндрического проводника с поперечным сечением ($-a < x < a, 0 < y$), если стенки $x=0$ и $y=0$ имеют нулевой потенциал, а стенка $y=H$ — потенциал v_0 .

7.24. Определить стационарную температуру вне эллиптического цилиндра $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где $a > b$, если 1) часть поверхности, соответствующая $y > 0$ имеет температуру v_1 , а остальная часть — температуру v_2 ; 2) часть поверхности, соответствующая $x > 0$ имеет температуру v_1 , а остальная часть — температуру v_2 . Ответ записать в эллиптических координатах (см. пример 5.2).

7.25. Найти потенциал электростатического поля внутри полого эллиптического цилиндра $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, где $a > b$, если 1) часть поверхности, соответствующая $y > 0$, имеет потенциал v_1 , а остальная часть — потенциал v_2 ; 2) часть поверхности, соответствующая $x > 0$, имеет потенциал v_1 , а остальная часть — потенциал v_2 . Ответ записать в эллиптических координатах (см. пример 5.2).

Пример 7.2. Найти плотность заряда на плоскости $y=0$ электростатической системы, рассмотренной в примере 7.1. Плотность заряда на проводнике вычисляется по формуле

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} E_n|_{\partial\Omega_z},$$

где E_n — нормальная составляющая поля на поверхности проводника.

Скалярное произведение двумерных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, записанных в комплексной форме $a = a_x + ia_y$, $b = b_x + ib_y$, можно представить в виде произведения комплексных чисел

$$(\mathbf{a} \mathbf{b}) = \operatorname{Re} (a \bar{b}) = \frac{1}{2}(a\bar{b} + \bar{a}b). \quad (7.8)$$

Следовательно,

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} \operatorname{Re} (E\bar{n})|_{\partial\Omega_z}. \quad (7.9)$$

Так как при конформном отображении $w=w(z)$ вектор поворачивается на угол $\arg w'(z)$, то единичные векторы нормалей n_z и n_w (рис.7.1) связаны соотношением

$$n_w = n_z \frac{w'}{|w'|} \Big|_{\partial\Omega_z}. \quad (7.10)$$

На границе $\operatorname{Im} w=v_1$ области Ω_w вектор $n_w=i$, если $v_2 > v_1$, либо $n_w=-i$, если $v_2 < v_1$, т.е. $n_w = i \operatorname{sign}(v_2 - v_1)$. Поэтому

$$n_z = i \operatorname{sign}(v_2 - v_1) \frac{|w'|}{w'} \Big|_{\Gamma_1}.$$

Подстановка n_z и $E = -i\bar{w}'$ в (7.9) дает

$$\sigma_1 = \frac{\operatorname{sign}(v_1 - v_2)}{4\pi} |w'| \Big|_{\Gamma_1}. \quad (7.11)$$

Комплексный потенциал определяется выражением (7.6), следовательно, на плоскости $y=0$

$$\sigma(x) = -\frac{v_0}{4\pi\left(1+e^{-\frac{\pi x}{H}}\right)}.$$

7.26. Две полуплоскости, перпендикулярные к плоскости xOy , следы которых — лучи $(x < -a)$ и $(a < x)$, заряжены до потенциалов $-v_0$ и v_0 соответственно. Найти плотность заряда на полуплоскостях.

7.27. Внутри угла $(0 < \varphi < \alpha)$ с проводящими заземленными гранями расположена полуплоскость $(0 < r, \varphi = \alpha/2)$, потенциал которой v_0 . Определить плотность заряда на гранях угла.

7.28. Полуплоскость $(0 < x, y = H/2)$, потенциал которой v_0 , расположена между проводящими заземленными плоскостями $y=0$ и $y=H$. Определить плотность заряда на плоскостях.

7.29. Две полуплоскости ($x < -a, y = H/2$) и ($a < x, y = H/2$), потенциал которых v_0 , расположены между проводящими заземленными плоскостями $y=0$ и $y=H$. Определить плотность заряда на заземленных плоскостях.

7.30. Полуплоскость ($0 < a < x, y = H/2$), потенциал которой v_0 , расположена внутри полого цилиндрического проводника с поперечным сечением ($0 < x, 0 < y < H$). Найти плотность заряда на полуплоскости, если потенциал проводника равен нулю.

7.31. Полуплоскость ($x=0, H < y$), потенциал которой v_0 , расположена перпендикулярно к проводящей заземленной плоскости с ребром ($x=0, 0 < y < h < H$). Найти плотность заряда на полуплоскости.

7.32. Параллельно проводящей заземленной плоскости ($y=0$) с ребром ($x=0, 0 < y < \frac{H}{2}$) расположена плоскость ($y=H$), потенциал которой v_0 . Найти плотность заряда на плоскости $y=H$.

7.33. Перпендикулярно к проводящей заземленной плоскости ($y=0$) с цилиндрическим выступом ($x^2 + y^2 = r_0^2, y > 0$) расположена полуплоскость, потенциал которой v_0 . Определить плотность заряда на полуплоскости.

7.34. Найти плотность заряда на экранах, имеющих форму гиперболических цилиндров ($x = \pm \sqrt{y^2 + 1}, -\infty < y < \infty$), если их потенциалы $-v_0$ и v_0 соответственно.

7.35. Гиперболический цилиндр ($x = \sqrt{y^2 + 1}, -\infty < y < \infty$) заряжен до потенциала v_0 . Определить плотность заряда, индуцированного на заземленной проводящей плоскости $x=0$.

Пример 7.3. Определить стационарную температуру двугранного угла ($0 < x, 0 < y$), грань $y=0$ которого имеет температуру $v_0 \eta(a-x)$, а грань $x=0$ — нулевую температуру.

В данном случае $A=q$, где q — вектор плотности теплового потока, температура $v = \text{Im } w$. Так как $\mathbf{q} = -k \nabla v$, то (см. (7.4))

$$q = -ik\overline{w'}. \quad (7.12)$$

Как показано в примере 7.1, определение комплексного потенциала поля сводится к построению конформного отображения $w=w(z)$ области $\Omega_z=\{x, y : 0<x, 0<y\}$ комплексной плоскости (z) на полосу $\Omega_w=\{u, v : -\infty<u<\infty, 0<v<v_0\}$ комплексной плоскости (w) , при котором отрезок $(0, a)$ оси $0x$ отображается на прямую $\operatorname{Im} w=v_0$, а остальная часть границы — на прямую $\operatorname{Im} w=0$. Такое отображение конструируется следующим образом. Функция $z_1=z^2$ отображает Ω_z на полуплоскость $\operatorname{Im} z_1>0$, отрезок $(0, a)$ с граничным значением v_0 на отрезок $(0, a^2)$ действительной оси плоскости (z_1) . Дробно-линейное отображение

$$z_2 = \lambda^2 \frac{z_1 - a^2}{z_1}, \quad \operatorname{Im} \lambda = 0$$

переводит полуплоскость $\operatorname{Im} z_1>0$ в полуплоскость $\operatorname{Im} z_2>0$, при этом отрезок $(0, a^2)$ с граничным значением v_0 трансформируется в отрицательную часть действительной оси, а ее положительная часть — носитель нулевого граничного значения. Построение конформного отображения завершается применением логарифмической функции

$$w = \frac{v_0}{\pi} \ln z_2 + \lambda_0 = \frac{v_0}{\pi} \ln \lambda^2 \frac{z^2 - a^2}{z^2} + \lambda_0, \quad \operatorname{Im} \lambda_0 = 0.$$

Температура

$$v = \operatorname{Im} w = \frac{v_0}{\pi} \arg \frac{r^2 e^{2i\varphi} - a^2}{r^2 e^{2i\varphi}} = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arccotg} \frac{r^2 - a^2 \cos 2\varphi}{a^2 \sin 2\varphi}.$$

7.36. Найти стационарное распределение температуры в двугранном угле $(0<r, 0<\varphi<\alpha<2\pi)$, грань $\varphi=0$ которого поддерживается при температуре $v_0\eta(r-a)$, а грань $\varphi=\alpha$ — при 0° .

7.37. Найти стационарную температуру клина $(0<r, 0<\varphi<\alpha)$, грань $\varphi=0$ которого имеет температуру $v_0\eta(a-r)$, а грань $\varphi=\alpha$ теплоизолирована.

7.38. Найти стационарную температуру клина $(0<r, 0<\varphi<\alpha)$, грань $\varphi=0$ которого имеет температуру $v_0\eta(a-r)$, а грань $\varphi=\alpha$ — температуру $-v_0\eta(a-r)$.

7.39. Какова стационарная температура однородного бруса с поперечным сечением $(r<r_0, 0<\varphi<\alpha)$, если грань $\varphi=\alpha$ поддержи-

вается при температуре v_2 , а остальная поверхность — при температуре v_1 ?

7.40. Электронная линза образована двумя параллельными плоскостями $y = \pm H$, потенциал которых

$$v(x, \pm H) = \begin{cases} v_1, & x < 0, \\ v_2, & x > 0. \end{cases}$$

Определить потенциал электростатического поля такой системы.

7.41. Найти стационарную температуру в канале с поперечным сечением $(-a < x < a, 0 < y)$, стенки $x = -a$ и $x = a$ которого имеют температуру 0° и $v_0 \eta(H - y)$ соответственно, а дно теплоизолировано.

Пример 7.4. Методом комплексного потенциала решить задачу Дирихле в полуплоскости $y > 0$, если решение $v(x, y)$ принимает при $y = 0$ постоянные значения $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ на промежутках $(-\infty, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, \infty)$ соответственно. Используя полученный результат, найти стационарную температуру слоя $(0 < y < H)$, поверхность $y = 0$ которого имеет температуру $v_0(1 - \eta(x))$, а поверхность $y = H$ — температуру $v_0 \eta(x)$.

Так как

$$v(x, 0) = v_n + \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) \eta(a_k - x),$$

то комплексный потенциал равен сумме комплексных потенциалов, соответствующих каждому слагаемому. Если $v(x, 0) = v_n$, то $v(x, y) \equiv v_n$, поэтому $w_n = i v_n + C_n$, где $\mathbf{Im} C_n = 0$. Если $v(x, 0) = (v_k - v_{k+1}) \eta(a_k - x)$, то

$$w_k = \frac{v_k - v_{k+1}}{\pi} \ln(z - a_k) + C_k, \quad \mathbf{Im} C_k = 0, \quad (7.13)$$

так как именно эта функция отображает полуплоскость на полосу с необходимым соответствием границ (пример 7.1). В результате

$$w(z) = i v_n + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_{k+1}) \ln(z - a_k) + C, \quad \mathbf{Im} C = 0,$$

$v = \operatorname{Im} w$ — решение задачи Дирихле.

Задача Дирихле для полосы сводится к соответствующей задаче для полуплоскости посредством конформного отображения $\zeta = \exp(\frac{\pi x}{H})$. Согласно формуле (7.13)

$$w(z) = \frac{v_0}{\pi} \ln(\zeta - 1) - \frac{v_0}{\pi} \ln \zeta + \frac{v_0}{\pi} \ln(\zeta + 1) + C,$$

откуда

$$v(x, y) = \frac{v_0}{\pi} \arg \left(sh \left(\frac{\pi x}{H} + i \frac{\pi y}{H} \right) \right) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arccctg} \left(th \frac{\pi x}{H} \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{H} \right).$$

7.42. Найти стационарное распределение температуры в двугранном угле ($0 < x, 0 < y$), если грань $x=0$ поддерживается при 0° , а температура грани $y=0$ равна v_1 при $0 < x < a$, v_2 при $a < x$.

7.43. Найти электростатический потенциал в пространстве между двумя плоскостями $y=0$ и $y=H$, если плоскость $y=0$ имеет нулевой потенциал, а плоскость $y=H$ — потенциал $v_0 \operatorname{sign} x$.

7.44. Найти стационарную температуру в слое ($0 < y < H$), грань $y=H$ которого имеет температуру $-v_0(1 - \eta(x))$, а грань $y=0$ — температуру $v_0 \eta(x)$.

7.45. Найти потенциал электростатического поля в пространстве между двумя параллельными плоскостями $y=\pm H$, потенциал которых

$$v(x, \pm H) = \begin{cases} v_1, & |x| < a, \\ v_2, & |x| > a. \end{cases}$$

7.46. Найти стационарную температуру в канале с поперечным сечением ($-a < x < a, 0 < y$), стенки $x=-a$ и $x=a$ которого имеют температуру $v_0 \eta(h - |y|)$, а дно теплоизолировано.

7.47. Определить электростатический потенциал внутри коробки, поперечное сечение которой — полуполоса ($0 < x, |y| < H$), если потенциал стенки $x=0$ равен v_0 , а основания $y=\pm H$ имеют потенциал $v_0 \eta(x - a)$.

7.48. Стенки $x=\pm a$ канала, поперечным сечением которого является полуполоса $(-a < x < a, 0 < y)$, поддерживаются при температуре $v_0\eta(h-y)$, а дно — при нулевой температуре. Определить плотность теплового потока через дно канала, если его температура не зависит от времени.

7.49. Найти стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является полукруг $(r < r_0, 0 < \varphi < \pi)$, если диаметральной плоскостью поддерживается при температуре v_1 , а остальная поверхность — при температуре

$$v(r_0, \varphi) = \begin{cases} v_0, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \\ -v_0, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Пример 7.5. Плоское потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости описывается (при отсутствии источников и внешних сил) системой уравнений (см.(1.74), (1.75))

$$\operatorname{rot} V = 0, \quad \operatorname{div} V = 0, \quad (7.14)$$

$$\frac{1}{2}(V\bar{\nabla} + \bar{V}\nabla)V + \frac{1}{\rho_0}\nabla P = 0. \quad (7.15)$$

В последнем уравнении скалярное произведение векторов представлено в форме (7.8). В примере 7.1 показано, что при условиях (7.14) существует аналитическая функция $w = u + iv$, которая является комплексным потенциалом поля скоростей V . В гидродинамике V и w связаны соотношением

$$V = \overline{w'}. \quad (7.16)$$

Отсюда

$$V = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla u,$$

т.е. $u(x, y)$ — потенциал скоростей. Так как семейства $u=C_1$ и $v=C_2$ ортогональны (пример 7.1), то $v(x, y)=C_2$ — линия тока.

Типичными задачами гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости являются задачи обтекания: неподвижная цилиндрическая поверхность (неограниченная вдоль образующей) находится в плоско-параллельном потоке, скорость которого перпендикулярна образующей. Нужно найти поле скоростей и давление в жидкости. В данном (двухмерном) случае говорят об обтекании профиля (или контура), которым является поперечное сечение поверхности.

Одна из задач обтекания состоит в построении потенциального течения в криволинейной полуплоскости Ω с границей L . Так как $\bar{V}(z) = w'$ — аналитическая функция, не равная нулю в Ω , и $Im w|_L = C$ (L — одна из линий тока), то функция $w(z)$ конформно отображает Ω на полуплоскость, ограниченную прямой, параллельной оси Ou . Из аналитичности $w(z)$ в Ω следует, что $w(\infty) = \infty$ (иначе существовала бы конечная точка z , в которой $w(z) = \infty$, что противоречит аналитичности функции $w(z)$ в Ω). Для однозначного определения скорости необходимо ее задать в какой-либо точке гладкого участка границы L .

Другая задача заключается в построении потенциального течения в криволинейной полосе Ω , ограниченной достаточно гладкими линиями L_1 и L_2 ; расход Q жидкости (т.е. ее количество, протекающее в единицу времени через участок единичной ширины поперечного сечения полосы) задан. В гидродинамике несжимаемой жидкости полагают $\rho_0 = 1$, следовательно,

$$\begin{aligned} Q &= \int_{z_1 \in L_1}^{z_2 \in L_2} \operatorname{Re}(\bar{V}n) dl = \operatorname{Re} \int_{z_1 \in L_1}^{z_2 \in L_2} (-i\bar{V}dz) = \\ &= \int_{z_1 \in L_1}^{z_2 \in L_2} (-i)w dz = \operatorname{Re} \int_{z_1 \in L_1}^{z_2 \in L_2} (-i)dw = v_2 - v_1. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $w(z)$ конформно отображает криволинейную полосу Ω на полосу $(v_1 < \operatorname{Im} w < v_2)$. Так как $w(z)$ аналитическая в Ω функция, то $w(\pm\infty) = \pm\infty$ (знак указывает направление, по которому точка стремится к бесконечности).

Третья задача — обтекание ограниченного контура — рассмотрена в примере 7.15.

К первому типу относится задача определения линий тока жидкости, обтекающей прямой угол Ω (рис.7.4.а.)

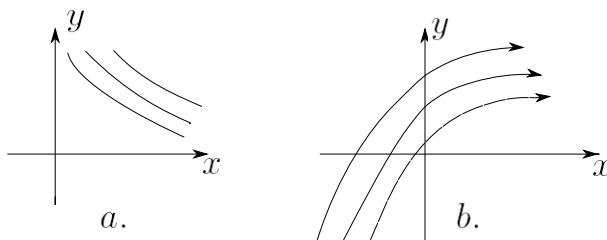


Рис. 7.4

Комплексный потенциал поля скоростей $w=w(z)$ представляет собой аналитическую функцию, которая конформно отображает область Ω на полуплоскость, ограниченную прямой $\text{Im } w = \text{Const}$, при условии $w(\infty) = \infty$. Такое отображение осуществляет функция $w = \lambda z^2 + B$, где λ — вещественная константа. Линии тока $\text{Im } w = C$ — гиперболы $xy = C$.

7.50. Определить форму линий тока при потенциальном обтекании тупого угла $3\pi/2$ (рис.7.4.b.)

7.51. Жидкость обтекает полуплоскость ($0 < x, y = 0$). Определить линии тока.

7.52. Плоскопараллельный поток жидкости, заполняющий полупространство ($y > 0$) обтекает плоскость ($y = 0$) с цилиндрическим выступом ($x^2 + y^2 = r_0^2, y > 0$), ось которого перпендикулярна потоку. Определить скорость жидкости на поверхности, ограничивающей поток, если $V(\infty) = V_0 > 0$.

7.53. Найти комплексный потенциал поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости, обтекающей плотину, высота которой h ,

если $V(\infty)=V_0$ (рис.7.5.а.) Определить скорость жидкости в сечении ($x=0$, $H<y<\infty$) и в точках 1 и 2 плотины. Предполагается, что жидкость заполняет полупространство $0<y$.

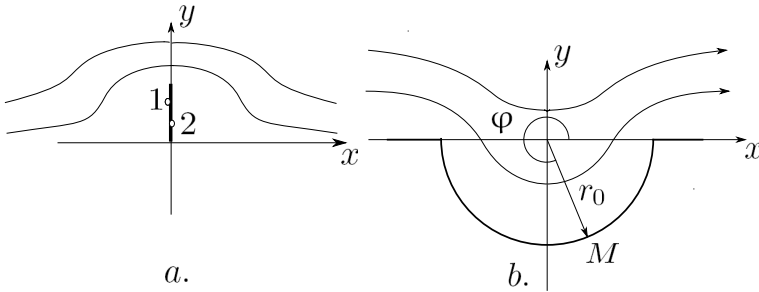


Рис. 7.5

7.54. Найти комплексный потенциал поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости, текущей над плоскостью с цилиндрической впадиной, радиус которой r_0 , а ось перпендикулярна скорости жидкости, если $V(\infty)=V_0$ (рис.7.5.б.) Определить скорость жидкости на поверхности, ограничивающей поток.

7.55. Идеальная несжимаемая жидкость обтекает извне контур L , имеющий форму параболы $y^2=2px$, $p>0$. Построить комплексный потенциал течения и определить скорость $V(z)$ жидкости на контуре, если $V(0)=V_0i$.

7.56. Решить предыдущую задачу, если жидкость обтекает контур изнутри.

7.57. Идеальная несжимаемая жидкость обтекает изнутри контур L , имеющий форму ветви гиперболы $(x^2-y^2=1, 1\leq x)$. Найти комплексный потенциал течения и определить скорость $V(z)$ жидкости на контуре, если $V(1)=V_0i$.

7.58. Решить предыдущую задачу, если жидкость обтекает контур извне.

7.59. Несжимаемая жидкость течет в криволинейной полосе, ограниченной ветвями гиперболы $x^2 - y^2 = 1$. Найти комплексный потенциал потока, если расход жидкости равен Q . Какова скорость жидкости в сечении $y=0$ и в точках гиперболы?

7.60. Найти скорость жидкости, протекающей между двумя полуплоскостями $(x=0, y < -H)$ и $(x=0, H < y)$, если ее расход равен Q . Найти скорости в сечении $(x=0, -H < y < H)$ и в точках $(x=-0, y > H)$ и $(x=+0, y > H)$.

7.61. Определить комплексный потенциал скоростей идеальной несжимаемой жидкости в бесконечно глубоком бассейне, дно которого имеет порог высоты h (рис.7.6.a.), при условии $V(\infty) = V_0$.

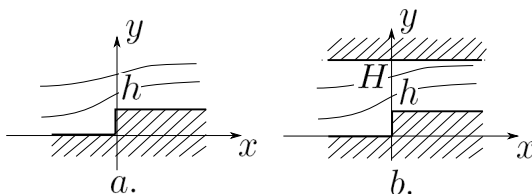


Рис. 7.6

В какой точке z_0 скорость равна $V_0 e^{\frac{i\pi}{3}}$?

7.62. Найти комплексный потенциал течения идеальной несжимаемой жидкости в канале, одна из стенок которого имеет уступ (рис.7.6.b.); расход жидкости равен Q . При $H=2h$ найти точку z_0 , в которой скорость $V = \frac{Q}{H}(1+i)$.

7.63. Идеальная несжимаемая жидкость течет между двумя параллельными полуплоскостями $(x < 0, y = \pm H)$, расход жидкости равен Q . Построить комплексный потенциал течения и определить линии тока. Найти точку z_0 , в которой скорость жидкости $V = -\frac{Qi}{2H}$.

7.64. Жидкость течет между плоскостями $y=-H$ и $y=H$, каждая из которых имеет ребро: первая — $(x=0, -H < y < -H+h)$, вторая — $(x=0, H-h < y < H)$. Найти скорость жидкости в сечении $(x=0, -H+h < y < H-h)$, если она течет вдоль оси Ox и ее расход равен Q .

7.65. Построить комплексный потенциал поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости, текущей в канале с препятствием; стенки канала — плоскости $y=0$, $y=H$, препятствие имеет форму ребра $(x=0, 0 < y < h < H)$; расход жидкости равен Q . Определить скорости в сечении $(x=0, \frac{H}{2} < y < H)$, а также в точках 1 и 2, координаты которых соответственно равны $x=-0, y=y_0, 0 < y_0 < h$ и $x=+0, y=y_0, 0 < y_0 < h$.

7.66. Тонкий угольный пласт, толщина которого H , ограничен непроницаемыми плоскостями, параллельными плоскости xOy , и занимает (двухмерную) область $\Omega = \{x, y : 0 < x, 0 < y\}$, давление на границе которой P_L . Определить поток газа, поступающего из пласта через участок $(0, x)$, где $x > 0$, в процессе стационарной изотермической фильтрации, если давление в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ равно $P_0 > P_L$.

7.67. Тонкий угольный пласт, толщина которого H , ограничен непроницаемыми плоскостями, параллельными плоскости xOy . В ходе выработки угля образовался длинный штрек, давление в котором P_L , а давление в некоторой точке M_0 пласта $P_0 > P_L$. Если штрек достаточно узок, а точка M_0 близка к его концу (забою), то можно принять, что (двухмерная) область, занимаемая пластом, представляет собой плоскость с разрезом по лучу $(0 < x)$. В этом приближении найти поток газа, поступающего из пласта на участке $(0, x)$ штрека в процессе установившейся изотермической фильтрации, если $M_0 = (-x_0 < 0, y=0)$.

7.68. В тонком угольном пласте, толщина которого H , ограниченном двумя непроницаемыми плоскостями, каждая из которых параллельна плоскости xOy , пробита скважина на неболь-

шую глубину h . Давление в скважине P_L , а в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ пласта $P_0 > P_L$. Если скважина достаточно узкая, так что фильтрация через дно пренебрежимо мала, а точка M_0 расположена вблизи скважины, то можно считать, что (двухмерная) область, занятая пластом, представляет собой полуплоскость ($y > 0$) с разрезом по отрезку длины h оси Oy . В этом приближении найти поток газа, поступающего из пласта в скважину в процессе установившейся изотермической фильтрации. Рассмотреть случай $x_0 = 0$, $y_0 > h$.

7.69. Тонкий угольный пласт, толщина которого H , ограничен непроницаемыми плоскостями, параллельными плоскости xOy , и занимает область Ω (рис.7.7). Найти поток Q газа через уча-

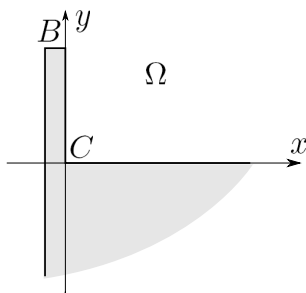


Рис. 7.7

сток BC в процессе стационарной изотермической фильтрации, если на границе $L = \partial\Omega$ давление P_L , в точке $(x_0, y_0) \in \Omega$ оно равно $P_0 > P_L$, а фильтрация через участок B пренебрежимо мала.

7.70. Тонкий угольный пласт, толщина которого H , ограничен непроницаемыми плоскостями, параллельными плоскости xOy . В процессе добычи угля образовалась выемка в форме полуполосы ($0 < x, |y| < h$). Найти поток Q газа, поступающего из пласта через участок $(x=0, |y| < h)$ в процессе установившейся изотермической фильтрации, если давление на границе пласта P_L , а в точке $(x_0, 0)$ пласта давление $P_0 > P_L$.

7.2. Комплексный потенциал точечного источника

Пример 7.6. 1. Определить комплексный потенциал аксиально симметричного поля, источники которого равномерно распределены на окружности, радиус которой r_0 , если вне окружности поле направлено по радиусам, а внутри равно нулю. Рассмотреть случай точечного источника.

2. Определить плотность заряда на проводящей цилиндрической поверхности, заряд единицы длины (вдоль оси) которой равен q ; поперечное сечение поверхности — кусочно-гладкая линия $L = \partial\Omega$, где Ω — односвязная область в расширенной комплексной плоскости, содержащая точку $z = \infty$.

1. В системе координат с началом в центре окружности поле

$$A = f(|z|) \frac{z}{|z|}.$$

Поток поля через окружность $|z|=r>r_0$ (см.(7.8))

$$N = 2\pi|z|f(|z|)\mathbf{Re} \left(\frac{z}{|z|} \frac{\bar{z}}{|z|} \right) = 2\pi|z|f(|z|).$$

Из теоремы Остроградского для кольца ($r_0 < r_1 \leq r \leq r_2$)

$$N(r_2) - N(r_1) = \int_S \operatorname{div} A \, ds$$

вытекает, что величина N потока не зависит от r и может служить мерой интенсивности источников. Таким образом,

$$A = \frac{Nz}{2\pi|z|^2} = \frac{N}{2\pi\bar{z}}, \quad (7.17)$$

откуда на основании формулы (7.4)

$$w(z) = i \frac{N}{2\pi} \ln \frac{1}{z} + C_1, \quad |z| > r_0. \quad (7.18)$$

Аналогично

$$w(z) = C_2, \quad |z| < r_0. \quad (7.19)$$

Если $v = \mathbf{Im} w$ — непрерывная функция, то $\mathbf{Im} C_1 = \mathbf{Im} C_2$.

Комплексный потенциал электростатического поля равномерно заряженного цилиндра с зарядом q на единицу длины ($N=4\pi q$ по теореме Гаусса)

$$w(z) = \begin{cases} 2qi \ln \frac{1}{z} + C_1, & |z| > r_0, \\ C_2, & |z| < r_0. \end{cases} \quad (7.20)$$

Комплексный потенциал точечного источника получается из формулы (7.18) при $r_0=0$. В частности, комплексный потенциал бесконечной равномерно заряженной нити, координата которой z_0 , линейная плотность заряда q ,

$$w(z) = 2qi \ln \frac{1}{z - z_0} + C. \quad (7.21)$$

2. Пусть функция $\zeta = \zeta(z)$ конформно отображает внешность области Ω на внешность единичного круга, а точку $z = \infty$ — в точку $\zeta = \infty$. Согласно формуле (7.20) комплексный потенциал электростатического поля вне проводника

$$w(z) = 2qi \ln \frac{1}{\zeta(z)} + C, \quad \zeta(\infty) = \infty. \quad (7.22)$$

Необходимость условия $\zeta(\infty) = \infty$ вытекает из физических соображений: если бы $\zeta(z_0) = \infty$, где $z_0 \neq \infty$, то в точке z_0 электростатический потенциал

$$v = \mathbf{Im} w(z_0) = 2qi \ln \frac{1}{|\zeta(z_0)|} + \mathbf{Im} C$$

был неограничен.

Плотность заряда рассчитывается по формуле (7.9), в которой $E = -i\overline{w'}$, так что

$$\sigma = \frac{q}{2\pi} \mathbf{Re} \left(\frac{\overline{\zeta'}}{\overline{\zeta} \overline{n}_z} \right) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Функция $\zeta = \zeta(z)$ отображает $\partial\Omega$ в окружность $|\zeta| = 1$. Единичные векторы внешних нормалей n_z к $\partial\Omega$ и n_ζ к окружности связаны соотношением (7.10), которое принимает вид

$$n_z = \frac{|\zeta'|}{\zeta'} \zeta \Big|_{\partial\Omega}.$$

Таким образом, плотность заряда не проводнике определяется формулой

$$\sigma = \frac{q}{2\pi} |\zeta'| \Big|_{\partial\Omega}.$$

7.71. Определить плотность заряда на проводящей полосе, ширина которой $2a$, а заряд единицы длины равен q .

7.72. В металлическом листе имеется щель, ширина которой $2a$; определить плотность заряда на листе, если заряд единицы длины (вдоль щели) равен q .

7.73. Поперечным сечением цилиндрического проводника является область Ω , ограниченная окружностями S_1 и S_2 (рис.7.8 слева.); заряд единицы длины цилиндра равен q .

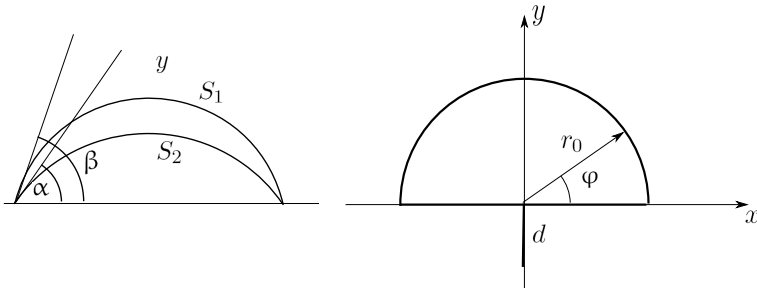


Рис. 7.8

Определить заряд единицы длины (вдоль оси) поверхности, поперечное сечение которой — дуга окружности S_1 .

7.74. Заряд единицы длины цилиндрического проводника, поперечное сечение которого изображено на рис.7.8 справа, равен q . При каком условии заряд единицы длины (вдоль оси проводника) участка 1. ($r=r_0, 0<\varphi<\pi$); 2. ($0<r<d, \varphi=3\pi/2$) равен $q/2$?

7.75. Заряд единицы длины цилиндрического проводника, поперечное сечение которого — полукруг ($x^2+y^2=1, y>0$) и отрезок ($x=0, r_0<y<d$), равен q . При каком условии заряд единицы длины (вдоль оси проводника) участка ($x=0, r_0<y<d$) равен $q/2$?

7.76. Поперечное сечение цилиндрического проводника — полукруг ($r<r_0, 0<\varphi<\pi$). Найти плотность заряда на проводнике, если заряд единицы длины q .

7.77. Определить плотности заряда σ_1 и σ_2 соответственно на вогнутой и выпуклой сторонах поверхности полого проводящего цилиндра со щелью ($r=r_0, \alpha<\varphi<2\pi-\alpha, 0<\alpha<\pi$), а также полный заряд единицы длины (вдоль оси цилиндра) на каждой стороне, если заряд единицы длины цилиндра q .

7.78. Найти плотность заряда на поверхности проводящего цилиндра, поперечным сечением которого является эллипс с полуосями a и b ($a>b$); заряд единицы длины цилиндра равен q .

7.79. Заряд единицы длины цилиндрического проводника, поперечное сечение которого — эллипс ($x^2/a^2+y^2/b^2=1$), где $a>b$, и отрезок 1) ($a<x<d, y=0$); 2) $x=0, b<y<d$), равен q . При каком значении d заряд единицы длины (вдоль оси проводника) эллиптической поверхности окажется равным $q/3$?

7.80. Два неограниченных проводящих цилиндра с одинаковыми радиусами $r_1=r_2=r_0$ касаются по образующей. Как распределится заряд на поверхности цилиндров, если суммарный заряд единицы длины (вдоль оси) равен q ?

7.81. Решить предыдущую задачу для цилиндров, радиусы которых r_1 и r_2 .

7.82. Заряд единицы длины цилиндрического проводника с крестообразным поперечным сечением ($-a < x < a$, $-c < y < a/3$) равен q . При каком условии заряд единицы длины (вдоль оси) участка ($-a < x < a$) равен $q/4$?

7.83. Поперечное сечение цилиндрического проводника имеет форму креста ($|x| < a$, $|y| < a$). Найти плотность заряда на проводнике; заряд единицы длины (вдоль оси проводника) равен q .

7.84. Из длинной металлической полосы изготовлен проводник с Т-образным поперечным сечением ($|x| < a$, $0 < y < a$). Найти плотность заряда на проводнике; заряд единицы длины равен q .

Пример 7.7. Найти стационарное распределение температуры в толстостенной трубе, ограниченной коаксиальными цилиндрами (рис.7.9), если температура внешней поверхности v_1 , внутренней — v_2 , $r_1 = 16a$, $r_2 = 5a$, $d = 7a$. Температура трубы $v(x, y) = \text{Im } w(z)$. Если бы поперечное сечение трубы было концентрическим кольцом, то формулы (7.18), (7.19) решали бы задачу построения комплексного потенциала. Поэтому нужно отобразить эксцентрическое кольцо на концентрическое. С этой целью применяется дробно-линейное отображение, переводящее пару точек, симметричных относительно обеих окружностей, в 0 и ∞ . Так как дробно-линейная функция отображает окружность в окружность, симметричные точки — в симметричные, то точки 0 и ∞ будут симметричны относительно окружностей образов.

Следовательно, точка 0 — общий центр этих окружностей (если одна из симметричных точек бесконечно удаленная, то другая — центр окружности). В данном случае симметричные точки лежат на положительной части действительной оси, а их координаты x_1 и x_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 z_2 = 256a^2 \\ (x_1 - 7a)(x_2 - 7a) = 25a^2, \end{cases}$$

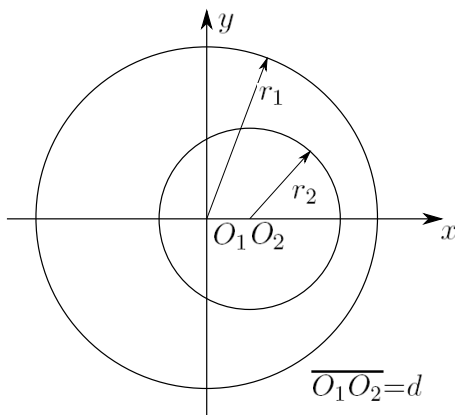


Рис. 7.9

решение которой: $x_1=8a$, $x_2=32a$. Дробно-линейная функция

$$\zeta = k \frac{z - 8a}{z - 32a}$$

отображает данное кольцо в концентрическое. Если потребовать, чтобы внутренняя окружность $z = 7a + 5ae^{i\varphi}$ отображалась на окружность радиуса $R_1=1$, т.е.

$$|k| \cdot \left| \frac{5ae^{i\varphi} - a}{5ae^{i\varphi} - 25} \right| = 1.$$

то $|k| = 5$. Следовательно,

$$\zeta = 5e^{i\alpha} \frac{z - 8a}{z - 32a},$$

а радиус образа внешней окружности

$$R_1 = 5 \left| \frac{16ae^{i\varphi} - 8a}{16ae^{i\varphi} - 32a} \right| = \frac{5}{2}.$$

Комплексный потенциал имеет вид

$$w = Bi \ln \frac{1}{\zeta} + C = -Bi \ln \left(5e^{i\alpha} \frac{z - 8a}{z - 32a} \right) + C, \quad \text{Im } B = 0,$$

а температура

$$v = \mathbf{Im} w = -B \ln \left| 5 \frac{z - 8a}{z - 32a} \right| + \mathbf{Im} C.$$

Граничные условия приводят к системе

$$\begin{cases} -B \ln R_1 + \mathbf{Im} C = v_1 \\ -B \ln R_2 + \mathbf{Im} C = v_2. \end{cases}$$

В итоге

$$v(x, y) = \frac{v_1 - v_2}{\ln \frac{5}{2}} \ln 5 \sqrt{\frac{(x - 8a)^2 + y^2}{(x - 32a)^2 + y^2}} + v_2.$$

7.85. Плоское поле A определено в области Ω и удовлетворяет условиям существования комплексного потенциала. Показать, что при конформном отображении области Ω поток поля через контур $L \in \Omega$ не меняется.

7.86. Найти стационарное распределение температуры в трубе, поперечное сечение которой — эксцентрическое кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 10a^2$, $(x + a)^2 + y^2 = 4a^2$, если температура внешней поверхности v_1 , внутренней v_2 .

7.87. Найти стационарную температуру трубы, поперечное сечение которой изображено на рис.7.9, если температура внешней поверхности v_1 , внутренней — v_2 , $r_1=14a$, $r_2=10a$, $d=3a$.

7.88. Труба (рис.7.9) изготовлена из материала с коэффициентом теплопроводности k . Температура внешней поверхности v_1 , внутренней — v_2 , $r_1=5a$, $r_2=2a$, $d=2a$. Какова плотность теплового потока, проходящего через внешнюю поверхность при стационарном распределении температуры?

7.89. Температура внешней и внутренней поверхностей толстостенной трубы равна соответственно v_1 и v_2 . Определить величину теплового потока, проходящего через внешнюю поверхность (на единицу длины трубы) при установившемся тепловом режиме? Дано: $r_1=56a$, $r_2=4a$, $d=48a$ (рис.7.9).

7.90. Температура толстостенной трубы не зависит от времени и постоянна (т.е. не зависит от координат) на внешней и внутренней поверхностях. Какова температура v_1 внешней поверхности, если через нее проходит (на единицу длины трубы) тепловой поток Q , а температура внутренней поверхности v_2 ? Дано: $r_1=35a$, $r_2=9a$, $d=22a$ (рис.7.9).

7.91. В толстостенной трубе (рис.7.9) диффундирует газ, концентрация которого не зависит от времени. Найти плотность потока q и полный поток Q газа через внешнюю поверхность трубы, если концентрация газа на внешней поверхности v_1 , на внутренней — v_2 , $r_1=32a$, $r_2=7a$, $d=15a$, коэффициент диффузии D .

7.92. Внешний контур кольцевой мембраны (рис.7.9) находится в плоскости xOy , а внутренний смещен перпендикулярно плоскости на расстояние v_0 . Найти равновесную форму мембраны, если $r_1=2,5a$, $r_2=a$, $d=a$.

7.93. Внешняя граница кольцевой мембраны (рис.7.9) закреплена, а на внутреннюю действует поперечная сила плотности $f(\psi)$, сообщающая точкам границы отклонение v_0 от положения равновесия $v=0$. Определить: 1) равновесную форму мембраны; 2) линейную плотность $f(\psi)$ силы, действующей на мембрану. Натяжение мембраны T_0 , $r_1=2,5a$, $r_2=a$, $d=a$.

7.94. Между двумя параллельными металлическими цилиндрами находится среда с проводимостью σ (рис.7.9). Найти плотность тока, текущего через цилиндрические поверхности, если внешний цилиндр поддерживается при потенциале v_1 , внутренний — при потенциале v_2 , $r_1=66a$, $r_2=15a$, $d=17a$.

7.95. Между параллельными металлическими цилиндрами находится среда с проводимостью σ (рис.7.9); ток течет перпендикулярно оси. Определить сопротивление единицы длины (вдоль оси) такого проводника, если $r_1=42a$, $r_2=9a$, $d=7a$.

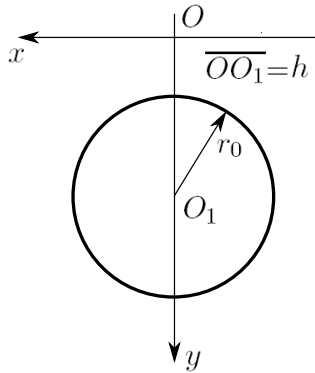


Рис. 7.10

7.96. Труба, радиус которой $r=7a$, находится в грунте на глубине $h=25a$ (рис.7.10.) Определить стационарное распределение температуры в грунте, если температура его поверхности v_1 , трубы — v_2 .

7.97. Один из двух параллельно расположенных проводящих цилиндров заземлен, а другой имеет заряд q на единицу длины (рис.7.10) найти потенциал поля вне цилиндров и разность потенциалов между ними, если $r_1=5a$, $r_2=9a$, $d=28a$.

7.98. В грунте, коэффициент теплопроводности которого k , на глубине $h=13a$ расположена труба, радиус которой $r=5a$ (рис.7.10). Температура поверхности грунта v_1 , трубы — v_2 . Определить плотность теплового потока через поверхность грунта при стационарном распределении температуры.

7.99. Два одинаковых параллельных кабеля, расстояние между осями которых $2d$, образуют линию. Найти емкость единицы длины линии, если радиусы кабелей $r_0 < d$.

7.100. Найти взаимную емкость единицы длины двух параллельных цилиндров (рис.7.9.), если $r_1=18a$, $r_2=4a$, $d=11a$.

7.101. Два проводящих параллельных цилиндра расположены так, как показано на рис. 7.9. Заряд единицы длины внешнего цилиндра q_1 , внутреннего — q_2 . Определить потенциал электростатического поля в пространстве, если $r_1=48a$, $r_2=21a$, $d=23a$.

7.102. Один из двух параллельно расположенных проводящих цилиндров заземлен, а потенциал другого v_0 (рис.7.11.) Найти

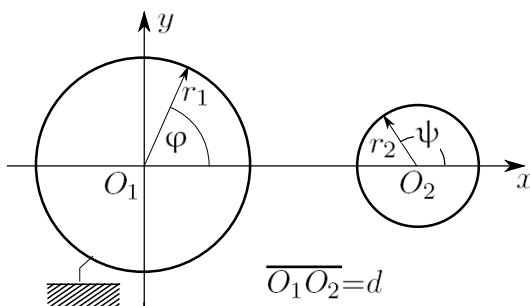


Рис. 7.11

электростатическое поле вне цилиндров и, в частности, в точке $M_0(r_2, \psi)$, если $r_1=7a$, $r_2=32a$, $d=65a$.

7.103. Определить поле вне проводящих параллельных цилиндров (рис.7.11), если один из них заземлен, а другой имеет заряд q на единицу длины. Каковы величина и направление вектора E в точке $M_0(r_2, \psi)$? Дано: $r_1=10a$, $r_2=4a$, $d=21a$.

7.104. Пространство между проводящей плоскостью и параллельным ей металлическим цилиндром заполнено средой с проводимостью σ (рис.7.10). Определить плотность тока, текущего через поверхность цилиндра, если его потенциал v_1 , потенциал плоскости v_2 , $r=33a$, $h=65a$.

7.105. Два параллельных металлических цилиндра находятся в однородной среде с проводимостью σ (рис.7.11.) Определить плотность тока, протекающего через поверхности цилиндров, а

также полный ток I , если первый цилиндр (радиус r_1) поддерживается при потенциале v_1 , второй — при потенциале v_2 , $r_1 = r_2 = 3a$, $d = 10a$.

7.106. Заземленный проводящий цилиндр находится в поле параллельно расположенного цилиндра, заряженного до потенциала v_0 (рис.7.11.) Определить плотность заряда и заряд единицы длины заземленного цилиндра, если $r_1 = 7a$, $r_2 = 10a$, $d = 51a$.

7.107. Два проводящих цилиндра, внешний из которых заземлен, а потенциал другого v_0 , параллельны друг другу (рис.7.9.) Найти плотность заряда на цилиндрах, если $r_1 = 10a$, $r_2 = 7a$, $d = a$.

7.108. Металлический цилиндр, заряженный до потенциала v_0 , расположен параллельно проводящей плоскости (рис.7.10.) Найти плотность заряда на поверхности цилиндра и на плоскости. Какова взаимная емкость (на единицу длины вдоль оси цилиндра) цилиндра и плоскости? Известно, что $r = 3a$, $h = 5a$.

7.109. Параллельно проводящему заземленному цилиндру расположен металлический цилиндр с зарядом q на единицу длины (рис.7.11.). Как распределится заряд на незаземленном цилиндре, если известно, что $r_1 = 2a$, $r_2 = 5a$, $d = 9a$.

7.110. Два параллельных металлических цилиндра расположены так, как показано на рис. 7.9. Внутренний цилиндр имеет заряд q на единицу длины, а внешний заземлен. Определить плотность заряда и заряд единицы длины заземленного цилиндра, если $r_1 = 16a$, $r_2 = 5a$, $d = 7a$.

7.111. Внутри заземленного металлического цилиндра параллельно ему расположен проводящий цилиндр с зарядом q на единицу длины (рис.7.9.) Как распределится заряд на внутреннем цилиндре, если $r_1 = 20a$, $r_2 = 6a$, $d = 13a$?

7.112. Металлический цилиндр с зарядом q на единицу длины расположен внутри заземленного проводящего цилиндра параллельно ему (рис.7.9.) Найти плотность заряда на цилиндрах, если $r_1 = 15a$, $r_2 = 6a$, $d = 7a$.

7.113. Два проводящих цилиндра расположены параллельно друг другу (рис. 7.9.) Заряд единицы длины внешнего цилиндра q_1 , внутреннего — q_2 . Найти плотность заряда на цилиндрах, если $r_1=260a$, $r_2=22a$, $d=204a$.

7.114. Два параллельных проводящих цилиндра расположены так, как показано на рис.7.11. Один из них заземлен, а другой имеет потенциал v_0 . Найти силу, действующую на единицу длины заземленного цилиндра, если $r_1=2a$, $r_2=9a$, $d=14a$.

7.115. Какая сила действует на единицу длины заземленного металлического цилиндра, расположенного параллельно проводящему цилиндру с зарядом q на единицу длины (рис.7.11), если $r_1=10a$, $r_2=3a$, $d=14a$?

7.116. Найти линейную плотность силы, действующей на проводящий цилиндр с зарядом q на единицу длины, расположенный внутри проводящего заземленного цилиндра (рис.7.9), если $r_1=35a$, $r_2=5a$, $d=24a$.

7.117. Два проводящих цилиндра расположены параллельно друг другу (рис. 7.9). Заряд единицы длины внешнего цилиндра q_1 , внутреннего — q_2 . Какая сила действует на единицу длины внутреннего цилиндра, если $r_1=70a$, $r_2=34a$, $d=32a$?

7.118. Металлический цилиндр с зарядом q на единицу длины параллелен проводящей заземленной плоскости (рис.7.10). Определить плотность заряда на плоскости и силу, действующую на единицу длины цилиндра, если $r=8a$, $h=17a$.

7.119. В полупространстве с проводимостью σ находится цилиндр, параллельный плоскости $y=0$ (рис.7.10). Найти плотность тока в полупространстве, а также плотность тока и полный ток через поверхность цилиндра, если $r=9a$, $h=41a$, а потенциалы плоскости ($y=0$) и цилиндра равны соответственно 0 и v_0 .

7.120. Конденсатор образован двумя проводящими эллиптическими цилиндрами, поперечные сечения которых — софокусные эллипсы с полуосями $a_1=10a$, $b_1=6a$ и $a_2=17a$, $b_2=15a$. Вычислить емкость единицы длины конденсатора.

7.121. В пространстве между двумя эллиптическими цилиндрами, поперечные сечения которых — софокусные эллипсы с полуосями $a_1=13a$, $b_1=5a$ и $a_2=20a$, $b_2=16a$, диффундирует газ. Концентрация газа не зависит от времени и равна v_1 на внутренней и v_2 на внешней поверхности, где v_1 и v_2 — постоянные величины. Определить полный поток (на единицу длины вдоль оси) и плотность потока через внешнюю поверхность, если коэффициент диффузии D .

7.122. Пространстве между двумя проводящими эллиптическими цилиндрами, поперечные сечения которых — софокусные эллипсы с полуосями $a_1=25a$, $b_1=20$ и $a_2=39a$, $b_2=36a$, заполнено средой с проводимостью σ . Цилиндры поддерживаются при постоянных потенциалах. Найти сопротивление единицы длины (вдоль оси) такого проводника.

7.123. Внутри однородного эллиптического цилиндра, коэффициент теплопроводности которого k , находится пластинка, ширина которой $2c$ ($c^2 = a^2 + b^2$) (рис.7.12). Найти плотность теплового потока и полный поток через поверхность цилиндра при стационарном тепловом режиме, если разность постоянных температур цилиндрической поверхности пластинки равна v_0 .

7.124. Внутри полого проводящего цилиндра помещена металлическая пластинка, ширина которой $2c$ ($c^2 = a^2 + b^2$) (рис.7.12). Определить плотность заряда на проводниках, если разность потенциалов между цилиндром и пластинкой v_0 .

7.125. Внутри полого проводящего цилиндра расположена металлическая пластинка, ширина которой $2c$ ($c^2 = a^2 + b^2$) (рис.7.12). Какова емкость единицы длины такой системы?

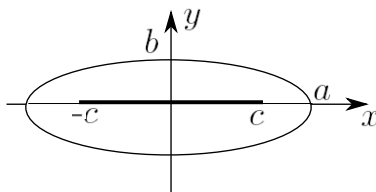


Рис. 7.12

7.126. Внутри проводящего цилиндра помещена металлическая полоса, ширина которой $2c$ ($c^2 = a^2 + b^2$) (рис.7.12). Определить плотность тока, текущего через поверхность цилиндра, если его проводимость σ , потенциал v_2 , а потенциал полосы — v_1 .

7.127. Внутри проводящего эллиптического цилиндра, заполненного средой с проводимостью σ , помещена металлическая полоса, ширина которой $2c$ ($c^2 = a^2 + b^2$) (рис.7.12). Цилиндр и полоса поддерживаются при постоянных потенциалах. Определить сопротивление единицы длины (вдоль оси) такого проводника.

7.128. Горизонтальный пористый пласт с непроницаемыми основаниями имеет форму плоской линзы, в которой пробита; радиус линзы r_1 , радиус скважины r_2 (рис. 7.9). Пласт заполнен малосжимаемой жидкостью, давление которой на поверхности $r=r_1$ равно P_1 , а в скважине — P_2 . Определить давление, которое устанавливается в линзе в процессе стационарной изотермической фильтрации, если $r_1=426a$, $r_2=a$, $d=420a$.

7.129. Малосжимаемая жидкость заполняет горизонтальный пористый пласт с непроницаемыми основаниями. Пласт имеет форму плоской линзы, в которой на расстоянии $d=1008a$ от центра пробита; радиус линзы $r_1=1016a$, радиус скважины $r_2=a$ (рис.7.9). Определить расход жидкости (поток скорости), поступающей из пласта в скважину в процессе установившейся изотермической фильтрации, если давление при $r=r_1$ равно P_1 , а в скважине — P_2 .

7.130. Горизонтальный недеформируемый пласт, заполненный газом, имеет форму плоской линзы, в которой на расстоянии $d=1980a$ от центра пробита скважина; радиус линзы $r_1=1990a$, радиус скважины $r_2=a$ (рис. 7.9). Давление в скважине P_2 , на внешней поверхности линзы — P_1 , а ее основания непроницаемы для газа. Какое давление установится в линзе в процессе стационарной изотермической фильтрации?

7.131. Недеформируемый горизонтальный пласт в форме плоской линзы, радиус которой $r_1=1499a$, толщин H , заполнен газом. В линзе на расстоянии $d=1440a$ от центра пробита скважина, радиус которой $r_2=a$ (рис. 7.9). Давление в скважине P_2 , на внешней поверхности пласта — P_1 , а его основания непроницаемы для газа. Какой поток газа поступает в скважину в процессе установившейся фильтрации, если температура T постоянна?

7.132. Тонкий круговой пласт, радиус которого r_1 , со скважиной, радиус которой r_2 (рис. 7.9), расположен на непроницаемом горизонтальном основании. Пласт частично (по высоте) заполнен жидкостью, уровень которой у поверхности $r=r_1$ равен H_1 , в скважине — H_2 . Найти форму свободной поверхности жидкости в процессе установившейся безнапорной фильтрации, если μ , m , k и температура — постоянные величины, $r_1=245a$, $r_2=a$, $d=240a$.

7.133. Тонкий круговой пласт, радиус которого $r_1=679a$, с непроницаемым горизонтальным основанием частично (по высоте) заполнен жидкостью. На расстоянии $d=672a$ от центра пласта пробита скважина, радиус которой $r_2=a$ (рис. 7.9). В процессе стационарной безнапорной фильтрации устанавливается свободная поверхность жидкости, уровень которой при $r=r_1$ равен H_1 , а в скважине — H_2 . Определить расход жидкости (поток скорости), поступающей в скважину, если μ , m , k и температура — постоянные величины.

Пример 7.8. Поперечным сечением полого заземленного цилиндрического проводника является односвязная область Ω_z с гра-

ницей $\partial\Omega_z$. Внутри проводника расположена параллельно образующей бесконечная нить, заряд единицы длины которой q , координаты $x=x_0$, $y=y_0$ (рис.7.13).

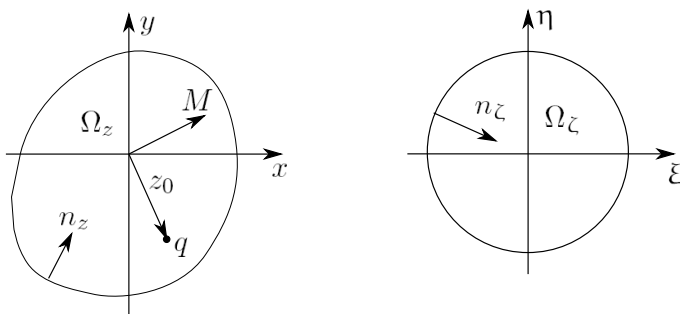


Рис. 7.13

Найти комплексный потенциал электростатического поля и плотность заряда на проводнике. При конформном отображении $\zeta=\zeta(z)$ области Ω величина точечного заряда q не меняется. Это следует из инвариантности уравнения Пуассона для электростатического потенциала

$$\Delta v(x, y) = -4\pi q \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0)$$

относительно замены переменных

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (7.23)$$

которая определяется функцией $\zeta = \xi + i\eta$. Действительно, по формулам дифференцирования сложной функции

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 = u_{\xi\xi}\xi_{xx} + u_{\eta\eta}\eta_{xx}, \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 = u_{\xi\xi}\xi_{yy} + u_{\eta\eta}\eta_{yy}. \end{aligned}$$

Так как $\xi_x^2 + \xi_y^2 = |\nabla\xi|^2 = |\xi_x + i\xi_y|^2 = |\xi_x - i\eta_x|^2 = |\zeta'(z)|^2$ и аналогично $\eta_x^2 + \eta_y^2 = |\zeta'(z)|^2$, $\xi_x\eta_x + \xi_y\eta_y = 0$ (пример 7.1),

$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0$, $\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0$, (вещественная и мнимая части аналитической функции — гармонические функции), то преобразованное уравнение запишется в виде

$$|\zeta'(z)|^2 \Delta U(\xi, \eta) = -4\pi q \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0),$$

где $U(\xi, \eta) = u(x, y)$, $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. По правилу замены переменных в обобщенной функции (10.36)

$$\delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0) = \frac{1}{\left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right|} \delta(\xi - \xi_0) \cdot \delta(\eta - \eta_0),$$

где $\xi_0 = \xi(x_0, y_0)$, $\eta_0 = \eta(x_0, y_0)$. Функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана, поэтому

$$|\zeta'(z)|^2 = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}.$$

Следовательно, уравнение Пуассона преобразуется к виду

$$\Delta U(\xi, \eta) = -4\pi q \delta(\xi - \xi_0) \cdot \delta(\eta - \eta_0),$$

что доказывает инвариантность заряда при конформном отображении.

Пусть функция $\zeta = \zeta(z, z_0)$ конформно отображает область Ω на круг $|\zeta| < 1$, а точку $z_0 = x_0 + iy_0$ переводит в его центр. Согласно формуле (7.21) и вследствие инвариантности заряда комплексный потенциал

$$w(z) = 2qi \ln \frac{1}{\zeta(z, z_0)} + C. \quad (7.24)$$

Плотность заряда на поверхности проводника вычисляется по формуле (7.9), в которой (см. (7.7), (7.24))

$$E_n|_{\partial\Omega} = \mathbf{Re} (E\bar{n}_z)|_{\partial\Omega} = 2q\mathbf{Re} \left(\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \bar{n}_z \right) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Единичный вектор n_z внутренней нормали к $\partial\Omega$ и единичный вектор n_ζ нормали к образу Ω в соответствующей точке связаны соотношением (7.10). В данном случае (рис.7.15.)

$$n_\zeta = - \frac{\zeta}{|\zeta|} \Big|_{\partial\Omega},$$

поэтому

$$n_z = \left(-\frac{\zeta}{|\zeta|} \frac{|\zeta'|}{\zeta'} \right) \Big|_{\partial\Omega} = \left(-\frac{\zeta}{\zeta'} |\zeta'| \right) \Big|_{\partial\Omega}$$

В результате

$$\sigma = - \frac{q}{2\pi} |\zeta'| \Big|_{\partial\Omega}. \quad (7.25)$$

Частный случай: найти плотность заряда на проводящей заземленной плоскости с цилиндрической впадиной (рис.7.5.b.), индуцированного нитью, координаты которой $x_0=0$, $y_0=h > -r_0$. Построение функции $\zeta(z, z_0)$ для области Ω (рис.7.5.b) состоит из следующих этапов. Дробно-линейное отображение

$$z_1 = \lambda \frac{z - r_0}{z + r_0}, \quad \lambda > 0$$

переводит область Ω в угол ($0 < \arg w < \frac{3\pi}{2}$), а точку $z_0 = ih$ — в $z_{10} = \lambda e^{i\alpha}$, $\alpha = 2 \operatorname{arccctg} \frac{h}{r_0}$. Степенная функция $z_2 = \sqrt[3]{z_1^2}$, (ее однозначная ветвь выделена условием $0 < \arg z_1 < 2\pi$), преобразует угол в полуплоскость **Im** $z_2 > 0$, а точку z_{10} — в точку $z_{20} = \lambda^{\frac{2}{3}} e^{\frac{2i\alpha}{3}}$. Дробно-линейная функция

$$\zeta = \frac{z_2 - z_{20}}{z_2 - \overline{z_{20}}}$$

преобразует полуплоскость **Im** z_2 в единичный круг. Определение плотности заряда по формуле (7.25) сводится к вычислению модуля производной

$$\frac{d\zeta}{dz} = e^{i\beta} \frac{z_2 - \overline{z_{20}}}{(z_2 - \overline{z_{20}})^2} \frac{dz_2}{dz} = \frac{8e^{i\beta} \lambda^{\frac{5}{3}} r_0 i \sin \frac{2\alpha}{3}}{3z_1^{\frac{1}{3}} (z_2 - \overline{z_{20}})^2 (z + r_0)^2}$$

в точках $\partial\Omega$. В этом случае $z = r_0 e^{i\varphi}$, $\pi < \varphi < 2\pi$, следовательно,

$$z - r_0 = 2ir_0 e^{\frac{i\varphi}{2}} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad z + r_0 = 2r_0 e^{\frac{i\varphi}{2}} \cos \frac{\varphi}{2},$$

и, в соответствии с выбранной ветвью, $z_2 = -\lambda^{\frac{2}{3}} \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right|^{\frac{2}{3}}$. В итоге

$$\sigma(\varphi) = \frac{2q \sin \frac{2\alpha}{3}}{3\pi r_0 \sin \varphi \left[(tg^2 \frac{\varphi}{2})^{\frac{1}{3}} + (ctg^2 \frac{\varphi}{2})^{\frac{1}{3}} + 2 \cos \frac{2\alpha}{3} \right]}.$$

Плотность заряда на остальной части проводника вычисляется аналогично (см. задачу 7.151).

7.134. Параллельно проводящей заземленной цилиндрической поверхности S расположена бесконечная нить с зарядом q на единицу длины. Поперечное сечение поверхности плоскостью xOy — простая линия $L = \partial\Omega$, где Ω — область, содержащая точки $z=\infty$ и $z_0=x_0+y_0$ (след нити на плоскости xOy). Определить плотность заряда, индуцированного на поверхности S .

7.135. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящей заземленной плоскости на расстоянии h от нее. Найти плотность заряда, индуцированного на плоскости.

7.136. Бесконечная нить, линейная плотность заряда которой q , расположена между проводящими параллельными заземленными плоскостями $y=0$ и $y=H$. Определить плотность заряда на плоскостях, если нить параллельна им и находится на расстоянии h от плоскости $y=0$.

7.137. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно краю проводящей полуплоскости ($x > 0, y = 0$), координаты следа нити ($r_0; \varphi_0$). Какова плотность заряда, индуцированного на полуплоскости?

7.138. Параллельно проводящей полосе, поперечное сечение которой отрезок ($-a < x < a, y=0$), расположена нить; заряд единицы длины нити q , координаты следа нити (x_0, y_0). Найти плотность заряда на полосе, если 1) $x_0=d>a, y_0=0$; 2) $x_0=0, y_0=h>0$.

7.139. Внутри двугранного угла ($0 < r$, $0 < \varphi < \alpha < 2\pi$) с проводящими заземленными гранями расположена параллельно ребру равномерно заряженная нить, заряд единицы длины которой q , координаты (r_0, φ_0) . Найти плотность заряда на гранях угла.

7.140. Параллельно оси проводящего заземленного цилиндра радиуса r_0 на расстоянии d от оси расположена нить с зарядом q на единицу длины. Найти плотность заряда на поверхности цилиндра и заряд q_1 на единицу длины, если 1) $d < r_0$; 2) $d > r_0$.

7.141. Внутри полого цилиндрического проводника, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), расположена параллельно оси бесконечная нить (заряд единицы длины q , координаты $r=h$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$). Определить плотность заряда на проводнике при условии, что он заземлен.

7.142. Над проводящей плоскостью ($y = 0$) с цилиндрическим выступом ($x^2 + y^2 = r_0^2$, $y > 0$) расположена (параллельно оси) нить с зарядом q на единицу длины. Найти плотность заряда на проводнике, если координаты нити $x = 0$, $y = h > r_0$.

7.143. Нить, линейная плотность заряда которой q , координаты $(x_0; y_0)$, расположена параллельно проводящим заземленным полуплоскостям ($x < -a$, $y = 0$) и ($x > a$, $y = 0$), где $a > 0$. Определить плотность заряда на полуплоскостях в следующих случаях: 1) $x_0 = d \in (-a, a)$, $y_0 = 0$, 2) $x_0 = 0$, $y_0 = h > 0$.

7.144. Решить предыдущую задачу, если координаты нити $x=0$, $y=d$, где 1) $|d| < a(\sqrt{2} - 1)$; 2) $|d| > a(\sqrt{2} - 1)$.

7.145. Параллельно проводящим заземленным плоскости ($y = 0$) и перпендикулярной к ней полуплоскости ($x = 0$, $y > H > 0$) расположена бесконечная нить, заряд единицы длины которой q , координаты (x_0, y_0) . Определить плотность заряда на проводниках, если $x_0 = 0$, $y_0 = h < H$.

7.146. Проводящая заземленная плоскость $y = 0$ имеет ребро ($x = 0, 0 \leq y < H$) и находится в поле равномерно заряженной нити, параллельной ребру. Найти плотность заряда на проводнике, если координаты нити ($x = 0, y = h > H$.)

7.147. Равномерно заряженная нить, линейная плотность заряда которой q , расположена параллельно проводящему заземленному цилиндру со щелью ($r=r_0, \alpha < \varphi < 2\pi - \alpha$), где $0 < \alpha < \pi$. Найти плотности σ_1 и σ_2 заряда соответственно на вогнутой и выпуклой сторонах поверхности, а также полный заряд (на единицу длины вдоль оси) каждой стороны, если координата нити 1) $z_0=0$; 2) $z_0=r_0 e^{i\psi}$, $-\alpha < \psi < \alpha$.

7.148. Поперечное сечение заземленного цилиндрического проводника — полукруг ($r < r_0, 0 < \varphi < \pi$). Вне цилиндра параллельно его оси расположена нить, координаты которой (x_0, y_0) , заряд единицы длины q . Найти плотность заряда на проводнике, если 1) $x_0=d, y_0=0$; 2) $x_0=0, y_0=h$.

7.149. Поперечное сечение полого заземленного цилиндрического проводника — область Ω , ограниченная окружностями S_1 и S_2 , длина общей хорды которых $2a$. Параллельно оси цилиндра расположена нить, линейная плотность заряда которой q . Определить заряд единицы длины (вдоль оси) поверхности, поперечное сечение которой — окружность S_1 , если координаты нити $x=0, y=d$, где 1) $d > a \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$; 2) $d < a \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

7.150. Внутри полого заземленного проводящего цилиндра, поперечным сечением которого является сектор ($r < r_0, 0 < \varphi < \alpha$), расположена параллельно оси бесконечная нить, линейная плотность заряда которой q , координаты $r=d, \varphi=\alpha/2$. Найти заряд единицы длины поверхности $r=r_0$.

7.151. Над проводящей заземленной плоскостью с цилиндрической впадиной расположена (параллельно оси) бесконечная нить с зарядом q на единицу длины. Определить плотность заряда на плоскости, если координаты нити ($x = 0, y = h > -r_0$).

7.152. Бесконечная нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно оси проводящего заземленного эллиптического цилиндра $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Определить плотность заряда на цилиндре, если координаты нити $x=d>a$, $y=0$.

7.153. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящим заземленным экранам, имеющим форму гиперболических цилиндров $x^2 - y^2 = 1$. Найти плотность заряда, индуцированного на экранах, если координата нити $z_0=0$.

7.154. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящей заземленной поверхности, имеющей форму гиперболического цилиндра ($x^2 - y^2 = 1$, $1 \leq x$). Найти плотность заряда, индуцированного на поверхности, если координата нити 1) $z_0=d>1$; 2) $z_0 = -\sqrt{2}$.

7.155. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящей заземленной поверхности $y^2=2px$, $p>0$. Найти плотность заряда на поверхности, если координата нити 1) $z_0 = -d$, $d>0$; 2) $z_0=p/2$.

7.156. Параллельно заземленному цилиндрическому проводнику с крестообразным поперечным сечением ($|x| < a$, $|y| < a$) расположена равномерно заряженная нить, линейная плотность заряда которой q , координаты $x = d>a$, $y = 0$. Определить плотность заряда на проводнике.

7.157. Параллельно проводящей цилиндрической поверхности с зарядом q_0 на единицу длины (вдоль оси) расположена бесконечная нить, линейная плотность заряда которой q . Поперечное сечение поверхности плоскостью xOy — простая ограниченная линия $L = \partial\Omega$, где Ω — область, которой принадлежат точки $z = \infty$ и $z_0=x_0+iy_0$ (след нити на плоскости xOy). Пусть функция $\zeta = \zeta(z)$ конформно отображает Ω на внешность единичного круга при условии $\zeta(\infty)=\infty$. Показать, что комплексный потенциал поля

зарядов

$$w(z) = 2qi \ln \frac{\zeta \bar{\zeta}_0 - 1}{\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} + 2(q + q_0)i \ln \frac{1}{\bar{\zeta}} + C, \quad \zeta_0 = \zeta(z_0).$$

7.158. Незаземленный проводящий цилиндр, радиус которого r_0 , заряд единицы длины q_0 , находится в поле бесконечной нити, линейная плотность заряда которой q ; нить расположена параллельно оси цилиндра на расстоянии $d > r_0$ от оси. Найти плотность заряда на поверхности цилиндра.

7.159. Бесконечная нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящей незаземленной полосе, поперечное сечение которой — отрезок $(-x < a, y = 0)$. Определить плотность заряда на полосе, если координаты нити 1. $x_0 = d > a, y_0 = 0$; 2. $x_0 = 0, y_0 = h > 0$.

7.160. Внутри полого проводящего цилиндра радиуса r_0 с зарядом q_0 на единицу длины находится нить линейная плотность заряда которой q ; нить расположена параллельно оси на расстоянии d от нее. Определить плотность заряда σ_- на внутренней и σ_+ на внешней сторонах поверхности цилиндра.

7.161. Параллельно оси проводящего незаземленного эллиптического цилиндра $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, заряд единицы длины которого q_0 , расположена нить; координаты нити $x = 0, y = d > b$, линейная плотность заряда q . Определить заряд q_1 единицы длины верхней части ($y > 0$) и q_2 — нижней части ($y < 0$) поверхности цилиндра.

7.162. В полупространстве ($y > 0$) параллельно границе $y = 0$ на расстоянии h от нее расположен прямолинейный проводник с током, с единицы длины которого выделяется тепловая мощность q . Температура полупространства не зависит от времени. Какова плотность теплового потока, проходящего через границу, если ее температура постоянна?

7.163. Внутри цилиндра радиуса r_0 параллельно оси на расстоянии d от нее расположен прямолинейный проводник с током, с единицы длины которого выделяется тепловая мощность q . Температура цилиндра не зависит от времени и постоянна на поверхности $r = r_0$. Определить плотность теплового потока, проходящего через поверхность цилиндра.

Пример 7.9. Параллельно цилиндрической поверхности S расположен линейный источник идеальной несжимаемой жидкости, мощность единицы длины которого q ; поперечное сечение поверхности плоскостью xOy — простая линия $L = \partial\Omega_z$, где Ω_z — область, содержащая точки $z_0 = \infty$ и $z_0 = x_0 + iy_0$ ((x_0, y_0) — координаты источника) (рис.7.14.) Построить комплексный потенциал поля скоростей жидкости и определить давление на поверхности S .

Поле скоростей линейного изотропного источника жидкости выражается формулой (7.17), в которой $N=q$, $A=V$:

$$V = \frac{q}{2\pi\rho_0\bar{z}}.$$

Отсюда и из (7.16) следует, что комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{q}{2\pi\rho_0} \ln z + C. \quad (7.26)$$

Чтобы найти комплексный потенциал скоростей жидкости, обтекающей поверхность S , нужно построить аналитическую функцию $\zeta = \zeta(z)$, конформно отображающую область Ω_z на всю плоскость (ζ) так, чтобы $\partial\Omega_z$ отобразилась в разрез, принадлежащий некоторой прямой, на которую отображается также и точка z_0 . При таком отображении образ границы $\partial\Omega_z$, которая является линией тока на плоскости (z), принадлежит одной из радиальных линий тока источника q на плоскости (ζ) (рис.7.14.)

Чтобы применить формулу (7.26) необходимо соблюсти условие $\zeta(\infty) = \infty$, которое следует из аналитичности функции $w' = \bar{V}$ в любой конечной точке $z \in \Omega_z$, отличной от z_0 ; тогда

$$w(z) = \frac{q}{2\pi\rho_0} \ln[\zeta(z) - \zeta(z_0)] + C.$$

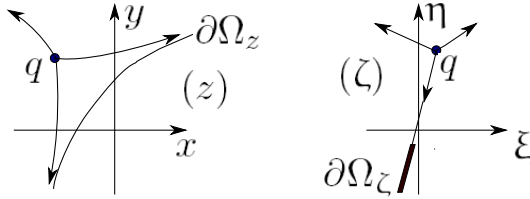


Рис. 7.14

Если уравнение (7.15) записать в виде

$$\nabla \left(\frac{|V|^2}{2} + P \right) = 0$$

и проинтегрировать, то получится соотношение

$$\frac{|V|^2}{2} + P = C, \quad C = \left(\frac{|V|^2}{2} + P \right) \Big|_{z=\infty}.$$

Следовательно, давление на S

$$P = P_0 + \frac{\rho_0}{2} (|V(\infty)|^2 - |w'(z)|^2), \quad z \in \partial\Omega. \quad (7.27)$$

Пусть S — плоскость ($y = 0$) с цилиндрическим выступом ($x^2 + y^2 = r_0^2$, $y > 0$.) Параллельно оси цилиндра расположен линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q , координата $z_0 = id$, $d > r_0$. В данном случае отображение $\zeta(z)$ — композиция двух отображений, реализуемых степенной функцией $z_1 = z^2/r_0^2$ и функцией Жуковского $\zeta = (z_1 + 1/z_1)/2$; таким образом комплексный потенциал

$$w(z) = \frac{q}{2\pi\rho_0} \ln \frac{(z^2 - h^2)(z^2 h^2 - r_0^4)}{z^2}.$$

Так как здесь $V(\infty)=0$, то при $z=x$ и $z=r_0e^{i\varphi}$

$$P(x) = P_0 - \frac{1}{2} \left[\frac{qh^2(r_0^4 - x^4)}{\pi x(h^2 - x^2)(r_0^4 - h^2x^2)} \right]^2, \quad |x| > r_0,$$

$$P(\varphi) = P_0 - \left[\frac{2qr_0h^2 \sin 2\varphi}{\pi(r_0^4 + h^4 - 2r_0^2h^2 \cos 2\varphi)} \right]^2, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

7.164. Внутри двугранного угла ($0 < r, \varphi < \frac{\pi}{2}$) параллельно ребру расположен линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $r=r_0, \varphi=\frac{\pi}{4}$. Найти потенциал скоростей.

7.165. Вне двугранного угла ($0 < r, \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$) параллельно ребру расположен линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $r=r_0, \varphi=\frac{3\pi}{4}$. Определить потенциал скоростей жидкости.

7.166. Параллельно ребру двугранного угла ($0 < x, 0 < y$) расположены два линейных источника жидкости, мощность единицы длины и координаты которых равны q, z_1 и $-q, z_2$ соответственно. Построить комплексный потенциал поля скоростей жидкости, если 1) $z_1=r_0, z_2=ir_0$, 2) $z_1=r_0e^{i\pi/4}, z_2=0$.

7.167. В полупространстве ($0 < y$) параллельно границе $y=0$ на расстоянии h от нее расположен линейный источник жидкости мощности q на единицу длины. Найти давление на плоскость $y=0$, если $P(\infty)=P_0$.

7.168. Линейный источник жидкости расположен параллельно полосе $|x| < a, y=0$; мощность единицы длины источника q , его координаты $x=0, y=h>0$. Какова скорость жидкости в точках полосы при условии полного потенциального обтекания?

7.169. Линейный источник жидкости расположен параллельно цилиндрической поверхности, поперечное сечение которой — дуга окружности ($r = r_0, \pi - \alpha < \varphi < \alpha, |\alpha| < \pi$). Определить

скорость жидкости в точках поверхности, если мощность единицы длины источника q , его координаты $x=y=0$.

7.170. Линейный источник жидкости расположен внутри двугранного угла ($0 < r$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) параллельно ребру; мощность источника на единицу длины q , координаты (r_0, φ_0) . Определить давление на каждую грань, если $P(\infty) = P_0$.

7.171. Линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $(r_0; \varphi_0)$, расположен параллельно краю полуплоскости ($0 < x$, $y = 0$). Найти давление на полуплоскость, если $P(\infty) = P_0$.

7.172. Между двумя плоскостями $y = \pm H$ параллельно им расположен линейный источник жидкости; мощность единицы длины источника q , его координаты $x=y=0$. Найти скорость жидкости в точках $(x, \pm H)$.

7.173. Параллельно оси цилиндра, радиус которого r_0 , на расстоянии $d > r_0$ от оси расположен линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q . Найти давление на поверхности цилиндра, если $P(\infty) = P_0$.

7.174. В плоскости ($y=0$) имеется щель ($-\frac{H}{2} < y < \frac{H}{2}$), параллельно которой расположен прямолинейный источник жидкости (мощность единицы длины q , координаты $x=h$, $y=0$). Определить скорость жидкости в сечении $y=0$

7.175. Линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты (x_0, y_0) , помещен параллельно плоскости ($y = 0$) и полуплоскости ($x = 0$, $0 < H < y$). Найти расход жидкости через отрезок ($x=0$, $0 < y < H$).

7.176. Внутри двугранного угла ($0 < x$, $0 < y$) параллельно ребру расположены два линейных источника жидкости; мощность единицы длины каждого из них q , координаты $r_0 e^{\frac{\pi i}{8}}$ и $r_0 e^{\frac{3\pi i}{8}}$. Определить комплексный потенциал скоростей жидкости.

7.177. Внутри двугранного угла ($0 < \varphi < \alpha$) параллельно ребру расположены два линейных источника жидкости, мощность единицы длины которых q и $-q$, координаты $r_0 e^{i\beta}$ и $r_0 e^{i(\alpha-\beta)}$, где $2\beta < \alpha$. Найти точки, в которых скорость жидкости равна нулю.

7.178. Параллельно оси неподвижного цилиндра, поперечным сечением которого служит полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), расположен линейный источник идеальной несжимаемой жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $x=0$, $y=-r_0$. Определить скорость жидкости на поверхности цилиндра.

7.179. Над плоскостью ($y=0$) с цилиндрической впадиной ($x^2 + y^2 = r_0^2$, $y < 0$) параллельно оси цилиндра расположен линейный источник идеальной несжимаемой жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $x=0$, $y=d$, $d > -r_0$. Найти скорость жидкости на поверхности, ограничивающей поток.

7.180. Параллельно ребру клина ($-\alpha < \varphi < \alpha$) расположены линейный источник идеальной несжимаемой жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $x=-d < 0$, $y=0$. Построить комплексный потенциал поля скоростей и найти скорость жидкости на гранях клина.

7.181. Решить предыдущую задачу для источника, координаты которого $x=0$, $y=d > a(\sqrt{2}-1)$.

7.182. Параллельно оси неограниченного эллиптического цилиндра ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$) расположен линейный источник жидкости, координаты которого $x=d > a$, $y=0$, мощность единицы длины q . Найти скорость жидкости на поверхности цилиндра.

7.183. Решить предыдущую задачу для источника, координаты которого $x=0$, $y=d > b$.

7.184. Параллельно оси параболического цилиндра ($y^2 = 2px$, $p > 0$) расположен линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $x=-d$, $y=0$, где $d > 0$. Определить скорость жидкости на поверхности цилиндра.

7.185. Решить предыдущую задачу для источника, координаты которого $x=p/2$, $y=0$.

7.186. Параллельно оси гиперболического цилиндра ($x^2-y^2=1$), $1 \leq x$ расположен линейный источник жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $x=y=0$. Определить скорость жидкости на поверхности цилиндра.

7.187. Решить предыдущую задачу для источника, координаты которого $x=\sqrt{2}$, $y=0$.

7.188. В пространстве между двумя гиперболическими цилиндрами $x=\pm\sqrt{y^2+1}$ расположен (параллельно образующей) линейный источник идеальной несжимаемой жидкости, мощность единицы длины которого q , координаты $x=y=0$. Определить скорость жидкости на поверхности цилиндров.

7.189. В однородном изотропном пространстве с проводимостью σ находится прямая, с единицы длины которой равномерно по направлениям, перпендикулярным прямой, поступает ток J . Определить комплексный потенциал поля токов.

7.190. Среда с проводимостью σ заполняет полупространство $y>0$. Ток втекает и вытекает через прямые ($x=-a$, $y=0$) и ($x=a$, $y=0$), перпендикулярные плоскости xOy , и распределен вдоль них с постоянной плотностью J . Определить комплексный потенциал поля токов и линии тока.

7.191. В клине ($0<\varphi<\alpha$), проводимость которого σ , течет постоянный ток. Ток втекает и вытекает через прямые, расположенные на гранях $\varphi=0$ и $\varphi=\alpha$ соответственно; обе прямые параллельны ребру клина и отстоят от ребра на расстоянии a . Определить комплексный потенциал поля токов и объемную плотность тока, если линейная плотность тока вдоль прямых постоянна и равна J .

7.192. В длинном проводящем цилиндре, поперечное сечение которого — сектор ($r<r_0$, $-\alpha<\varphi<\alpha$), течет постоянный ток. Ток

втекает и вытекает через прямые, расположенные на гранях $\varphi = -\alpha$ и $\varphi = \alpha$ соответственно; обе прямые параллельны оси цилиндра и отстоят от оси на расстоянии $a < r_0$. Найти комплексный потенциал поля токов, если линейная плотность тока вдоль прямых постоянна и равна J ; проводимость цилиндра равна σ .

7.193. В однородном проводящем слое ($0 < y < H$) находится заряженная нить, расположенная параллельно плоскости ($y=0$) и отстоящая от нее на расстоянии y_0 ($0 < y_0 < H$). С единицы длины нити в единицу времени стекает заряд J . Найти потенциал электрического поля в слое, если внешняя среда не проводит электричества. При $y_0 = H/2$ найти плотность тока в слое.

7.194. Постоянный ток J втекает в круглую пластинку, радиус которой r_0 , толщина d , через образующую ($r = r_0, \varphi = \pi$) и вытекает через образующую ($r = r_0, \varphi = 0$) соответственно, вдоль которых он распределен равномерно. Найти комплексный потенциал поля токов и плотность тока в пластинке, если ее проводимость σ .

7.195. Цилиндр ($r < r_0, \leq \varphi < 2\pi$), радиус которого r_0 , проводимость σ , находится в непроводящей среде. Внутри цилиндра параллельно оси расположены два линейных источника тока, координаты которых ($x=-a, y=0$) и ($x=a, y=0$), а заряд, испускаемый ими с единицы длины в единицу времени равен соответственно $-J$ и J . Найти комплексный потенциал поля токов и плотность тока в сечении 1) $x=0$; 2) $y=0$.

7.196. В полукруглой проводящей пластинке ($r < r_0, 0 < \varphi < \pi$), толщина которой d , течет постоянный ток J . Ток втекает и вытекает через образующие ($x=0, y=0$) и ($r=r_0, \varphi = \frac{\pi}{2}$) соответственно, вдоль которых он распределен равномерно. Определить плотность тока в пластинке.

7.197. В однородной проводящей полуограниченной пластинке ($0 < x, |y| < \frac{H}{2}, |z| < d$), течет постоянный ток J . Ток втекает

через торец по образующей ($x = 0, y = 0$), по которой он распределен равномерно. Определить плотность тока в пластинке.

7.198. Параллельно оси железного цилиндра (радиус r_0 , $\mu \gg 1$) на расстоянии $d > r_0$ от оси расположен прямой ток J . Найти векторный потенциал магнитного поля.

7.199. Постоянный ток J втекает в проводящую цилиндрическую оболочку ($r = r_0$, $-\pi \leq \varphi < \pi$, $-\infty < z < \infty$) через точку с координатами $r = r_0$, $\varphi = 0$, $z = 0$. Найти плотность тока в оболочке.

7.200. Постоянный ток J втекает в проводящую цилиндрическую оболочку ($r = r_0$, $0 < \varphi < \pi$, $-\infty < z < \infty$) через точку с координатами $r = r_0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $z = 0$. Определить плотность тока в оболочке.

7.201. Через точку ($x = 0, y = r_0, z = 0$) в проводящую цилиндрическую оболочку ($x^2 + y^2 = r_0^2$, $y < 0$, $-\infty < z < \infty$), расположенную на заземленном проводящем основании ($y = 0$), втекает постоянный ток J . Найти плотность тока в оболочке.

7.202. В пластинке ($-\infty < x < \infty$, $0 < y < H$, $|z| < \frac{d}{2}$) течет постоянный ток J . Ток втекает через отрезок ($x = 0, y = 0, |z| < \frac{d}{2}$) и равномерно распределен по отрезку. Найти плотность тока в пластинке.

7.203. В пластинке ($-\infty < x < \infty$, $0 < y < H$, $|z| < \frac{d}{2}$) течет постоянный ток J . Ток втекает и вытекает через отрезки длины ($x = 0, y = 0, |z| < \frac{d}{2}$) и ($x = 0, y = H, |z| < \frac{d}{2}$) соответственно. плоскости xOy , вдоль которых он распределен равномерно. Найти плотность тока в пластинке.

Пример 7.10. Найти силу, действующую на единицу длины равномерно заряженной нити, расположенной над проводящей заземленной плоскостью с цилиндрической впадиной (рис.7.5.б.) Поле $E(z)$ является суперпозицией поля $E_\sigma(z)$ зарядов, индуцированных на проводнике, и поля $E_q(z)$ нити, а соответствующий

комплексный потенциал $w(z) = w_\sigma(z) + w_q(z)$. Нить находится в поле $E_\sigma(z)$ и на нее действует сила, линейная плотность которой

$$F = q E_\sigma(z_0) = -iq\overline{w'}_\sigma(z_0). \quad (7.28)$$

Потенциал $w(z)$ определен выражением (7.9), куда входит функция $\zeta(z, z_0)$, построенная в примере 7.8, а потенциал $w_q(z)$ имеет вид (7.20). Таким образом,

$$w_\sigma(z) = 2qi \ln \frac{z - \zeta}{\zeta} + C = 2qi \ln \frac{(z_2 - \overline{z}_{20})(z - z_0)}{z_2 - z_{20}} + C.$$

Разность $z_2 - z_{20}$ содержит множитель $z - z_0$:

$$\begin{aligned} z_2 - z_{20} &= z_1^{\frac{2}{3}} - z_{10}^{\frac{2}{3}} \frac{z_1^2 - z_{10}^2}{z_1^{\frac{4}{3}} + z_1^{\frac{2}{3}} z_{10}^{\frac{2}{3}} + z_{10}^{\frac{4}{3}}} = \\ &= \frac{z_1 + z_{10}}{z_1^{\frac{4}{3}} + z_1^{\frac{2}{3}} z_{10}^{\frac{2}{3}} + z_{10}^{\frac{4}{3}}} \cdot \frac{2r_0}{z_0 + r_0} \cdot \frac{z - r_0}{z + r_0}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$w_\sigma(z) = 2qi \ln \frac{(z_2 - \overline{z}_{20})(z_1^{\frac{4}{3}} + z_1^{\frac{2}{3}} z_{10}^{\frac{2}{3}} + z_{10}^{\frac{4}{3}})(z + r_0)(z_0 + r_0)}{2r_0(z_1 + z_{10})} + C,$$

откуда

$$\begin{aligned} w'_\sigma(z_0) &= 2qi \left[\frac{2z'_1(z_0)}{3z_{10}^{\frac{1}{3}}(z_{20} - \overline{z}_{20})} + \frac{2z_{10}^{\frac{1}{3}}z'_1(z_0)}{3z_{10}^{\frac{4}{3}}} - \frac{z'_1(z_0)}{2z_{10}} + \frac{1}{z + r_0} \right] = \\ &= 2qi \left[\frac{z'_1(z_0)}{\lambda} \left(\frac{e^{-i\frac{\alpha}{3}}}{3i \sin \frac{2\alpha}{3}} + \frac{1}{6}e^{-i\alpha} \right) + \frac{1}{r_0 + ih} \right]. \end{aligned}$$

Так как $z_0 + r_0 = (z_0 - r_0)e^{-i\alpha} = -(r_0 - ih)r^{-i\alpha}$, то

$$z'_1(z_0) = \lambda \frac{2r_0}{(z_0 + r_0)^2} = -\lambda \frac{2r_0 e^{i\alpha}}{r_0^2 + h^2}.$$

Следовательно,

$$w'_\sigma(z_0) = \frac{2qr_0i}{r_0^2 + h^2} \left(-\frac{2e^{\frac{2i\alpha}{3}}}{3i \sin \frac{2\alpha}{3}} + \frac{2}{3} - i\frac{h}{r_0} \right) = \frac{2qr_0}{r_0^2 + h^2} \left(\frac{h}{r_0} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \frac{2\alpha}{3} \right).$$

Подстановка $w'_\sigma(z_0)$ в (7.28) дает

$$F = -\frac{2q_2r_0}{r_0^2 + h^2} \left(\frac{h}{r_0} - \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \frac{2\alpha}{3} \right) i.$$

7.204. Нить, линейная плотность заряда которой q , расположена параллельно проводящей заземленной плоскости на расстоянии h от нее. Какая сила действует на единицу длины нити?

7.205. Нить, координаты которой $r=r_0$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$, линейная плотность заряда q , расположена параллельно ребру двугранного угла ($\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$), изготовленного из проводящего материала. Какая сила действует на единицу длины нити, если проводник заземлен?

7.206. Какая сила действует на единицу длины равномерно заряженной нити (заряд единицы длины q , координаты r_0, φ_0), расположенной параллельно краю проводящей заземленной полуплоскости ($0 < x, y = 0$)?

7.207. Двугранный угол ($0 < \varphi < \alpha \leq 2\pi$) образован двумя проводящими заземленными полуплоскостями. Внутри угла параллельно ребру расположена нить с зарядом q на единицу длины. Найти линейную плотность силы, действующей на нить, если ее координаты $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$, где $0 < \varphi_0 < \alpha$.

7.208. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящей заземленной полосе ($|x| < a, y = 0$). Найти линейную плотность силы, действующей на нить, если координаты нити 1) $x=d>a, y=0$; 2) $x=0, y=h>0$.

7.209. Бесконечная нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно краю каждой из проводящих заземленных полуплоскостей ($x < -a, y = 0$) и ($x > a, y = 0$). Найти линейную плотность силы, действующей на нить, если координаты нити 1) $x=d \in (-a, a), y=0$; 2) $x=0, y=h < 0$.

7.210. Параллельно проводящим заземленным плоскости ($y = 0$) и полуплоскости ($x = 0, 0 < y < H$) расположена нить, линейная плотность заряда которой q , координаты $x_0=0, y_0=h$, где $0 < h < H$. Найти силу, действующую на единицу длины нити.

7.211. Равномерно заряженная нить расположена параллельно заземленному цилиндрическому проводнику, поперечное сечение которого и положение нити описаны в задаче 7.146. Определить силу, действующую на единицу длины нити.

7.212. Заземленная проводящая плоскость ($y = 0$) имеет ребро ($x = 0, 0 < y < h$). Параллельно ребру расположена нить, линейная плотность заряда которой q , координаты $x=0, y=d > h$. Определить силу, действующую на единицу длины нити.

7.213. С какой силой действует равномерно заряженная нить (линейная плотность заряда q) на единицу длины полого проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0 , если нить параллельна оси цилиндра и находится на расстоянии d от нее. Рассмотреть случаи: 1) $d < r_0$; 2) $d > r_0$.

7.214. Вне проводящего заземленного цилиндра, поперечным сечением которого является полукруг ($0 < r_0, 0 < \varphi < \pi$), параллельно оси расположена нить с зарядом q на единицу длины. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если ее координаты 1) $x=d, y=0$; 2) $x=0, y=h$; рассмотреть частный случай $x=0, y=-r_0(\sqrt{2}-1)$.

7.215. Поперечное сечение полого проводящего цилиндра — пересечение двух кругов с центрами $O_1(0, a)$ и $O_2(0, -a)$, длина общей хорды кругов $2a$. Параллельно оси цилиндра расположена

нить, заряд единицы длины которой q , координаты $x=d$, $y=0$, где 1) $|d| < a$ 2) $|d| > a$. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если цилиндр заземлен.

7.216. Решить предыдущую задачу для нити, координаты которой $x=0$, $y=d$, где 1) $|d| < a(\sqrt{2} - 1)$ 2) $|d| > a(\sqrt{2} - 1)$.

7.217. Два проводящих заземленных цилиндра, радиусы которых $r_1=r_2=r_0$, касаются по образующей. Параллельно цилиндрам расположена бесконечная нить с зарядом q на единицу длины. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если ее координаты 1) $x=0$, $y=d$; 2) $x=d > 2r_0$, $y=0$.

7.218. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящей заземленной цилиндрической поверхности, поперечным сечением которой является полуокружность ($r = r_0$, $|\varphi| > \frac{\pi}{2}$). Определить линейную плотность силы, действующей на нить, координаты которой $(x; 0)$.

7.219. Внутри заземленной металлической коробки расположена равномерно заряженная нить (рис.7.15.а.) Какая сила действует

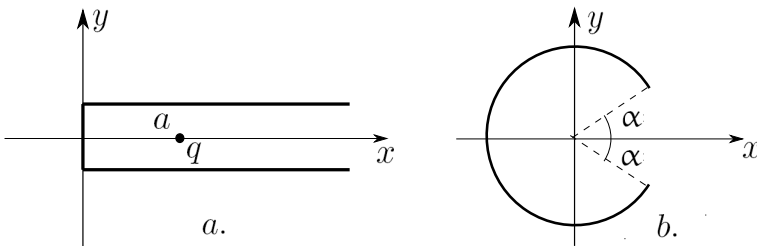


Рис. 7.15

на единицу длины нити?

7.220. Параллельно проводящему заземленному цилиндру со щелью (рис.7.15.b.) расположена равномерно заряженная нить.

Найти линейную плотность силы, действующей на нить, если заряд единицы длины нити равен q , ее координаты: 1) $x=y=0$; 2) $r=r_0$, $\varphi=\varphi_0$, где $-\alpha<\varphi_0<\alpha$.

7.221. Проводящая заземленная поверхность представляет собой плоскость ($y=0$) с цилиндрическим выступом в форме полукруга ($x^2+y^2<r_0$, $y>0$). Перпендикулярно к плоскости xOy расположена нить с зарядом q на единицу длины, координаты которой $x=0$, $y=d>r_0$. Найти линейную плотность силы, действующую на нить.

7.222. Нить с зарядом q на единицу длины расположена между проводящими заземленными плоскостями $y=0$ и $y=H$ параллельно им на расстоянии h от плоскости $y=0$. Определить линейную плотность силы, действующей на нить.

7.223. Между параллельными проводящими плоскостями ($y=0$) и ($y=H$), одна из которых ($y=0$) имеет ребро ($x=0$, $0<y<h<H$), расположена (параллельно ребру) нить с зарядом q на единицу длины. Найти линейную плотность силы, действующей на нить, если ее координаты $x=0$, $y=d$, где $h<d<H$.

7.224. Определить линейную плотность силы, с которой действует равномерно заряженная нить на заземленный проводник с крестообразным поперечным сечением ($|x|<a$, $|y|<a$); заряд единицы длины нити q , ее координаты: $x=d>a$, $y=0$.

7.225. Параллельно заземленному цилиндрическому проводнику с T -образным поперечным сечением ($|x|<a$, $0<y<a$) расположена нить, заряд единицы длины которой q , координаты $x=0$, $y=a\sqrt{3}$. Найти линейную плотность силы, действующей на нить.

7.226. Решить предыдущую задачу для нити, координаты которой $x=0$, $y=-a$.

7.227. Определить линейную плотность силы, с которой действует равномерно заряженная нить на заземленный проводящий эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; заряд единицы длины нити q , ее координаты: $x=d>a$, $y=0$.

7.228. Бесконечная нить с линейной плотностью заряда q расположена параллельно заземленному проводящему эллиптическому цилиндру $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Какая сила действует на единицу длины нити, если ее координаты $x=0$, $y=d>b$?

7.229. Проводящая заземленная поверхность представляет собой плоскость с цилиндрическим выступом в форме полуэллипса ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y > 0$, $a > b$). Перпендикулярно плоскости xOy расположена нить, линейная плотность заряда которой q , координаты $x=0$, $y=d>b$. Определить силу, действующую на единицу длины нити.

7.230. Решить предыдущую задачу для плоскости с цилиндрическим выступом в форме полуэллипса ($\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, $y > 0$, $a > b$); координаты нити $x=0$, $y=d>a$.

7.231. Два проводящих заземленных экрана имеют форму гиперболических цилиндров ($x = \pm \sqrt{y^2 + 1}$, $-\infty < y < \infty$). Параллельно им расположена нить с зарядом q , на единицу длины. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если координата нити 1) $z_0=d$, $-1 < d < 1$; 2) $z_0=ih$, $-\infty < h < \infty$.

7.232. Нить с зарядом q на единицу длины расположена параллельно проводящей заземленной цилиндрической поверхности $x^2 - y^2 = 1$. Определить линейную плотность силы, действующей на нить, если координата нити 1) $z_0=d>1$; 2) $z_0 = -\sqrt{2}$?

7.233. Нить, заряд единицы длины которой q , расположена параллельно проводящей заземленной цилиндрической поверхности $y^2 = 2px$, $p>0$. Найти линейную плотность силы, действующей на нить, если координата нити 1) $z_0 = -d$, $d>0$; 2) $z_0=p/2$.

7.234. Параллельно проводящему незаземленному цилиндру, радиус которого r_0 , на расстоянии $d > r_0$ от оси расположена бесконечная нить с зарядом q на единицу длины. Найти линейную плотность силы, действующей на нить.

7.235. Параллельно проводящей незаземленной полосе с поперечным сечением $(-a < x < a, y=0)$ расположена нить, линейная плотность заряда которой q , координаты (x_0, y_0) . Найти силу, действующую на единицу длины нити в следующих случаях:

$$1) x_0 = d > a, y_0 = 0; \quad 2) x_0 = 0, y_0 = h > 0.$$

7.236. Определить линейную плотность силы, с которой действует равномерно заряженная нить на незаземленный проводящий эллиптический цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; заряд единицы длины нити q , ее координаты: $x = d > a, y = 0$.

Пример 7.11. Найти комплексный потенциал электростатического поля прямой, линейная плотность дипольного момента которой p , где p — постоянный вектор, перпендикулярный прямой. Установить закон преобразования дипольного момента при конформном отображении.

Комплексный потенциал конечного диполя, образованного линейными зарядами q и $-q$ с координатами z_0 и $z_0 + \Delta z$ соответственно, равен сумме комплексных потенциалов (7.20)

$$\begin{aligned} -2qi \ln \frac{1}{z - z_0} + 2qi \ln \frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} + C &= \\ &= 2qi \Delta z \frac{\ln(z - z_0) - \ln(z - z_0 - \Delta z)}{\Delta z} + C. \end{aligned}$$

Если устремить Δz к нулю при постоянном $p = q\Delta z$, то в пределе получится комплексный потенциал точечного двумерного диполя

$$w(z) = \frac{2qi}{z - z_0} + C. \quad (7.29)$$

Закон преобразования дипольного момента можно найти так же, как это сделано в примере 7.6, а именно, посредством замены

переменных в уравнении Пуассона $\Delta u = -4\pi\rho$. Плотность заряда диполя выражается через производную δ -функции по направлению вектора p (задача 10.59) и имеет в записи (7.8) вид $\rho = -\mathbf{Re}(\bar{p}\nabla\delta(x-x_0, y-y_0))$. После замены переменных (7.23) уравнение Пуассона приобретает форму

$$|\zeta'(z)|^2 \Delta U 4\pi\mathbf{Re} \left[\bar{p} \left(\nabla\xi \frac{\partial}{\partial\xi} + \nabla\eta \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \delta(x-x_0, y-y_0) \right].$$

По правилу замены переменных (10.36) в обобщенной функции

$$\begin{aligned} & \left(\nabla\xi \frac{\partial}{\partial\xi} + \nabla\eta \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \delta(x-x_0, y-y_0) = \\ & = \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right|^{-1} \left(\nabla\xi|_{z=z_0} \frac{\partial}{\partial\xi} + \nabla\eta|_{z=z_0} \frac{\partial}{\partial\eta} \right) \delta(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$ удовлетворяют условиям Коши-Римана, поэтому

$$\nabla\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x} + i\frac{\partial\xi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x} - i\frac{\partial\eta}{\partial x} = \overline{\zeta'(z)}, \quad \nabla\eta = i\overline{\zeta'(z)},$$

следовательно, правая часть уравнения (7.30) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} |\zeta'(z)|^2 \overline{\zeta'(z_0)} \left(\frac{\partial}{\partial\xi} + i\frac{\partial}{\partial\eta} \right) \delta(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0) = \\ = |\zeta'(z)|^2 \overline{\zeta'(z_0)} \nabla\delta(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0). \end{aligned}$$

В результате получается уравнение

$$\Delta U = 4\pi\mathbf{Re}(\overline{p\zeta'(z_0)}\nabla\delta(\xi-\xi_0, \eta-\eta_0)),$$

из которого следует, что дипольный момент преобразуется по закону

$$p \rightarrow p\zeta'(z_0).$$

7.237. На оси полого проводящего заземленного цилиндра, радиус которого r_0 , расположена нить, дипольный момент единицы длины которой p . Найти комплексный потенциал электростатического поля внутри цилиндра.

7.238. Поперечное сечение проводящей заземленной цилиндрической поверхности S представляет собой кусочно-гладкий контур, ограничивающий односвязную (в расширенной комплексной плоскости) область Ω . Параллельно поверхности расположена неограниченная нить, линейная плотность дипольного момента которой p , координата $z_0 \in \Omega$. Показать, что комплексный потенциал этой системы зарядов

$$w(z) = 2i \left[\frac{p \zeta'(z_0)}{\zeta(z)} - \overline{p \zeta'(z_0)} \zeta(z) \right] + \lambda, \quad \text{Im} \lambda = 0,$$

где функция $\zeta(z)$ конформно отображает область Ω на единичный круг, а точку z_0 — в его центр.

7.239. Показать, что при условиях предыдущей задачи плотность заряда, индуцированного на поверхности S заряженной нитью

$$\sigma(z) = -\frac{|\zeta'(z)|}{\pi} \text{Re}[p \zeta'(z_0) \overline{\zeta(z)}], \quad z \in \partial\Omega.$$

7.240. На расстоянии h от проводящей заземленной плоскости параллельно ей расположена нить, дипольный момент единицы длины которой p . Определить плотность заряда, индуцированного на плоскости, если вектор p составляет с положительным направлением оси Ox угол, равный 1) 0; 2) $\pi/2$; 3) $\pi/4$.

7.241. Параллельно ребру двугранного угла ($0 < \varphi < \alpha \leq 2\pi$), образованного двумя проводящими заземленными полуплоскостями, расположена заряженная нить, линейная плотность дипольного момента которой $p = |p| \exp(i\beta)$. Найти плотность заряда на гранях угла, если координата нити $z_0 = r_0 \exp(i\alpha/2)$.

7.242. Параллельно проводящему заземленному цилиндру радиуса r_0 расположена нить, дипольный момент единицы длины которой p , координаты $x=d < r_0$, $y=0$. Найти плотность заряда, индуцированного на цилиндре, а также заряд q_1 и дипольный момент p_1 единицы длины цилиндра, если вектор p направлен по оси Ox .

7.243. Решить предыдущую задачу для нити, дипольный момент которой направлен по оси Oy .

7.244. Решить задачу 7.242 для нити вне цилиндра.

7.245. Решить задачу 7.243 для нити вне цилиндра.

7.246. Между проводящими заземленными плоскостями $y=0$ и $y=H$ параллельно им на расстоянии h от плоскости $y=0$ расположена нить, дипольный момент единицы длины которой p . Определить плотность заряда, индуцированного на плоскостях, если вектор p 1) параллелен плоскостям; 2) перпендикулярен к плоскостям.

7.247. Параллельно проводящему заземленному эллиптическому цилиндру $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ расположена нить, дипольный момент единицы длины которой p , координаты $x=d > a$, $y=0$. Найти плотность заряда, индуцированного на цилиндре, а так же заряд q_1 и дипольный момент p_1 единицы длины цилиндра, если вектор p составляет с положительным направлением оси Ox угол, равный 1) 0; 2) $\pi/2$.

7.248. Показать, что сила, действующая на единицу длины нити при условиях задачи 7.238,

$$F = \overline{ip w''_{\sigma}(z_0)},$$

где $w_{\sigma}(z)$ — комплексный потенциал поля зарядов, индуцированных на проводящей поверхности S .

7.249. На расстоянии h от проводящей заземленной плоскости $y=0$ параллельно ей расположена нить, линейная плотность дипольного момента которой $p e^{i\beta}$, $p>0$. Какая сила действует на единицу длины нити?

7.250. Нить, дипольный момент единицы длины которой p , расположена между заземленными проводящими плоскостями $y=0$ и $y=H$ параллельно им на расстоянии h от плоскости $y=0$. Найти линейную плотность силы, действующей на нить.

7.251. Внутри двугранного угла ($0<r$, $0<\varphi<\alpha<2\pi$), образованного заземленными проводящими полуплоскостями, расположена параллельно ребру бесконечная нить, дипольный момент единицы длины которой $p e^{i\beta}$, $p>0$, координата $r_0 e^{i\varphi_0}$. Найти линейную плотность силы, действующей на нить.

7.252. Параллельно проводящему заземленному цилиндру, радиус которого r_0 на расстоянии $d>r_0$ от оси расположена нить, дипольный момент единицы длины которой $p e^{i\beta}$, $p>0$. Найти силу, действующую на единицу длины нити.

7.253. Решить предыдущую задачу для нити, расположенной внутри цилиндра.

Пример 7.12. Методом конформных отображений найти функцию Грина двумерной задачи Дирихле для области Ω . Рассмотреть случай $\Omega = \{x, y : -\infty < x < \infty, 0 < y\}$.

Согласно физическому смыслу функции Грина (см. пример 6.3) она представляет собой потенциал бесконечной нити с зарядом $q = \frac{1}{4\pi}$ на единицу длины, расположенной параллельно проводящей заземленной цилиндрической поверхности. В примере 7.8 построен соответствующий комплексный потенциал в виде (7.24). Электростатический потенциал

$$v = \operatorname{Im} w = 2q \ln \frac{1}{|\zeta(z, z_0)|} + \operatorname{Im} C.$$

Так как $v|_{\partial\Omega} = 0$, $|\zeta|_{\partial\Omega} = 1$, то $\mathbf{Im} C = 0$. Следовательно, функция Грина

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\zeta(z, z_0)|}.$$

Если Ω — полуплоскость, то ее отображение на единичный круг, в центр которого переходит точка z_0 , осуществляет дробно-линейная функция

$$\zeta(z, z_0) = e^{i\alpha} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Таким образом, функция Грина задачи Дирихле для полуплоскости

$$G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z - \bar{z}_0}{z - z_0} \right| = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Решение задачи Дирихле для полуплоскости

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, & -\infty < x < \infty, & 0 < y, \\ v(x, 0) &= f(x), & |v| < \infty \end{aligned}$$

определяется формулой

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^2 + y^2}. \quad (7.31)$$

7.254. Дана область $(0 < r, 0 < \varphi < \alpha < 2\pi)$; построить функцию Грина задачи Дирихле для этой области.

7.255. В области $(0 < r, 0 < \varphi < \pi/8)$ найти решение $v(r, \varphi)$ задачи Дирихле, если $v(r, 0) = v_0 \sin r$, $v(r, \pi/8) = 0$.

7.256. Решить краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0, & 0 < r, & 0 < \varphi < \frac{\pi}{8}, \\ v(r, 0) &= u_0 \sin r, & \frac{\partial v}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\frac{\pi}{8}} &= 0, & |v| < \infty. \end{aligned}$$

7.257. В области $(0 < r, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2n})$, где $n \in \mathbf{N}$, найти решение $v(r, \varphi)$ задачи Дирихле, если $v(r, 0) = v_0 \sin r$, $v(r, \frac{\pi}{2n}) = 0$.

7.258. Найти стационарное распределение температуры в двугранном угле $(0 < x, 0 < y)$, грань $y=0$ которого поддерживается при нулевой температуре, а через грань $x=0$ внутрь угла проходит тепловой поток плотности $q_0 \sin \alpha y$.

7.259. Грань $\varphi=0$ двугранного угла $(0 < r, 0 < \varphi < \pi/4)$ имеет нулевую температуру, а грань $\varphi=\pi/4$ теплоизолирована, кроме полосы $(0 < r < a)$, через которую внутрь угла поступает тепловой поток плотности $q_0 r/a$. Найти стационарную плотность потока через грань $\varphi=0$.

7.260. Получить функцию Грина внутренней задачи Дирихле для 1. круга, радиус которого r_0 ; 2 полукруга, радиус которого r_0 ; 3 неограниченной области $(r_0 < r, 0 < \varphi < \alpha < 2\pi)$.

7.261. Внутри длинного бруса, поперечным сечением которого является полукруг $(r < r_0, 0 < \varphi < \pi)$, помещен прямолинейный проводник с током, параллельный оси цилиндра. С единицы длины проводника выделяется тепловая мощность q , координаты проводника $r=h$, $\varphi=\pi/2$. Найти стационарную температуру бруса, если диаметральной плоскостью теплоизолирована, а остальная поверхность имеет температуру v_0 .

7.262. Построить функцию Грина задачи Дирихле для следующих областей: 1) полосы $(-\infty < x < \infty, 0 < y < H)$; 2) полуполосы $(0 < x, 0 < y < H)$.

7.263. Найти решение $v(x, y)$ задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полосе $(-\infty < x < \infty, 0 < y < H)$, если

$$\begin{array}{lll} 1) \ v(x, 0) = v_0 \sin x, & 2) \ v(x, 0) = 0, & 3) \ v(x, 0) = v_0 t h \frac{\pi x}{H}, \\ v(x, H) = 0; & v(x, H) = v_0 \cos x; & v(x, H) = 0. \end{array}$$

7.264. Поверхность $y=0$ слоя ($0 < y < H$) поддерживается при температуре $v_0 e^{-x} \eta(x)$, а поверхность $y=H$ — при нулевой температуре. Какой стационарный тепловой поток проходит через поверхность $y=0$?

7.265. Построить решение $v(x, y)$ задачи Дирихле для полуполосы ($0 < x$, $0 < y < H$), если

$$\begin{aligned} 1) \quad v(x, 0) = v(x, H) = v_0 \operatorname{th} \frac{\pi x}{H}, \quad 2) \quad v(0, y) = v_0 \sin \frac{\pi y}{H}, \\ v(0, y) = 0; \quad v(x, 0) = v(x, H) = 0. \end{aligned}$$

7.266. Найти решение $v(x, y)$ задачи Дирихле для полуполосы ($0 < x$, $0 < y < H$), если $v(0, y) = v_0 \cos y$, $v(x, 0) = v(x, \pi) = 0$.

7.267. В полуслой ($0 < x$, $0 < y < H$, $-\infty < z < \infty$) через торец $x=0$ входит тепловой поток постоянной плотности q_0 . Определить стационарную плотность потока через грани $y=0$ и $y=H$, если температура каждой из них постоянна.

7.268. Внутри бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), через поверхность $r=r_0$ поступает радиальный тепловой поток плотности q_0 . Определить стационарную плотность потока через диаметрально плоскость, если ее температура постоянна.

7.269. Грань $y=0$ двугранного угла ($0 < x$, $0 < y$) поддерживает при постоянной температуре v_0 , а грань $x=0$ — при нулевой температуре, кроме участка ($0 < x < a$), покрытого теплоизоляцией. Найти закон изменения температуры на участке ($0 < y < a$) при стационарном тепловом режиме.

7.270. Поперечным сечением неограниченного бруса служит полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$). Определить стационарную температуру бруса, если его диаметрально плоскость имеет нулевую температуру, а поверхность $r=r_0$ теплоизолирована кроме образующей ($r=r_0$, $\varphi=\pi/2$), через которую внутрь бруса поступает тепловой поток линейной плотности q .

7.271. Внутри бесконечного бруса, поперечным сечением которого служит полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), расположен параллельно оси прямолинейный проводник с током; координаты проводника $r = h$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, выделяемая с единицы длины мощность равна q . Определить стационарную температуру бруса, если его диаметральной плоскость имеет нулевую температуру, а поверхность $r = r_0$ теплоизолирована.

7.272. Найти стационарную температуру бруса, поперечное сечение которого — полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), если поверхность $r = r_0$ теплоизолирована, а диаметральной плоскость имеет температуру $v = v_0$ при $-r_0 < x < a$ и $v = 0$ при $a < x < r_0$, где $-r_0 < a < r_0$.

7.273. Постоянный ток J втекает в круглую пластинку, радиус которой r_0 , толщина h , через образующую ($r = r_0$, $\varphi = \pi$) и вытекает через образующую ($r = r_0$, $\varphi = 0$), вдоль которых он распределен равномерно. Определить комплексный потенциал электростатического поля и плотность тока в пластинке, если ее проводимость σ .

7.274. Внутри неограниченного бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), через диаметральной плоскость поступает тепловой поток постоянной плотности q_0 . Найти стационарную плотность потока через поверхность $r = r_0$, если ее температура постоянна.

7.275. Грань $\varphi = 0$ однородного клина ($0 < \varphi < \alpha$) поддерживается при нулевой температуре, а грань $\varphi = \alpha$ теплоизолирована на участке $r > r_0$ и имеет температуру v_0 на участке $0 < r < r_0$. Найти стационарную температуру теплоизолированного участка.

7.276. Поперечное сечение бруса — полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$). Часть диаметральной плоскости ($0 < r < r_0$, $\varphi = 0$) теплоизолирована, участок поверхности 1) ($r = r_0$, $0 < \varphi < \pi$); 2) ($r = r_0$, $0 < \varphi < \pi/2$) поддерживается при температуре v_0 , а оставшаяся поверхность — при нулевой температуре. Найти температуру теплоизолированной части при условии стационарности теплового режима.

7.277. Поперечное сечение бруса — область Ω , граница которой $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (рис.7.1). Часть Γ_1 границы имеет температуру v_0 , а другая (кусочно-гладкая) часть Γ_2 теплоизолирована. Определить стационарную температуру бруса.

7.278. Найти комплексный потенциал поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости при условиях задачи 1.230, если Ω_1 — полукруг, радиус которой r_0 , S_1 — полуокружность. Какова скорость жидкости на свободной поверхности и на поверхности S_1 ?

7.279. Длинный цилиндр плавает на поверхности воды (см. задачу 1.230); Ω_1 — полукруг, радиус которого r_0 , S_1 — полуокружность. В результате мгновенного воздействия цилиндр приобретает поступательную скорость V_1 , направленную по оси Oy . Показать, что скорость цилиндра после удара о воду

$$V_2 = \frac{mV_1}{m + \mu}, \quad \mu = 2\rho r_0^2,$$

где m и μ — соответственно масса и так называемая приведенная масса единицы длины цилиндра, ρ — плотность воды.

7.280. На поверхности идеальной несжимаемой жидкости плавает тонкая пластинка, ширина которой $2a$. Определить комплексный потенциал поля скоростей жидкости при условиях задачи 1.230, если S_1 — отрезок $[-a, a]$ оси Ox . Какова скорость жидкости на свободной поверхности и на поверхности S_1 ?

7.281. Найти приведенную массу единицы длины тонкой пластинки, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, если ширина пластинки $2a$ (см. задачу 7.279).

7.282. Определить комплексный потенциал поля скоростей идеальной несжимаемой жидкости при условиях задачи 1.230, если двумерная область $\Omega_1 = \{x, y : x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1, y > 0, a > b\}$. Какова скорость жидкости на свободной поверхности и на поверхности S_1 ?

7.283. Длинный цилиндр, поперечным сечением которого является область $\Omega_1 = \{x, y : x^2/a^2 + y^2/b^2 < 1, y > 0, a > b\}$ плавает на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (рис. 1.11). Определить приведенную массу единицы длины цилиндра.

Пример 7.13. Построить комплексный потенциал стационарного теплового поля в полупространстве $y > 0$, если температура плоскости $y = 0$ равна $f(x)$. Решить задачу в частном случае $f(x) = v_0 a^2 / (x^2 + a^2)$.

Решение задачи Дирихле для полуплоскости имеет вид (7.31). Так как

$$\frac{y}{(\xi - x)^2 + y^2} = \mathbf{Im} \frac{1}{\xi - x},$$

то выражение (7.31) является мнимой частью функции

$$w(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} + C, \quad \mathbf{Im} C = 0,$$

которая представляет собой (при условии сходимости интеграла) искомый комплексный потенциал.

В частном случае интеграл берется с помощью вычетов

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{v_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2 d\xi}{(\xi^2 + a^2)(\xi - z)} + C = \\ &= 2v_0 i \left(\frac{a^2}{z^2 + a^2} + \frac{a^2}{2ai(ai - z)} \right) + C = \\ &= \frac{2v_0 a^2 i}{z - ai} \left(\frac{1}{z + ai} - \frac{1}{2ai} \right) + C - \frac{v_0 a}{z + ai} + C, \end{aligned}$$

откуда

$$v(x, y) = \mathbf{Im} w = \frac{v_0 a (y + a)}{x^2 + (y + a)^2}.$$

7.284. Построить решение $u(x, y)$ задачи Дирихле для полуплоскости $y > 0$, если функция $u(x, 0)$ равна:

$$1) \frac{x}{x^2 + 1}; \quad 2) \frac{x^2}{x^2 + 1}; \quad 3) \frac{x}{(x^2 + 1)^2}; \quad 4) \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2}; \quad 5) \frac{1}{(x^2 + 1)^2}; \quad 6) \cos x.$$

7.285. Определить стационарную температуру в полупространстве $y > 0$, если температура границы $v_0 \frac{x}{a} [\eta(x) - \eta(x - a)]$, $a > 0$.

7.286. Найти решение задачи Дирихле в квадранте ($0 < x$, $0 < y$), если при $x=0$ оно равно нулю, а при $y=0$ принимает значение 1) $\frac{1}{x^2+1}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+1}$.

7.287. Найти стационарную температуру бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), если поверхность $r=r_0$ поддерживается при 0° , а температура диаметральной плоскости равна $v_0(r_0^2 - r^2)/(r_0^2 + r^2)$.

7.288. Диаметральная плоскость бруса, поперечным сечением которого является полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), поддерживается при температуре $v_0(r_0^2 - r^2)/(r_0^2 + r^2)$, а поверхность $r=r_0$ теплоизолирована. Определить температуру поверхности $r=r_0$,

7.289. Температура поверхности бесконечного цилиндра радиуса r_0 равна $f(\varphi)$. Показать, что комплексный потенциал стационарного теплового поля 1. внутри; 2. вне цилиндра

$$w_{1,2}(z) = \mp \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\psi) \frac{r_0 e^{i\psi} + z}{r_0 e^{i\psi} - z} d\psi, \quad z = r e^{i\varphi}.$$

7.290. Найти решение $v(r, \varphi)$ внутренней задачи Дирихле для круга, радиус которого r_0 , если $v(r_0, \varphi) = v_0 \cos \varphi / (2 + \cos \varphi)$.

7.291. Найти решение $v(r, \varphi)$ внешней задачи Дирихле для круга, радиус которого r_0 , если $v(r_0, \varphi) = v_0 / (4 + 3 \sin \varphi)$.

7.3. Комплексный потенциал точечного вихря

Пример 7.14. Точечный вихрь, расположенный в точке $z=0$, создает аксиально симметричное плоское поле A , силовыми линиями которого являются концентрические окружности с центром в точке $z=0$. Найти комплексный потенциал поля A .

В области Ω , не содержащей точку $z=0$, выполняются условия (7.1). Из теоремы Стокса для кольца S , ограниченного окружностями $|z| = r_1 > 0$ и $|z| = r_2 > r_1$,

$$\int_S (\operatorname{rot} A)_n ds = \int_{|z|=r_2} A_l dl - \int_{|z|=r_1} A_l dl$$

следует постоянство циркуляции

$$\Gamma = \int_{|z|=r} A_l dl.$$

Так как $A = f(|z|) \frac{iz}{|z|}$, то (см.(7.8))

$$\Gamma = \int_{|z|=r} f(|z|) \operatorname{Re} \left(\frac{iz}{|z|} \cdot \frac{\bar{iz}}{|z|} \right) |dz| 2\pi |z| f(|z|),$$

т.е.

$$A = \frac{i\Gamma z}{2\pi|z|^2} = \frac{i\Gamma}{2\pi\bar{z}}.$$

Из соотношения (7.4) вытекает, что

$$w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{z} + C. \quad (7.32)$$

7.292. Плоское поле A определено в области Ω и удовлетворяет условиям существования комплексного потенциала. Показать, что при конформном отображении области Ω циркуляция поля по контуру $L \in \Omega$ не меняется.

7.293. В трубе, поперечным сечением которой является концентрическое кольцо ($r_1 < r < r_2$), течет жидкость в направлении, перпендикулярном оси трубы. Найти скорость течения, если на окружностях $r=r_1$ и $r=r_2$ циркуляция скорости равна Γ .

7.294. В трубе, поперечным сечением которой является эксцентрическое кольцо (рис.7.9), течет жидкость в направлении, перпендикулярном оси трубы; циркуляция скорости на каждой из окружностей, ограничивающих кольцо, равна Γ . Найти скорость жидкости на поверхности трубы, если $r_1=16a$, $r_2=9a$, $d=5a$.

7.295. Два параллельных цилиндра (рис.7.11) вращаются в жидкости около своих осей, первый против, а второй по часовой стрелке. Найти скорость жидкости у поверхности цилиндров, если циркуляция скорости на окружностях $|z|=r_1$ и $|z-d|=r_2$ равна соответственно Γ и $-\Gamma$, $V(\infty)=0$, $r_1=9a$, $r_2=5a$, $d=28a$.

7.296. Построить комплексный потенциал магнитного поля прямого тока J .

7.297. Найти форму силовых линий магнитного поля двух прямых параллельных токов J_1 и J_2 , координаты которых $x_{1,2}=\mp a$, $y_{1,2}=0$, если 1. $J_1=J_2$; 2. $J_1=-J_2$.

7.298. Прямой ток J находится в однородной изотропной среде. Показать, что при конформном отображении величина тока не меняется.

7.299. Определить магнитное поле цилиндрического соленоида, поперечное сечение которого — ограниченная область Ω (см. задачу 1.341).

7.300. В среде, магнитная проницаемость которой $\mu=\infty$, имеется полость в форме двугранного угла ($0<\varphi<\alpha<2\pi$). Внутри угла параллельно ребру расположен прямой ток J , проходящий через точку с координатами $r=r_0$, $\varphi=\alpha/2$. Найти магнитное поле в полости.

7.301. В среде с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ имеется зазор, ограниченный плоскостями $y=\pm H$, внутри которого параллельно плоскостям на одинаковом расстоянии от них находится прямой ток J . Определить магнитное поле в зазоре.

7.302. В среде с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ имеется зазор, поперечное сечение которого — полуполоса ($0<x, |y|<H$). Найти магнитное поле в зазоре, обусловленное прямым током J , перпендикулярным к плоскости xOy ; координаты тока $x=a>0$, $y=0$.

7.303. Магнетик с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ заполняет полупространство $y < 0$. Вне магнетика параллельно границе $y = 0$ на расстоянии h от нее находится прямой ток J . Найти силу, действующую на единицу длины тока.

7.304. Прямой ток J расположен параллельно ребру двугранного угла ($0 < x, 0 < y$), магнитная проницаемость которого $\mu = \infty$. Определить линейную плотность силы, действующую на ток, если его координаты $x_0 = -d, y_0 = 0$, где $d > 0$?

7.305. В среде, магнитная проницаемость которой $\mu = \infty$, имеется полость в форме двугранного угла ($0 < \varphi < \alpha < 2\pi$). Внутри угла параллельно ребру расположен прямой ток J , проходящий через точку с координатами $r = r_0, \varphi = \varphi_0$. Определить силу, действующую на единицу длины тока.

7.306. Расстояние тока J от плоскости $y = H$ (см. задачу 7.301) равно $H - h, |h| < H$. Найти силу, действующую на единицу длины тока.

7.307. Определить силу, действующую на единицу длины тока, при условиях задачи 10.59.

7.308. Параллельно железному цилиндру (радиус $r_0, \mu \gg 1$) на расстоянии d от оси расположен прямой ток J . Найти силу, действующую на единицу длины тока.

7.309. Прямой ток J расположен параллельно эллиптическому цилиндру $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$, изготовленному из железа с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$. Определить силу, действующую на единицу длины тока, если его координаты $x = d > a, y = 0$.

7.310. Решить предыдущую задачу для тока, координаты которого $x = 0, y = d > b$.

7.311. Прямой ток J параллелен брусу, поперечное сечение которого — полукруг ($x^2 + y^2 = r_0^2, 0 < y$), магнитная проницаемость бруса $\mu \gg 1$. Определить силу, действующую на единицу длины тока, если его координаты $x = 0, y = d(\sqrt{2} + 1)r_0$.

7.312. Решить предыдущую задачу для тока, координаты которого $x=0$, $y=-r_0$.

7.313. Решить предыдущую задачу для тока, координаты которого $x=0$, $y=d$.

7.314. В среде с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ имеется цилиндрическая полость (радиус r_0 , $\mu=1$). Внутри полости параллельно оси расположены прямые токи $-J$ и J , координаты которых $(-d, 0)$ и $(d, 0)$ соответственно. Найти силу, действующую на единицу длины тока $-J$.

Пример 7.15. Обтекание круга. Бесконечный цилиндр находится в плоско-параллельном потоке идеальной несжимаемой жидкости (рис.7.16). Поперечное сечение цилиндра — круг B , радиус которого r_0 , внешность круга — область Ω . Считая течение безвихревым ($\forall z \in \Omega : \operatorname{rot} V = 0$), а обтекание полным, определить комплексный потенциал потока, если $V(\infty) = V_0 > 0$, а циркуляция скорости по любому кусочно-гладкому контуру, охватывающему круг B , равна Γ . Для бесциркуляционного обтекания (т.е. при $\Gamma = 0$) найти давление на поверхности цилиндра, если $P(\infty) = P_0$.

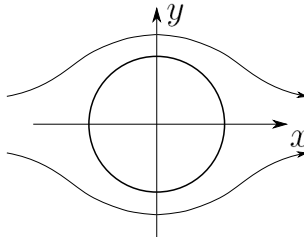


Рис. 7.16

Течение жидкости в области Ω описывается системой уравнений (7.14), (7.15). Условия (7.14) гарантируют существование комплексного потенциала $w(z)$ поля скоростей $V = \overline{w'}$. Пусть

$L \in \Omega$ — кусочно-гладкий замкнутый контур, тогда

$$\Gamma = \operatorname{Re} \int_L \bar{V} dz, \quad N = \operatorname{Re} \int_L \bar{V}(-i dz) = \operatorname{Im} \int_C \bar{V} dz.$$

Эти два выражения можно объединить:

$$\Gamma + i N = \int_L \bar{V} dz = \int_L w'(z) dz.$$

Скорость $V(z)$ — однозначная в Ω функция, предел которой при $z \rightarrow \infty$ равен V_0 , поэтому $w'(z) = \bar{V}(z)$ — однозначная аналитическая функция в той же области, имеющая на бесконечности устранимую особую точку. Следовательно, ряд Лорана этой функции в окрестности $z = \infty$ не содержит положительных степеней

$$w'(z) = \bar{V}(\infty) + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Коэффициент

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r>r_0} w'(z) dz = \frac{1}{2\pi i} (\Gamma + i N).$$

Так как в Ω источников нет, то $N=0$, и для функции $w(z)$ получается разложение

$$w(z) = \bar{V}(\infty) z + a_0 + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z - \frac{a_{-2}}{z} - \dots \quad (7.33)$$

В точках контура $\partial\Omega$ скорость направлена по касательной к контуру, следовательно, $\partial\Omega$ принадлежит семейству линий тока:

$$\operatorname{Im} w|_{\partial\Omega} = \operatorname{Const}. \quad (7.34)$$

Таким образом, комплексный потенциал $w(z)$ является аналитической в области Ω функцией, имеющей в окрестности точки $z=\infty$ разложение (7.33) и удовлетворяющей условию (7.34).

Поток, обтекающий цилиндр, есть суперпозиция двух потоков. Один из них — только циркуляционный, т.е. такой, для которого разложение (7.33) сводится к

$$w_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z;$$

функция $w_1(z)$ удовлетворяет условию (7.34) на окружности $\partial\Omega$ и, следовательно, является комплексным потенциалом. Второй поток бесциркуляционный. Так как $\Gamma=0$, то разложение (7.33) представляет собой однозначную аналитическую в области Ω функцию $w_2(z)$, которая при условии (7.34) конформно отображает внешность круга на внешность отрезка, параллельного вещественной оси плоскости (w_2), и удовлетворяет условиям (они вытекают из (7.33)):

$$w(\infty) = \infty, \quad w'(\infty) = \overline{V}(\infty). \quad (7.35)$$

В данном случае V_0 — вещественное число и $w_2(z)$ выражается через функцию Жуковского

$$w_2(z) = B \left(\frac{z}{r_0} + \frac{r_0}{z} \right),$$

которая удовлетворяет первому условию (7.35). Второе условие

$$V_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} B \left(\frac{1}{r_0} - \frac{r_0}{z^2} \right)$$

выполняется, если $B = r_0 V_0$, так что

$$w_2(z) = V_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right).$$

Результирующий комплексный потенциал (с точностью до аддитивной постоянной)

$$w(z) = V_0 \left(z + \frac{r_0^2}{z} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Если $\Gamma=0$, то поле скоростей

$$V = \overline{w'} = V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{z^2} \right) = V_0 \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} e^{-2i\varphi} \right).$$

Давление жидкости на поверхности цилиндра выражается формулой (7.27):

$$P(\varphi) = P_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{2} \left(1 - |1 - e^{2i\varphi}|^2 \right) P_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{2} (4 \cos^2 \varphi - 3).$$

7.315. Идеальная несжимаемая жидкость обтекает круг B , радиус которого r_0 . Скорость жидкости $V(\infty) = V_0 e^{i\alpha}$, $V_0 > 0$, циркуляция скорости по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру, охватывающему B , равна Γ . Построить комплексный потенциал потока.

7.316. При условиях предыдущей задачи найти точки, называемые критическими точками потока, в которых скорость равна нулю. Показать, что в зависимости от величины циркуляции Γ существует либо одна критическая точка (находящаяся вне B), либо две точки (расположенные на ∂B), в одной из которых (точке ветвления) линия тока разветвляется на две, а в другой (точке схода) обе линии сходятся. Показать, что между величиной Γ и координатами точки схода $z_2 = r_0 e^{i\varphi_2}$ имеется зависимость:

$$\Gamma = 4\pi V_0 r_0 \sin(\varphi_2 - \alpha). \quad (7.36)$$

7.317. Безвихревой поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает простой кусочно-гладкий замкнутый контур, внешность которого — область Ω . Скорость жидкости $V(\infty) = V_0 e^{i\alpha}$, $V_0 > 0$ и точка схода потока z_2 заданы. Показать, что комплексный потенциал поля скоростей жидкости

$$w(z) = \overline{V}(\infty) \zeta(z) + \frac{V(\infty) R_0^2}{\zeta(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \zeta(z) + C,$$

где функция $\zeta(z)$ конформно отображает область Ω на внешность круга, радиус которого R_0 ,

$$\zeta(\infty) = \infty, \quad \zeta'(\infty) = 1, \quad (7.37)$$

величина R_0 определена условиями (7.37), циркуляция выражается формулой (см. (7.36)) $\Gamma = 4\pi V_0 R_0 \sin(\theta - \alpha)$, в которой (R_0, θ) — координаты образа точки z_2 .

7.318. Неподвижный цилиндр, поперечным сечением которого служит полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), находится в бесциркуляционном потоке жидкости, перпендикулярном к оси цилиндра. Найти скорость жидкости на поверхности цилиндра, если 1) $V(\infty) = V_0$; 2) $V(\infty) = V_0 i$.

7.319. Неподвижный цилиндр, поперечное сечение которого — пересечение двух кругов с центрами $O_1(0; a)$, $O_2(0; -a)$, длина общей хорды которых $2a$, находится в бесциркуляционном потоке жидкости, перпендикулярном к оси цилиндра. Определить скорость потока в точках поверхности цилиндра, если 1) $V(\infty) = V_0$; 2) $V(\infty) = V_0 i$.

7.320. Бесциркуляционный поток идеальной несжимаемой жидкости обтекает полосу, поперечное сечение которой плоскостью xOy — отрезок ($|x| < a$, $y = 0$). Построить комплексный потенциал поля скоростей жидкости, если $V(\infty) = V_0 e^{i\alpha}$, где $V_0 > 0$. Какова скорость потока в точке 1 с координатами $(x_0, 0 + i0)$ и в точке 2 — с координатами $(x_0, 0 - i0)$, где $|x_0| < a$?

7.321. Цилиндрическая поверхность, поперечное сечение которой — дуга окружности $(x^2 + (y + r_0 \cos \beta)^2 = r_0^2, y > 0, 0 < \beta < \frac{\pi}{2})$, находится в бесциркуляционном потоке идеальной несжимаемой жидкости. Найти скорость жидкости в точках поверхности, если 1) $V(\infty) = V_0$; 2) $V(\infty) = V_0 i$.

7.322. Эллиптический цилиндр помещен в бесциркуляционный поток жидкости, скорость которого перпендикулярна оси цилиндра. Построить комплексный потенциал поля скоростей потока, если $V(\infty) = V_0 e^{i\alpha}$, $V_0 > 0$. Определить давление на поверхности цилиндра при условии $P(\infty) = P_0$.

7.323. Идеальная несжимаемая жидкость обтекает простой замкнутый кусочно-гладкий контур L . Считая течение безвихревым, вывести формулу Чаплыгина для полной силы P , действующей на контур L (т.е. на единицу длины цилиндра, поперечное сечение которого ограничено контуром L):

$$\overline{P} = \frac{\rho i}{2} \int_L |w'|^2 dz. \quad (7.38)$$

7.324. Какая сила действует на окружность $|z - a| = a$, находящуюся в потоке, комплексный потенциал которого

$$1) w(z) = \frac{N}{2\pi} \ln(z^2 - a^2); \quad 2) w(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{z - a}{z + a} ?$$

7.325. В трубе, поперечным сечением которой является эллиптическое кольцо (рис.7.9), течет идеальная несжимаемая жидкость в направлении, перпендикулярном оси трубы; циркуляция скорости на каждой из окружностей, ограничивающих кольцо, равна Γ . Определить силу, действующую на единицу длины (вдоль оси) внутренней поверхности трубы.

7.326. Простой кусочно-гладкий замкнутый контур L находится в безвихревом потоке идеальной несжимаемой жидкости, скорость которой на бесконечности $V_0 e^{i\alpha}$, $V_0 > 0$, а циркуляция скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему L , равна Γ . Доказать теорему Жуковского о подъемной силе P , действующей на контур L :

$$P = -i\rho\Gamma V_0.$$

7.327. Крыло находится в плоскопараллельном потоке идеального газа. Расчет подъемной силы крыла проводится при следующих предположениях (в системе отсчета, связанной с крылом).

1. Крыло трактуется как неограниченный цилиндр с образующей, перпендикулярной скорости потока.

2. При дозвуковых скоростях воздух считается идеальной несжимаемой жидкостью, а его движение — безвихревым; скорость потока на бесконечности $V_0 e^{i\alpha}$, $V_0 > 0$.

3. Для профиля (поперечного сечения крыла) с острой кромкой ставится условие Чаплыгина: точка схода находится на острие (отсюда следует ограниченность скорости у острия).

Найти подъемную силу, действующую на единицу длины полосы, поперечное сечение которой — отрезок $(-a \leq x \leq a)$; условие Чаплыгина поставить в точке $x=a$.

7.328. Длинная полоса, поперечное сечение которой — отрезок $(-a < x < a)$ оси Ox , находится в плоскопараллельном потоке идеального газа. При условиях предыдущей задачи определить поле скоростей газа, полагая, что точка с координатами $(x=-a, y=0)$ является точкой схода. Какова скорость газа на поверхности полосы?

7.329. Функция $\zeta = z + \sqrt{z^2 - a^2}$ отображает окружность L_{1z} с центром O_1 в дугу $L_{1\zeta}$ окружности с центром , а окружность L_{2z} с центром O_2 , $|\overline{O_1 O_2}| = d$, касательную к L_{1z} в точке $z=a$, — в замкнутый контур $L_{2\zeta}$, называемый профилем Жуковского (рис.7.17.) В предположениях задачи 7.327 вычислить подъемную силу, действующую на профиль Жуковского.

7.330. При условиях задачи 7.327 вычислить подъемную силу, действующую на единицу длины изогнутой полосы, поперечное сечение которой — дуга окружности

$$(x^2 + (y + r_0 \cos \beta)^2 = r_0^2, y > 0, 0 < \beta < \frac{\pi}{2});$$

в качестве точки схода взять точку с координатами $x=r_0 \sin \beta, y=0$.

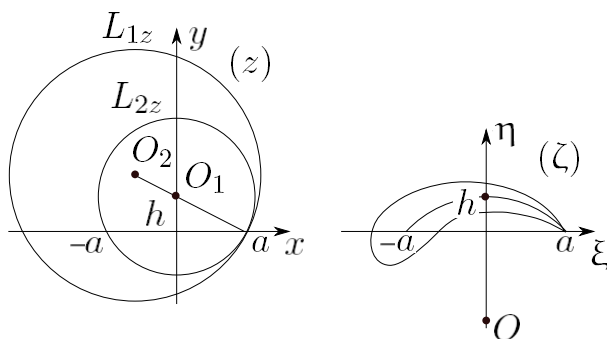


Рис. 7.17

7.331. При условиях задачи 7.327 найти подъемную силу, действующую на единицу длины цилиндра, поперечное сечение которого — полукруг ($r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq \pi$); в качестве точки схода взять точку с координатами $x=r_0$, $y=0$.

7.332. При условиях задачи 7.327 найти подъемную силу, действующую на единицу длины цилиндра, поперечное сечение которого — пересечение двух кругов с центрами в точках $O_1(0; -a)$ и $O_2(0; a)$, длина общей хорды которой $2a$; в качестве точки схода взять точку с координатами $x=a$, $y=0$.

7.333. Решить задачу об обтекании параболы $y^2=2px$ потоком, параллельным оси Ox , скорость которого на бесконечности V_0 (жидкость занимает область $2px < y^2$). Найти скорость жидкости в точках параболы.

7.334. Проводящий цилиндр, радиус которого r_0 , помещен в поперечное электростатическое поле E_0 . Найти комплексный потенциал результирующего поля и плотность заряда на цилиндре.

7.335. Проводящий цилиндр, поперечное сечение которого — ограниченная область Ω с кусочно-гладкой границей, внесен в поперечное электростатическое поле $E_0 e^{i\alpha}$, $E_0 > 0$. Показать,

что комплексный потенциал результирующего поля

$$w(z) = -i \left[\overline{E}(\infty) \zeta(z) - \frac{E(\infty)R^2}{\zeta(z)} \right] + C,$$

где функция $\zeta(z)$ конформно отображает внешность области Ω на внешность круга, радиус которого R ,

$$\zeta(\infty) = \infty, \quad \zeta'(\infty) = 1, \quad (7.39)$$

величина R определена условиями (7.39).

7.336. Показать, что при условиях предыдущей задачи плотность заряда на цилиндрической поверхности

$$\sigma(z) = \frac{|\zeta'|}{2\pi} \operatorname{Re}(\overline{\zeta} E(\infty)), \quad z \in \partial\Omega.$$

7.337. Длинная металлическая полоса, поперечное сечение которой отрезок ($|x| < a$, $y = 0$), помещена в поперечное электростатическое поле $E_0 e^{i\alpha}$, $E_0 > 0$. Найти комплексный потенциал результирующего поля и плотность заряда на полосе.

7.338. Цилиндрическая поверхность ($x^2 + y^2 = r_0^2$, $y > 0$) внесена в поперечное электростатическое поле E_0 , направленное по оси 1) $0x$; 2) $0y$. Определить плотность заряда σ_1 и σ_2 соответственно на вогнутой и выпуклой сторонах поверхности, полный заряд q_1 и q_2 (на единицу длины вдоль оси) на каждой стороне и указать участки, где заряд сохраняет знак.

7.339. Проводящий эллиптический цилиндр ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) внесен в поперечное электростатическое поле $E_0 e^{i\alpha}$, $E_0 > 0$. Найти комплексный потенциал результирующего поля и плотность заряда на цилиндре.

7.340. Проводящий цилиндр, поперечное сечение которого — полукруг ($r < r_0$, $0 < \varphi < \pi$), внесен в однородное электростатическое поле $E_0 e^{i\alpha}$, где $E_0 > 0$, перпендикулярное оси цилиндра. Найти плотность заряда на цилиндре, если 1) $\alpha = 0$; 2) $\alpha = \pi/2$.

7.341. Длинный цилиндр из железа внесен в однородное магнитное поле H_0 , перпендикулярное к оси цилиндра. Определить результирующее магнитное поле, если радиус цилиндра r_0 , а его магнитная проницаемость $\mu \gg 1$).

7.342. Длинный эллиптический цилиндр ($\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$) изготовленный из железа (магнитная проницаемость $\mu \gg 1$), внесен в однородное магнитное поле $H_0 e^{i\alpha}$, $H_0 > 0$, перпендикулярное к оси цилиндра. Определить напряженность магнитного поля на поверхности цилиндра.

7.4. Ответы

7.1. Решение. Согласно теореме Римана существует конформное отображение $z_1 = z_1(z)$, которое отображает область Ω_z на единичный круг, при этом на одной из связных частей границы круга $\text{Im } z_1 = v_1$, а на другой — $\text{Im } z_1 = v_2$. С помощью дробно-линейного отображения $z_2 = z_2(z_1)$ можно круг преобразовать в полуплоскость $\text{Im } z_2 > 0$ так, что $\text{Im } z_2 = v_2$, если $\text{Re } z_2 < 0$ и $\text{Im } z_2 = v_1$, если $\text{Re } z_2 < 0$. Построение конформного отображения завершается применением логарифмической и линейной функций.

Пусть есть два отображения w и w_1 . Функция $W = w - w_1$ непрерывна в Ω_z , а ее мнимая часть $\text{Im } W = \text{Im } (U + iV) = V$ непрерывна в $\overline{\Omega}_z$, равна нулю на границе области. Так как V гармоническая функция, то она тождественно равна нулю в Ω_z . Из условий Коши-Римана следует, что U равна константе в Ω_z , поэтому $w = w_1 + C$, $\text{Im } C = 0$.

7.3, 7.4. $v(r, \varphi) = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{\pi} \text{arctg} \frac{2rr_0 \sin \varphi}{|r^2 - r_0^2|}$.

7.5. $v(r, \varphi) = v_1 + \frac{2(v_2 - v_1)}{\pi} \text{arctg} \frac{2rr_0 \sin \varphi}{r_0^2 - r^2}$. Цилиндрическая поверхность, сечение которой плоскостью xOy — окружность $r = \frac{4r_1 r_2}{r_1 + r_2} \cos \varphi$. $v(r, \varphi) = \frac{4(v_1 - v_2)}{3\pi} \text{arctg} \frac{r(r + \sqrt{2}r_0 \sin \varphi)}{r_0(r_0 + \sqrt{2}r \sin \varphi)} + \frac{4v_2 - v_1}{3}$.

7.8. $v(r, \varphi) = \frac{v_0}{\pi} \text{arctg} \frac{r_0^4 + r^4 - 2rr_0(r_0^2 + r^2) \cos \varphi + 2r_0^2 r^2 \cos 2\varphi}{2rr_0(r_0^2 - r^2 \sin \varphi)}$.

7.9. $v(r, \varphi) = \frac{2v_0}{\pi} \text{arctg} \frac{2r^2 r_0^2 \sin 2\varphi}{r_0^4 - r^4}$.

7.10. $v(x, y) = \frac{1}{\text{arctg} \frac{84}{13}} \left[(v_1 - v_2) \text{arctg} \frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} + v_1 \text{arctg} \frac{8}{15} + v_2 \text{arctg} \frac{4}{3} \right]$.

$$7.11. v(x, y) = \frac{1}{\operatorname{arctg} \frac{3}{4}} \left[(v_1 - v_2) \operatorname{arctg} \frac{2ay}{a^2 - x^2 - y^2} - v_1 \operatorname{arctg} \frac{12}{35} - v_2 \operatorname{arctg} \frac{3}{4} \right].$$

$$7.12. q(r_0, \varphi) = \frac{kv_0}{\pi r_0} \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\alpha + \varphi}{2} \sin \frac{\alpha - \varphi}{2}} e^{i\varphi}.$$

$$7.13. v(r, \varphi) = v_1 + \frac{v_2 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^2 + r_0^2 - 2\sqrt{2}rr_0 \cos \varphi}{r^2 - r_0^2}.$$

$$7.14. v(r, \varphi) = v_2 + \frac{v_1 - v_2}{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{(r^2 + r_0^2) \cos \alpha + 2rr_0 \sin \varphi}{(r^2 - r_0^2) \sin \alpha}.$$

$$7.15. v(r, \varphi) = \frac{2(v_2 - v_1)}{3\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^2 - r_0^2}{2rr_0 \sin \varphi} + \begin{cases} v_1, & 0 < \varphi < \pi, \\ \frac{v_1 + 2v_2}{3}, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

$$7.16. v(r, \varphi) = v_2 + \frac{2(v_1 - v_2)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}}{r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} - r^{\frac{\pi}{\alpha}}}, \quad E(r, \alpha) = \frac{4(v_1 - v_2)r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} r^{\frac{\pi}{\alpha} - 1}}{\alpha(r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} - r^{\frac{\pi}{\alpha}})} i e^{i\alpha}.$$

$$7.17. v(r, \varphi) = v_1 + \frac{2(v_2 - v_1)}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\varphi}{\alpha}}{r^{\frac{\pi}{\alpha}} - r_0^{\frac{\pi}{\alpha}}}.$$

$$7.18. v(r, \varphi) = \frac{2(v_1 - v_2)}{3\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^2 - r_0^2}{2rr_0 \sin \varphi} + \begin{cases} v_2, & 0 < \varphi < \pi, \\ \frac{2v_1 + v_2}{3}, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

$$7.19. q(\varphi) = \frac{2k(v_1 - v_2)(b \cos \varphi + ia \sin \varphi)}{\pi \sin \varphi (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)}. \quad 7.20. q(\varphi) = \frac{2k(v_2 - v_1)(a \cos \varphi - ib \sin \varphi)}{\pi \sin \varphi (b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)}.$$

$$7.21. v(x, y) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{sh \frac{\pi y}{2a}}{\cos \frac{\pi x}{2a}}. \quad 7.22. v(x, y) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(th \frac{\pi x}{H} \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{H} \right).$$

$$7.23. v(x, y) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(th \frac{\pi x}{2H} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2H} \right).$$

$$7.24. 1) v = \frac{v_2 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{c \sin \beta}{a sh \alpha - b ch \alpha} + \frac{v_1 + v_2}{2};$$

$$2) v = \frac{v_2 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{c \cos \beta}{a sh \alpha - b ch \alpha} + \frac{v_1 + v_2}{2}; \quad x = c ch \alpha \cos \beta, \quad y = c sh \alpha \sin \beta,$$

$$\alpha_S \leq \alpha, \quad 0 \leq \beta < 2\pi, \quad sh \alpha_S = \frac{b}{c}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$7.25. 1) v = \frac{v_2 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{c \sin \beta}{b ch \alpha - a sh \alpha} + \frac{v_1 + v_2}{2}; \quad 2) v = \frac{v_2 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{c \cos \beta}{b ch \alpha - a sh \alpha} + \frac{v_1 + v_2}{2};$$

$$x = c ch \alpha \cos \beta, \quad y = c sh \alpha \sin \beta, \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_S, \quad 0 \leq \beta < 2\pi, \quad sh \alpha_S = \frac{b}{c}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

$$7.26. \sigma_{1,2}(x) = \frac{v_0 \operatorname{sign} x}{2\pi^2 \sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > a. \quad 7.27. \sigma(r) = -\frac{v_0}{2\pi\alpha} \frac{r^{\frac{\pi}{\alpha} - 1}}{\sqrt{r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} - r^{\frac{\pi}{\alpha}}}}.$$

$$7.28. \sigma(x) = -\frac{v_0}{2\pi H} \frac{e^{\frac{\pi x}{H}}}{\sqrt{2ch \frac{\pi x}{H}}}. \quad 7.29. \sigma(x) = -\frac{v_0 ch \frac{\pi x}{a}}{\pi H \sqrt{ch \frac{\pi(x-a)}{H} ch \frac{\pi(x+a)}{H}}}.$$

$$7.30. \sigma(x) = \frac{v_0}{2\pi H} \frac{ch \frac{\pi x}{a}}{\sqrt{sh \frac{\pi(x+a)}{H} sh \frac{\pi(x-a)}{H}}}. \quad 7.31. \sigma(y) = \frac{2v_0 y}{2\pi(H^2 - h^2)\sqrt{(y^2 - h^2)(y^2 - H^2)}}.$$

$$7.32. \sigma(x) = \frac{v_0 ch \frac{\pi x}{2H}}{2\pi H \sqrt{2ch \frac{\pi x}{H}}}. \quad 7.33. \sigma(y) = \frac{v_0}{2\pi^2} \frac{H(y^2 + r_0^2)}{y\sqrt{(y^2 - H^2)(y^2 H^2 - r_0^4)}}.$$

$$7.34. \sigma_{1,2}(y) = \pm \frac{v_0}{\pi^2 \sqrt{2y^2 + 1}}, \quad \text{знак плюс соответствует правой ветви гиперболы, знак минус — левой.}$$

Указание. Функция $z_1 \frac{z + \sqrt{z^2 - 2}}{\sqrt{2}}$ конформно отображает односвязную область, ограниченную ветвями гиперболы, на сектор

($\frac{\pi}{4} < \arg z_1 < \frac{3\pi}{4}$). **7.35.** $\sigma(y) = \frac{v_0}{\pi^2 \sqrt{y^2+1}}$. См. указание к предыдущей за-

даче. **7.36.** $v(r, \varphi) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a^{\frac{\pi}{\alpha}} - r^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha}}{r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}}$.

7.37. $v(r, \varphi) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r^{\frac{2\pi}{\alpha}} - a^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2r^{\frac{\pi}{\alpha}} a^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}}$. **7.38.** $v(r, \varphi) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a^{\frac{2\pi}{\alpha}} - r^{\frac{2\pi}{\alpha}}}{2a^{\frac{\pi}{\alpha}} r^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha}}$.

7.39. $v(r, \varphi) = v_1 + \frac{2(v_2 - v_1)}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} - r^{\frac{\pi}{\alpha}}}{r_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + r^{\frac{\pi}{\alpha}}} \operatorname{tg} \frac{\pi \varphi}{2\alpha} \right)$.

7.40. $v(x, y) = v_2 + \frac{v_1 - v_2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{2H}}{\cos \frac{\pi y}{2H}}$.

7.41. $v(x, y) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{ch \frac{\pi y}{2a} - ch \frac{\pi H}{2a} \sin \frac{\pi x}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi H}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a}}$. **7.42.** $v(r, \varphi) = v_1 (1 - \frac{2\varphi}{\pi}) +$

$+ \frac{v_2 - v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{a^2 - r^2 \cos 2\varphi}{r^2 \sin 2\varphi}$. **7.43.** $v(x, y) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{th} \frac{\pi x}{2H} \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2H} \right)$.

7.44. $v(x, y) = v_0 (1 - \frac{y}{H} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{H}}{\sin \frac{\pi y}{H}})$.

7.45. $v(x, y) = v_2 + \frac{v_1 - v_2}{\pi} (1 - \frac{y}{H} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{H}}{\sin \frac{\pi y}{H}})$.

7.46. $v(x, y) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi(y+h)}{2a} \operatorname{sh} \frac{\pi(y-h)}{2a} + \cos^2 \frac{\pi x}{2a}}{\operatorname{sh} \frac{\pi h}{2a} ch \frac{\pi y}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a}}$.

7.47. $v(x, y) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{ch \frac{\pi x}{H} - \cos \frac{\pi y}{H} - 2ch^2 \frac{\pi a}{2H}}{4sh \frac{\pi x}{2H} \cos \frac{\pi y}{2H} ch \frac{\pi a}{2H}}$.

7.48. $q(x) = -\frac{ikv_0}{a} \left[\frac{1}{\cos \frac{\pi x}{2a}} - \frac{2sh \frac{\pi h}{2a} \cos \frac{\pi x}{2a}}{ch \frac{\pi h}{a} + \cos \frac{\pi x}{a}} \right]$.

7.49. $v(r, \varphi) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2r^2 r_0^2 \sin 2\varphi}{r_0^4 - r^4} + \frac{2v_1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{r_0^2 - r^2}{2rr_0 \sin \varphi}$. **7.50.** $r^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2\varphi}{3} = C$.

7.51 Семейство парабол $y^2 = 2xC + C^2$, $C > 0$.

7.52. $V(x, 0) = \frac{4\pi^2 r_0^2 \sin^2 \alpha V_0 (x^2 - r_0^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{\pi - \alpha}{\alpha}}}{\alpha^2 \left[(x + r_0 \sin \alpha)^{\frac{\pi}{\alpha}} - (x - r_0 \sin \alpha)^{\frac{\pi}{\alpha}} \right]^2}$,

$$V(r_0, \psi) = -ie^{i\psi} \frac{V_0 \pi^2 \sin^2 \alpha \left[\cos \left(\frac{\pi + \alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{\pi - \alpha}{\alpha}}}{\alpha^2 \left[\cos \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{\pi + \alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) + \cos \frac{\pi}{\alpha} \left(\frac{\pi - \alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right]^2}$$

7.53. $w(z) = V_0 \sqrt{H^2 + z^2} + C$; $V(0, y) = \frac{V_0 y}{\sqrt{y^2 - H^2}}$, $V_{1,2} = \pm \frac{V_0 y}{\sqrt{H^2 - y^2}} i$.

7.54. $w(z) = \frac{4V_0 r_0}{3} \frac{1}{1 - \left(\frac{z - r_0}{z + r_0} \right)^{\frac{2}{3}}} + C$;

$V(r_0, \varphi) = \frac{4\sqrt[3]{2}V_0}{9\sqrt[3]{|\sin \varphi|}} \frac{ie^{i\varphi}}{\left(\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right|^{\frac{2}{3}} + \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right|^{\frac{2}{3}} \right)^2}$,

$\pi < \varphi < 2\pi$, $V(x, \varphi)|_{\varphi=0;\pi} = \frac{16r_0^2 V_0}{9} \frac{1}{\left[(x + r_0)^{\frac{2}{3}} - (x - r_0)^{\frac{2}{3}} \right]^2 \sqrt[3]{x^2 - r_0^2}}$, $|x| > r_0$.

7.55. $w(z) = V_0 \sqrt{2pz - p^2} + C$, $V|_L = \frac{V_0 p(y + pi)}{y^2 + p^2}$. Указание. Однозначная аналитическая функция $z_1(z) = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$, $0 < \arg(z - \frac{p}{2}) < 2\pi$ конформно отоб-

ражает внешность параболы на полуплоскость $Im z_1 > \sqrt{\frac{p}{2}}$.

7.56. $w(z) = \frac{2pV_0}{\pi i} ch \frac{\pi}{\sqrt{2p}} \sqrt{z - \frac{p}{2}}$, $V|_L = \frac{V_0 p(y+pi)}{y^2+p^2} ch \frac{\pi y}{2p}$. Указание. Для отображения области Ω , ограниченной параболой, на полуплоскость функция $z_1(z) = \sqrt{z - \frac{p}{2}}$ непосредственно неприменима (см. предыдущую задачу), так как имеет в Ω особую точку $z = p/2$. Если сделать разрез по вещественной оси, то в пересечении верхней полуплоскости и Ω функция $z_1(z)$ аналитична и конформно отображает эту вспомогательную область на полуполосу ($0 < Re z_1 < \infty$, $0 < Im z_1 < \sqrt{\frac{p}{2}}$). Теперь нужно перейти к полуплоскости, применить принцип симметрии Римана-Шварца и отобразить полученную область на полуплоскость. **7.57.** $w(z) = -\frac{iV_0}{2}(z^2 - 2)$, $V|_L = V_0(y + i\sqrt{y^2 + 1})$.

Указание. Аналитическая функция $z_1 = \frac{z + \sqrt{z^2 - 2}}{\sqrt{2}}$ конформно отображает пересечение 1) верхней полуплоскости и области, ограниченной гиперболой, на сектор ($1 < |z_1|$, $0 < arg z_1 < \pi/4$), 2) внешности гиперболы и верхней полуплоскости на сектор ($1 < |z_1|$, $\pi/4 < arg z_1 < \pi$). Каждый сектор нужно отобразить на полуплоскость, затем применить принцип симметрии Римана-Шварца и полученную область трансформировать в полуплоскость.

$$\mathbf{7.58.} \quad w(z) = \frac{3V_0}{4} \left[\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 2}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 2}}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi i}{4}} \right)^{-\frac{2}{3}} \right] + C,$$

$$V|_L = V_0 \frac{y + i\sqrt{y^2 + 1}}{\left(\sqrt{y^2 + 1} + y \right)^{\frac{4}{3}} + \left(\sqrt{y^2 + 1} - y \right)^{\frac{4}{3}} - 1}.$$

Указание. Функция $z_1(z) = \frac{z + \sqrt{z^2 - 2}}{\sqrt{2}}$ отображает пересечение внешности гиперболы и верхней полуплоскости на сектор ($1 < |z_1|$, $0 < arg z_1 < \pi/4$); сектор нужно отобразить на полуплоскость, затем применить принцип симметрии Римана-Шварца и полученную область трансформировать в полуплоскость.

7.59. $w(z) = \frac{2Q}{\pi} \ln(z + \sqrt{z^2 - 2}) + C$; $V|_{y=0} = \frac{2Qi}{\pi\sqrt{2-x^2}}$, $V|_L = \frac{2Q}{\pi} \frac{\pm y + i\sqrt{y^2 + 1}}{2y^2 + 1}$, знак плюс соответствует правой ветви гиперболы, минус — левой. См. указание к задаче 7.34.

$$\mathbf{7.60.} \quad V(z) = \frac{Q}{\pi\sqrt{H^2 + z^2}}; \quad V(0, y) = \frac{Q}{\pi\sqrt{H^2 - y^2}}, |y| < H, \quad V_{1,2} = \mp \frac{iQ}{\pi\sqrt{y^2 - H^2}}.$$

$$\mathbf{7.61.} \quad V_0 z = \sqrt{w(w-a)} - a \ln \frac{\sqrt{w} + \sqrt{w-a}}{\sqrt{a}} + hV_0 i, \quad a = \frac{2hV_0}{\pi};$$

$z_0 = \frac{2h}{\pi} \left[-\frac{\ln 3}{4} + \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) i \right]$. Указание. Применить интеграл Кристоффеля-Шварца $z = C_1 \int_0^w \sqrt{\frac{w-a}{a}} dw + C_2$, который определяет конформное отображение $w = w(z)$ области Ω — треугольника с вершинами и точках $z_1 = \infty$, $z_2 = 0$, $z_3 = hi$ — на полуплоскость $Im z > 0$.

7.62. $w(z) = \frac{Q}{\pi} \ln \zeta$, $z = \frac{H-h}{\pi} \left[\ln \frac{\sqrt{\zeta-1} + \sqrt{\zeta-a}}{\sqrt{\zeta-1} - \sqrt{\zeta-a}} - \sqrt{a} \ln \frac{\sqrt{a(\zeta-1)} + \sqrt{\zeta-a}}{\sqrt{a(\zeta-1)} - \sqrt{\zeta-a}} \right] + hi$,
 $\sqrt{a} = \frac{H}{H-h}$; $z_0 = \frac{H}{2} \left[-\frac{\ln 5}{\pi} + \frac{2\pi-3 \arctan 2}{\pi} \right]$. Указание. Применить интеграл Кристоффеля-Шварца $z = C_1 \int_a^\zeta \sqrt{\frac{\zeta-a}{\zeta-1}} \frac{d\zeta}{\zeta} + C_2$, который отображает область Ω (четырехугольник с вершинами $z_1=\infty$, $z_2=0$, $z_3=hi$, $z_4=\infty$) на полуплоскость $Im \zeta > 0$.

7.63. $z = \frac{H}{\pi} \left(\frac{2\pi}{Q} w + e^{\frac{2\pi}{Q} w} + 1 \right)$, $-\frac{Q}{2} < Im w < \frac{Q}{2}$,
 $\begin{cases} x(\tau) = \frac{H}{\pi} (\tau + e^\tau \cos C + 1), & -\infty < \tau < \infty, \\ y(\tau) = \frac{H}{\pi} (C + e^\tau \sin C), & -\pi < C < \pi; \end{cases}$ $z_0 = \frac{H}{\pi} \left[\frac{\ln 2}{2} - \left(1 + \frac{3\pi}{4} \right) i \right]$.
 Указание. Для отображения плоскости (z) с разрезами по двум лучам на полюсу $-Q < Im w < Q$ сначала преобразовать полуплоскость $Im z > 0$ с разрезом по лучу (треугольник с вершинами $z_1=\infty$, $z_2=Hi$, $z_3=\infty$) в полуплоскость без разреза с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца, затем перейти к полосе $0 < Im w < Q$ и применить принцип симметрии Римана-Шварца.

7.64. $V(0, y) = \frac{Q}{2H} \frac{\cos \frac{\pi h}{2H} \cos \frac{\pi y}{2H}}{\sqrt{\cos \frac{\pi(h+y)}{2H} \cos \frac{\pi(h-y)}{2H}}}.$

7.65. $w(z) = -\frac{iQ}{\pi} \arcsin \left(1 + 2ch \frac{\pi z}{H} \right) + C_1 \frac{2Q}{\pi} \ln \left(\sqrt{2ch} \frac{\pi z}{2H} + \sqrt{ch} \frac{\pi z}{H} \right) + C_2$;
 $V(0, y) = \frac{Q\sqrt{2}}{H} \frac{\sin \frac{\pi y}{2H}}{\sqrt{|\cos \frac{\pi y}{2H}|}}$, $V_{1,2} = \pm i \frac{Q\sqrt{2}}{H} \frac{\sin \frac{\pi y}{2H}}{\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2H}}}.$

7.66. $Q = \frac{kH(P_0^2 - P_L^2)}{4\mu RT x_0 y_0} x^2$. Указание. Поле $A = \rho V$ удовлетворяет условиям $div \rho V = 0$ (см. уравнение непрерывности в указании к задаче 1.255) и $rot \rho V = 0$ (это следует из $rot V = 0$). Комплексный потенциал $w = u + iP^2$, $A = -\frac{ik}{2\mu RT} \bar{w}'$, поток газа через дугу линии L , ограниченной точками z_1 и z_2 ,

$$Q = \int_L \rho V_N ds = \frac{k}{\mu} \int_L \rho \frac{\partial P}{\partial n} ds = -\frac{k}{2\mu RT} \int_L \frac{\partial P^2}{\partial n} ds = \int_L \frac{\partial u}{\partial s} ds = \frac{k(u_2 - u_1)}{2\mu RT}.$$

7.67. $Q = \frac{kH(P_0^2 - P_L^2)}{2\mu RT} \sqrt{\frac{x}{x_0}}$. См. указание к предыдущей задаче.

7.68. $Q = \frac{kH(P_0^2 - P_L^2)}{\mu RT \sqrt{2|x_0|y_0}} \sqrt{h^2 + x_0^2 - y_0^2 + \sqrt{(h^2 + x_0^2 - y_0^2)^2 + 4x_0^2 y_0^2}}$;

$Q = \frac{kH(P_0^2 - P_L^2)}{\mu RT \sqrt{y_0^2 - h^2}}$. **7.69.** $Q = \frac{k(P_0^2 - P_L^2)}{2\mu RT \eta_0}$, (ξ_0, η_0) — решение системы

$$\begin{cases} x_0^2 - y_0^2 = \frac{h^2}{4} [9\xi + 6(\xi^2 - \eta^2) - 3\xi\eta^2 + \xi^3] \\ 2x_0 y_0 = \frac{h^2}{4} [9\eta + 3\xi\eta(\xi + 4\eta) - \eta^3]. \end{cases}$$

Указание. Комплексный потенциал $w = u + iv$, где $v = P^2 - P_L^2$ (см. указание к задаче 7.66), конформно отображает область Ω на полуплоскость $Re w > 0$. Функция w определяется интегралом Кристоффеля-Шварца:

$z = C \int_a^w \frac{\zeta+a}{\sqrt{\zeta}} d\zeta$. **7.70.** $Q = \frac{kH(P_0^2 - P_L^2)}{\mu RT \gamma}$, где γ — корень уравнения

$$x_0 = \frac{2h}{\pi} \ln(\gamma + \sqrt{1 + \gamma^2}) + \frac{2h}{\pi} \gamma \sqrt{1 + \gamma^2}.$$

Указание. Комплексный потенциал w конформно отображает внешность полуполосы на полуплоскость $\operatorname{Re} w > 0$ и определяется посредством интеграла Кристоффеля-Шварца $z = C_1 \int_a^w \sqrt{a^2 - \zeta^2} d\zeta + C_2$.

7.71. $\sigma(x) = \frac{q}{2\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$. **7.72.** $\sigma(x) = \frac{q}{2\pi|x|\sqrt{x^2 - a^2}}$.

7.73. $q_1 = q \frac{\pi + \alpha}{2\pi + \alpha - \beta}$. **7.74.** 1. $d = (\sqrt{2} + 1)r_0$; 2. $d = r_0 \operatorname{tg} \left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\sqrt{10} + 1}{2\sqrt{6} - \sqrt{15}} r_0$.

7.75. $d = \frac{1 + \operatorname{tg} \left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{6} \right)}{1 - \operatorname{tg} \left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{6} \right)} r_0 = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{42} - \sqrt{7} - 5}{2\sqrt{6} - \sqrt{42} - \sqrt{7} + 5} r_0$.

7.76. $\sigma(\varphi) = \frac{q}{\pi\sqrt{3}r_0 \sin \varphi \left(\operatorname{tg} \frac{3}{2} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{3}{2} \frac{\varphi}{2} - 1 \right)}$, $\sigma(x) = \frac{2qr_0}{\pi\sqrt{3}(r_0^2 - x^2) \left[\left(\frac{r_0 - x}{r_0 + x} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{r_0 + x}{r_0 - x} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right]}$.

7.77. $\sigma_{1,2}(\varphi) = -\frac{q}{4\pi r_0} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin \frac{\varphi + \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2}}} \pm 1 \right)$, $q_1 = \frac{\alpha q}{2\pi}$, $q_2 = \frac{(2\pi - \alpha)q}{2\pi}$.

7.79. 1. $d = \frac{5a + 4b}{3}$; 2. $d = \frac{4a + 5b}{3}$.

7.80. $\sigma_1(\varphi) = \frac{q}{8r_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)}$, $\sigma_2(\psi) = \frac{q}{8r_0 \cos^2 \frac{\psi}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right)}$.

7.81. $\sigma_1(\varphi) = \frac{q \sin \frac{\pi}{1 + \frac{r_1}{r_2}}}{4r_1 \left(1 + \frac{r_1}{r_2} \right) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{1 + \frac{r_1}{r_2}} - \cos \frac{\pi}{1 + \frac{r_1}{r_2}} \right)}$,

$$\sigma_2(\psi) = \frac{q \sin \frac{\pi}{1 + \frac{r_2}{r_1}}}{4r_2 \left(1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \cos^2 \frac{\psi}{2} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{r_2}{r_1}} - \cos \frac{\pi}{1 + \frac{r_2}{r_1}} \right)}.$$

7.82. $c = \frac{4\sqrt{5}-3}{9}a$. **7.83.** $\sigma(x) = \frac{q}{2\pi} \frac{|x|}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, $\sigma(y) = \frac{q}{2\pi} \frac{|y|}{\sqrt{a^4 - y^4}}$.

7.84. $\sigma(x) = \frac{q|x|}{2\pi\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{\left(a \mp \sqrt{a^2 - x^2} \right) \left(\sqrt{2}a \pm \sqrt{a^2 - x^2} \right)}}$, верхний знак соответ-

ствует верхней $(x + i0)$, нижний — нижней стороне $(x - i0)$ проводника,

$$\sigma(y) = \frac{q|y|}{2\pi\sqrt{a^2 + y^2} \sqrt{\left(a + \sqrt{a^2 + y^2} \right) \left(\sqrt{2}a - \sqrt{a^2 + y^2} \right)}}.$$

7.86. $v(x, y) = \frac{v_1 - v_2}{\ln 2 \sqrt{\frac{2}{5}}} \ln 2 \sqrt{\frac{(x+2a)^2 + y^2}{(x+5a)^2 + y^2}} + v_2$.

7.87. $v(x, y) = \frac{v_1 - v_2}{\ln \frac{5}{4}} \ln \frac{5}{2} \sqrt{\frac{(x-7a)^2 + y^2}{(x-28a)^2 + y^2}} + v_2$. **7.88.** $q(\varphi) = \frac{3k(v_2 - v_1)}{5a \ln 2} \frac{e^{i\varphi}}{5 - 4 \cos \varphi}$.

7.89. $Q = \frac{2\pi k(v_1 - v_2)}{\ln \frac{4}{3}}$. Указание. Комплексный потенциал $w = Bi \ln \frac{1}{\zeta} + C$, поток $Q = 2\pi kB$ (см. пример 7.6 и соотношение 7.12).

7.90. $v_2 = v_1 + \frac{Q}{2\pi k \ln \frac{4}{3}}$. См. указание к предыдущей задаче.

7.91. $q(\varphi) = \frac{3D(v_2 - v_1)}{32a \ln \frac{4}{2}} \frac{e^{i\varphi}}{5 - 4 \cos \varphi}$, $q_0 = 2\pi D \frac{v_2 - v_1}{\ln \frac{4}{2}}$.

$$7.92. v(x, y) = \frac{v_0}{\ln \frac{27}{35}} \ln \frac{9}{7} \sqrt{\frac{(x-49a)^2 + y^2}{(x-81a)^2 + y^2}}.$$

$$7.93. 1. v(x, y) = \frac{v_0}{\ln 2} \ln 2 \sqrt{\frac{(x-5a)^2 + y^2}{(4x-5a)^2 + y^2}}; \quad 2. f(\psi) = \frac{15v_0 T_0}{a \ln 2} \frac{1}{17-8 \cos \psi}.$$

$$7.94. j(\varphi) = \frac{58\sigma(v_2 - v_1)e^{i\varphi}}{11a \ln \frac{11}{45}(65-33 \cos \varphi)}, \quad j(\psi) = \frac{112\sigma(v_2 - v_1)e^{i\psi}}{15a \ln \frac{11}{45}(113-15 \cos \psi)}.$$

$$7.95. R = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{27}{7}. \quad 7.96. v(x, y) = \frac{v_1 - v_2}{\ln 7} \ln 7 \sqrt{\frac{x^2 + (y-24a)^2}{x^2 + (y+24a)^2}} + v_2.$$

$$7.97. v(x, y) = 2q \ln 5 \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x-25a)^2 + y^2}}, \quad v_2 - v_1 = 2q \ln 5.$$

$$7.98. q(x) = -\frac{24ka(v_2 - v_1)i}{(x^2 + 144a^2) \ln 5}. \quad 7.99. C = \left(4 \ln \frac{d + \sqrt{d^2 - r_0^2}}{r_0}\right)^{-1} \frac{1}{4 \operatorname{arccch} \frac{d}{r_0}}.$$

$$7.100. C = \frac{1}{2 \ln \frac{8}{3}}. \quad 7.101. v(r, \varphi) =$$

$$= \begin{cases} C, & r^2 - 46ar \cos \varphi + 88a^2 \leq 0, \\ 2q_2 \ln \frac{3}{7} \sqrt{\frac{r^2 - 144ar \cos \varphi + 5184a^2}{r^2 - 64ar \cos \varphi + 1024a^2}} + C, & \begin{cases} r^2 - 46ar \cos \varphi + 88a^2 \geq 0, \\ r \leq 48a, \end{cases} \\ 2(q_1 + q_2) \ln \frac{48a}{r} + 2q_2 \ln \frac{9}{14} + C, & r \geq 48a. \end{cases}$$

$$7.102. E(z) = \frac{48av_0}{\ln 14} \frac{1}{(\bar{z}-a)(\bar{z}-49a)}, \quad E(M_0) = \frac{3v_0 i}{160a \ln 14}.$$

$$7.103. E(z) = \frac{30qa}{(\bar{z}-5a)(\bar{z}-20a)}, \quad E(M_0) = \frac{15qi}{34a}.$$

$$7.104. j(\varphi) = \frac{56\sigma(v_1 - v_2)e^{i\varphi}}{33a \ln \frac{11}{45}(65+33 \sin \varphi)}. \quad 7.105. j_1(\varphi) = \frac{2\sigma(v_1 - v_2)e^{i\varphi}}{3a \ln 3(5-3 \cos \varphi)},$$

$j_2(\psi) = \frac{2\sigma(v_1 - v_2)e^{i\psi}}{3a \ln 3(5+3 \cos \psi)}$, $I_1 = -I_2 = \frac{2\sigma(v_1 - v_2)}{3a \ln 3}$. Указание. Для определения полного тока применить формулу 7.18, избавляющую от необходимости интегрировать плотность тока.

7.106. $\sigma(\varphi) = -\frac{6v_0}{7a\pi \ln 35} \cdot \frac{1}{25-7 \cos \varphi}$, $q_1 = -\frac{v_0}{2 \ln 35}$. Указание. Показать, что плотность заряда на заземленном и заряженном (потенциал v_0 , либо заряд q на единицу длины) проводниках, поперечные сечения которых ограничены соответственно окружностями Γ_1 и Γ_2 , вычисляется по формулам

$$\sigma_{1,2} = (-1)^j \frac{q_0}{2\pi R_j} |\zeta'|_{\Gamma_j}, \quad j = 1, 2,$$

где $q_0 = v_0/(2 \ln R_2)$ либо $q_0 = q$, $\zeta(z)$ — функция, конформно отображающая область Ω на концентрическое кольцо так, что Γ_1 и Γ_2 отображаются на окружности радиусов R_1 и $R_2 = 1$ соответственно.

$$7.107. \sigma_1(\varphi) = \frac{3v_0}{10a\pi \ln \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{1}{13-5 \cos \varphi}, \quad \sigma_2(\psi) = -\frac{6v_0}{7a\pi \ln \frac{\pi}{5}} \cdot \frac{1}{25-7 \cos \psi}.$$

$$7.108. \sigma(\varphi) = \frac{v_0}{3a\pi \ln 3} \cdot \frac{1}{5-3 \cos \varphi}, \quad \sigma(x) = -\frac{2av_0}{\pi \ln 3} \cdot \frac{1}{x^2 + 16a^2}, \quad C = \frac{1}{2 \ln 3}.$$

$$7.109. \sigma(\psi) = \frac{4q}{5a\pi(17+15 \cos \psi)}. \quad 7.110. \sigma(\varphi) = -\frac{3q}{32a\pi(5-4 \cos \varphi)}, \quad q_1 = -q.$$

$$7.111. \sigma(\psi) = \frac{q}{4a\pi(5-\cos \psi)}. \quad 7.112. \sigma(\varphi) = -\frac{4q}{15a\pi(17-15 \cos \varphi)},$$

$$\sigma(\psi) = \frac{q}{3a\pi(5-3 \cos \psi)}. \quad 7.113. \sigma_1(\varphi) = \frac{585q_2}{88\pi a(125+44 \cos \varphi)},$$

$$\sigma_2(\varphi) = \frac{q_1 + q_2}{96\pi a} - \frac{585q_2}{968\pi a(125-44 \cos \varphi)}.$$

7.114. $F = \frac{v_0^2}{30a(\ln 6)^2}$. Указание. $F = \frac{2q^2}{|z_1 - z_2|}$, где q — заряд единицы длины незаземленного цилиндра, z_1 и z_2 — точки, сопряженные относительно обеих окружностей. **7.115.** $F = \frac{4q^2}{9a}$. **7.116.** $F = -\frac{q^2}{12a}$. **7.117.** $F = \frac{2q_2^2}{51a}$.

7.118. $\sigma(x) = -\frac{15aq}{\pi(x^2 + 225a^2)}$, $F = -\frac{q^2}{16a}i$.

7.119. $j(x, y) = \frac{40\sigma v_0[2xy - (x^2 - y^2 + 1600a^2)i]}{\ln 3[(x^2 - y^2 + 1600a^2)^2 + 4x^2y^2]}$; $j(\varphi) = \frac{20\sigma v_0 e^{i\varphi}}{9 \ln 3(41 + 9 \sin \varphi)a}$, $J = \frac{\pi a \sigma v_0}{\ln 3}$.

7.120. $C = \frac{1}{2 \ln 2}$. **7.121.** $Q = \frac{2\pi D(v_1 - v_2)}{\ln 2}$, $q(\varphi) = \frac{(v_1 - v_2)D(4 \cos \varphi + 5i \sin \varphi)}{4a \ln 2(16 \cos^2 \varphi + 25 \sin^2 \varphi)}$.

7.122. $R = \frac{1}{4\pi\sigma} \ln \frac{5}{3}$. **7.123.** $q(\varphi) = \frac{2kv_0}{\ln \frac{a+b}{a-b}} \frac{b \cos \varphi + ia \sin \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$.

7.124. $\sigma(\varphi) = \frac{v_0}{2\pi \ln \frac{a+b}{a-b}} \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}$, $\sigma(x) = -\frac{v_0}{2\pi \ln \frac{a+b}{a-b}} \frac{1}{\sqrt{c^2 - x^2}}$.

7.125. $C = \frac{1}{\ln \frac{a+b}{a-b}}$. **7.126.** $j(\varphi) = \frac{2\sigma(v_1 - v_2)(b \cos \varphi + ia \sin \varphi)}{\ln \frac{a+b}{a-b} (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi)}$.

7.127. $R = \frac{1}{4\pi\sigma} \ln \frac{a+b}{a-b}$. **7.128.** $P(x, y) = P_2 + \frac{P_2 - P_1}{2 \ln \frac{4}{3}} \ln \frac{(x - 432a)^2 + y^2}{(12x - 5041a)^2 + 144y^2}$.

Указание. Поле $A = V$ удовлетворяет условиям $\operatorname{div} V = 0$, $\operatorname{rot} V = 0$; комплексный потенциал $w = u + iP$. **7.129.** $Q = \frac{2\pi k H(P_1 - P_2)}{\mu \ln \frac{127}{8}}$. См. указание

к задачам 7.128 и 7.89. **7.130.** $P^2(x, y) = P_2^2 + \frac{P_2^2 - P_1^2}{2 \ln 19,9} \ln \frac{(x - 2000a)^2 + y^2}{(20x - 36901a)^2 + 400y^2}$.

См. указание к задаче 7.66. **7.131.** $Q = \frac{\pi k H(P_1^2 - P_2^2)}{\mu R T \ln \frac{161}{9}}$. См. указания к задачам

7.66 и 7.89. **7.132.** $\zeta^2(x, y) = H_2^2 + \frac{H_2^2 - H_1^2}{2 \ln \frac{49}{5}} \ln \frac{(x - 250a)^2 + y^2}{(10x - 2401a)^2 + 100y^2}$. Указание. Поле

$A = \zeta V$ удовлетворяет условиям $\operatorname{div} A = 0$ (см. уравнение непрерывности в указании к задаче 1.260) и $\operatorname{rot} A = 0$ (это следует из $\operatorname{rot} V = 0$). Комплексный потенциал $w = u + i\zeta^2$, $A = -\frac{ik\rho g}{2\mu} \overline{w}$. **7.133.** $Q = \frac{\pi k \rho g (H_1^2 - H_2^2)}{\mu \ln \frac{27}{7}}$. См. указание к предыдущей задаче и к задаче 7.89.

7.134. $\sigma = -\frac{q}{2\pi} |\zeta'|_{\partial\Omega}$, где $\zeta = \zeta(z, z_0)$ конформно отображает Ω на единичный круг, а точку z_0 в его центр. Указание. Электростатический потенциал ограничен на бесконечности. **7.135.** $\sigma(x) = -\frac{qh}{\pi(x^2 + h^2)}$.

7.136. $\sigma_{1,2}(x) = -\frac{q \sin \frac{\pi h}{H}}{2H(ch \frac{\pi x}{H} \mp \cos \frac{\pi h}{H})}$, минус — для плоскости $y = 0$, плюс —

для $y = H$. **7.137.** $\sigma_{1,2}(x) = -\frac{q}{2\pi x} \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sqrt{\frac{r_0}{x} + \sqrt{\frac{x}{r_0} \mp 2 \cos \frac{\varphi_0}{2}}}}$, минус соответствует верхней стороне полуплоскости ($\varphi = 0$), плюс — нижней ($\varphi = 2\pi$).

7.138. 1) $\sigma(x) = -\frac{q}{2\pi} \frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{(d-x)\sqrt{a^2 - x^2}}$, $|x| < a$;

2) $\sigma(x) = -\frac{q}{2\pi} \frac{h(\sqrt{a^2 + h^2} \pm \sqrt{a^2 - x^2})}{(x^2 + h^2)\sqrt{a^2 - x^2}}$, $|x| < a$,

плюс соответствует верхней ($z = x + i0$), а минус — нижней ($z = x - i0$)

стороне. **7.139.** $\sigma_{1,2}(r) = -\frac{q}{\alpha r} \frac{\sin \frac{\pi \varphi_0}{\alpha}}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} + \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \mp 2 \cos \frac{\pi \varphi_0}{\alpha}}$,

знак минус соответствует грани $\varphi = 0$, знак плюс — грани $\varphi = \alpha$.

$$7.140. \sigma(\varphi) = -\frac{q}{2\pi r_0} \frac{|d^2 - r_0^2|}{d^2 + r_0^2 - 2dr_0 \cos \varphi}, \quad q_1 = -q.$$

$$7.141. \sigma(\varphi) = -\frac{2qh}{\pi} \frac{(r_0^2 - h^2) \sin \varphi}{(r_0^2 + h^2)^2 - 4r_0^2 h^2 \sin^2 \varphi}, \quad \sigma(x) = -\frac{qh}{\pi} \frac{(r_0^2 - h^2)(r_0^2 - x^2)}{(x^2 + h^2)(r_0^4 + x^2 h^2)}.$$

$$7.142. \sigma(\varphi) = -\frac{2qh}{\pi} \frac{(h^2 - r_0^2) \sin \varphi}{(r_0^2 + h^2)^2 - 4r_0^2 h^2 \sin^2 \varphi}, \quad \sigma(x) = -\frac{qh}{\pi} \frac{(h^2 - r_0^2)(x^2 - r_0^2)}{(h^2 + x^2)(r_0^4 + x^2 h^2)}.$$

$$7.143. 1) \sigma(x) = -\frac{q}{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 - d^2}}{|x - d|\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > a;$$

$$2) \sigma(x) = -\frac{q}{2\pi} \frac{|x|\sqrt{h^2 + a^2} \pm h\sqrt{x^2 - a^2}}{(x^2 + h^2)\sqrt{x^2 - a^2}}, \quad |x| > a,$$

плюс соответствует верхней ($z = x + i0$), минус — нижней ($z = x - i0$) стороне.

$$7.144. 1) \sigma_{1,2}(x) = -\frac{q}{\pi} \frac{2\sqrt{2}|y|(a - |y| - x)^2 \cos 4\alpha}{[(4y^4 + (a - |y| - x)^4 \mp 2y^2(a - |y| - x)^2 \sin 4\alpha]};$$

$$2) \sigma_{1,2}(x) = -\frac{q}{\pi} \frac{\sqrt[6]{32}(a - |y| + x)^{\frac{2}{3}} \sin \beta}{4\sqrt[3]{|y|}[(|y|\sqrt{2})^{\frac{4}{3}} + (a - |y| - x)^{\frac{4}{3}} \mp (|y|\sqrt{2})^{\frac{2}{3}}(a - |y| + x)^{\frac{2}{3}} \cos \beta]};$$

$\beta = \frac{4}{3} \arctg \frac{d}{a} - \frac{\pi}{6}$, знак плюс соответствует верхней ($y = \sqrt{2a^2 - x^2} - a > 0$), знак минус — нижней ($y = -\sqrt{2a^2 - x^2} + a < 0$) части поверхности.

$$7.145. \sigma(x) = -\frac{qh}{\pi} \frac{\sqrt{H^2 - h^2}}{(x^2 + h^2)\sqrt{x^2 + H^2}}, \quad \sigma(y) = -\frac{qh}{\pi} \frac{\sqrt{H^2 - h^2}}{(y^2 - h^2)\sqrt{y^2 - H^2}}, \quad H < y.$$

$$7.146. \sigma(x) = -\frac{q}{\pi} \frac{|x|}{x^2 + h^2} \sqrt{\frac{h^2 - H^2}{x^2 + H^2}}, \quad \sigma(y) = -\frac{q}{\pi} \frac{y}{h^2 - y^2} \sqrt{\frac{h^2 - H^2}{H^2 - y^2}}, \quad 0 \leq y < H.$$

$$7.147. 1) \sigma_{1,2}(\varphi) = -\frac{q}{4\pi r_0} \left(\frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi + \alpha}{2}} \mp 1 \right), \quad q_{1,2} = -\frac{q}{2} \left(1 \mp \frac{\pi - \alpha}{\pi} \right);$$

$$2) \sigma_{1,2}(\varphi) = -\frac{q}{4\pi r_0 \sin \frac{\varphi - \psi}{2}} \sqrt{\frac{\sin \frac{\alpha - \psi}{2} \sin \frac{\alpha + \psi}{2}}{\sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sin \frac{\varphi + \alpha}{2}}}, \quad q_1 = q_2 = -\frac{q}{2}.$$

$$7.148. 1) \sigma(\varphi) = -\frac{q}{\pi \sqrt{3} r_0 \sin \varphi \left[\left(\frac{1}{k} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(k \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]},$$

$$\sigma(x) = -\frac{2qr_0}{\pi \sqrt{3}(r_0^2 - x^2)} \left[\left(\frac{1}{k} \frac{r_0 - x}{r_0 + x} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(k \frac{r_0 + x}{r_0 - x} \right)^{\frac{2}{3}} + 1 \right], \quad k = \frac{d - r_0}{d + r_0};$$

$$2) \sigma(\varphi) = -\frac{2q \sin \frac{2\alpha}{3}}{3\pi r_0 \sin \varphi \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{3} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{3} \frac{\varphi}{2} + 2 \cos \frac{2\alpha}{3} \right)},$$

$$\sigma(x) = -\frac{4qr_0 \sin \frac{2\alpha}{3}}{3\pi(r_0^2 - x^2) \left[\left(\frac{r_0 - x}{r_0 + x} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{r_0 + x}{r_0 - x} \right)^{\frac{2}{3}} - 2 \cos \frac{2\alpha}{3} \right]}, \quad \alpha = \pi + 2 \arctg \frac{r_0}{h}.$$

$$7.149. 1) q_1 = -\frac{2\gamma - \beta}{2\pi - \beta + \alpha} q; \quad 2) q_1 = -\frac{\alpha - 2\gamma}{2\pi - \beta + \alpha} q.$$

$$7.150. q_1 = - \left[1 - \frac{4}{\pi} \arctg \left(\frac{d}{r_0} \right)^{\frac{\pi}{\alpha}} \right] q.$$

$$7.151. \sigma(x) = -\frac{4qr_0 \sin \frac{2\alpha}{3}}{3\pi(x^2-r_0^2)\left[\left(\frac{x+r_0}{x-r_0}\right)^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{x-r_0}{x+r_0}\right)^{\frac{4}{3}}-2\cos \frac{2\alpha}{3}\right]}, \quad \alpha = 2\operatorname{arccctg} \frac{h}{r_0}.$$

$$7.152. \sigma(\varphi) = -\frac{q}{2\pi} \frac{(d^2-a^2)(ad+b\sqrt{d^2-c^2})}{(bd+a\sqrt{d^2-c^2})\left[b^2+d^2-(ad+b\sqrt{d^2-c^2})\cos \varphi\right]\sqrt{a^2\sin^2 \varphi+b^2\cos^2 \varphi}}.$$

$$7.153. \sigma_{1,2}(y) = -\frac{2q|(\sqrt{y^2+1}+y)^2}{\pi\sqrt{2y^2+1}\left[(\sqrt{y^2+1}+y)^4+1\right]}. \quad \text{См. указание к задаче 7.34.}$$

$$7.154. 1) \quad \sigma(x) = -\frac{4q}{3\pi\sqrt{x^2+1}\left[\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)^{\frac{2}{3}}+\sqrt{x^2+1}-1\right]^{\frac{2}{3}}};$$

$$2) \quad \sigma(x) = -\frac{2q\sqrt{2x^2-1}}{\pi\left[(2x^2-1)^2+d^2(d^2-2)\right]}. \quad \text{См. указание к задаче 7.57.}$$

$$7.155. 1) \sigma(x) = -\frac{q}{2\pi} \frac{\sqrt{d+\frac{p}{2}}-\sqrt{\frac{p}{2}}}{\left(x+d+p-\sqrt{2d+p}\right)\sqrt{x+\frac{p}{2}}}. \quad 2) \sigma(x) = -\frac{q}{2\sqrt{2p}} \frac{1}{\sqrt{x+\frac{p}{2}} \operatorname{ch} \pi \sqrt{\frac{x}{2p}}}.$$

См. указание к задаче 7.55.

$$7.156. \sigma(x) = -\frac{q}{2\pi} \frac{|x|(\sqrt{d^2+a^2}+\sqrt{x^2+a^2} \operatorname{sign} x)\sqrt{d^2-a^2}}{(d^2-x^2)\sqrt{a^4-x^4}},$$

$$\sigma(y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{|y|(\sqrt{d^2+a^2}\pm\sqrt{a^2-y^2})\sqrt{d^2-a^2}}{(d^2+y^2)\sqrt{a^4-y^4}},$$

знак плюс соответствует правой $(+0+iy)$ стороне, знак минус $(-0+iy)$ — левой. Указание. Воспользоваться принципом симметрии Римана-Шварца.

7.157. Указание. Достаточно рассмотреть случай круглого цилиндра, радиус которого r_0 . При $z \rightarrow \infty$ комплексный потенциал $\approx -2i(q+q_0)\ln z$, следовательно,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zw'(z) = -2i(q+q_0), \quad \operatorname{Im} w|_L = \operatorname{Const}. \quad (7.40)$$

Пусть функция $\zeta = \zeta(z)$ конформно отображает область Ω (внешность круга, радиус которого r_0), на единичный круг, а точку z_0 в его центр. Формула (7.24) неприменима, так как не выполняется первое условие (7.40). Комплексный потенциал следует отыскивать в виде $w(z) = 2qi \ln \frac{1}{\zeta} + f(z)$, где $f(z)$ — аналитическая в Ω функция, удовлетворяющая условиям (7.40).

7.158. $\sigma(\varphi) = \frac{q_0}{2\pi r_0} + \frac{qd(d-r_0 \cos \varphi)}{\pi r_0(d^2+r_0^2-2dr_0 \cos \varphi)}$. Указание. $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где σ_1 — плотность заряда, индуцированного на заземленном цилиндре нитью, заряд единицы длины которой q , σ_2 — плотность заряда на незаземленном цилиндре с зарядом $q+q_0$ на единицу длины при отсутствии нити (см. предыдущую задачу). 7.159. $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$, где плотность σ_1 дана в ответе к задаче 7.138, а σ_2 — в ответе к задаче 7.71. Указание. См. предыдущую задачу.

7.160. Плотность σ_- дана в ответе к задаче 7.140: $\sigma_+ = \frac{q+q_0}{2\pi r_0}$. Указание.

См. задачу 7.158. 7.161. $q_{1,2} = \frac{q_0}{2} \mp \frac{q}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{ad-b\sqrt{d^2+c^2}}{c^2}$.

7.162. $q(x) = -\frac{khq}{\pi(x^2+h^2)}i$. **7.163.** $q(\varphi) = \frac{kq(r_0^2-d^2)}{2\pi r_0(r_0^2+d^2-2r_0d\cos\varphi)}e^{i\varphi}$.

7.164. $u(r, \varphi) = \frac{q}{4\pi\rho_0} \ln\left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^8 + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^4 \cos 4\varphi\right] + C$.

7.165. $u(r, \varphi) = \frac{q}{4\pi\rho_0} \ln\left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{8}{3}} + 2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{4}{3}} \cos \frac{4\varphi}{3}\right] + C$.

7.166. 1) $w(z) = \frac{q}{2\pi\rho_0} \ln \frac{r_0^2-z^2}{r_0^2+z^2} + C$; 2) $w(z) = \frac{q}{2\pi\rho_0} \ln\left(1 + \frac{r_0^4}{z^4}\right) + C$.

7.167. $P(x) = P_0 - \frac{q^2 x^2}{2\pi^2 \rho_0 (x^2 + h^2)^2}$. **7.168.** $V(x, 0) = \frac{q}{2\pi\rho_0} \frac{x(\sqrt{a^2-x^2} \pm \sqrt{a^2+d^2})}{(d^2+x^2)\sqrt{d^2-x^2}}$,
знак плюс соответствует верхней $(x+i0)$, знак минус — нижней $(x-i0)$ сторонам плоскости.

7.169. $V(r_0, \varphi) = \mp \frac{q}{\pi\rho_0 r_0} \frac{\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}) \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})}{\cos\varphi \sqrt{\cos \frac{\varphi+\alpha}{2} \sin \frac{\varphi-\alpha}{2}}} i e^{i\varphi}$, где верхний знак соответствует внешней (по отношению к источнику) стороне, а нижний — внутренней стороне.

7.170. $P(x) = P_0 - \frac{2q^2 x^2 (x^2 - r_0^2 \cos 2\varphi_0)^2}{\pi^2 \rho_0 (x^4 + r_0^4 - 2x^2 r_0^2 \cos 2\varphi_0)^2}$,

$P(y) = P_0 - \frac{2q^2 y^2 (y^2 + r_0^2 \cos 2\varphi_0)^2}{\pi^2 \rho_0 (y^4 + r_0^4 + 2y^2 r_0^2 \cos 2\varphi_0)^2}$.

7.171. $P(x) = P_0 - \frac{q^2 (\sqrt{x} \mp \sqrt{r_0} \cos \frac{\varphi_0}{2})^2}{8\pi^2 \rho_0 x (x + r_0 \mp 2\sqrt{x r_0} \cos \frac{\varphi_0}{2})^2}$, знак плюс соответствует верхней $(x+i0)$ стороне полуплоскости, знак минус — нижней $(x-i0)$.

7.172. $V(x, \pm H) = \frac{q}{4H\rho_0} th \frac{\pi x}{2H}$.

7.173. $P(\varphi) = P_0 - \frac{1}{2\pi^2 \rho_0} \left(\frac{qd \sin \varphi}{r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \varphi} \right)^2$.

7.174. $V(0, y) = \frac{q}{2\pi\rho_0} \frac{-h\sqrt{H^2+d^2} + iy\sqrt{H^2-y^2}}{(y^2+d^2)\sqrt{H^2-y^2}}$, $|y| < \frac{H}{2}$,

$V(0, y) = \frac{iq}{2\pi\rho_0} \frac{|y|\sqrt{y^2-H^2} \mp d\sqrt{H^2+d^2}}{(y^2+d^2)\sqrt{y^2-H^2}}$, $|y| > \frac{H}{2}$, где знак минус соответствует правой стороне $(+0+iy)$ плоскости, минус — левой $(-0+iy)$.

7.175. $\frac{q}{2}$. Указание. При конформном отображении $\zeta = \zeta(z)$ расход жидкости через контур L_z и через его образ L_ζ одинаков:

$$Q = \operatorname{Re} \int_{L_z} \bar{V}(z) i dz = \operatorname{Re} \int_{L_z} w'_z i dz = \operatorname{Re} \int_{L_\zeta} w'_\zeta \zeta' i \frac{d\zeta}{\zeta'} = \operatorname{Re} \int_{L_\zeta} \bar{V}(\zeta) i d\zeta.$$

7.176. $w = \frac{q}{2\pi} \ln(z^8 + r_0^8) + C$. **7.177.** Скорость равна нулю на прямых, параллельных ребру угла, следы которых $z = 0$, $z = r_0$, $z = r_0 e^{i\alpha}$.

$$\begin{aligned} 7.178. \quad V(r_0, \varphi) &= \frac{q \left(\cos \frac{4}{3} \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{4}{3} \frac{\varphi}{2} \right)}{3\pi r_0 \left(\cos \frac{8}{3} \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{4}{3} \frac{\varphi}{2} \sin \frac{4}{3} \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{8}{3} \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{1}{3} \frac{\varphi}{2} \sin \frac{4}{3} \frac{\varphi}{2}}, \\ V(x, 0) &= \frac{4qr_0 \left[(r_0+x)^{\frac{4}{3}} - (r_0-x)^{\frac{4}{3}} \right]}{3\pi \left[(r_0+x)^{\frac{8}{3}} + (r_0^2-x^2)^{\frac{4}{3}} + (r_0-x)^{\frac{8}{3}} \right] (r_0^2-x^2)^{\frac{1}{3}}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.179. \quad V(r_0, \varphi) &= \frac{2 \sqrt[3]{2} q e^{i(\varphi + \frac{\pi}{2})} \left(\sqrt[3]{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} - \sqrt[3]{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right) \cos^2 \beta |\sin \varphi|^{-\frac{1}{3}}}{3\pi r_0 \left(\sqrt[3]{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right) \left(\sqrt[3]{\cos^4 \frac{\varphi}{2}} + \sqrt[3]{\sin^4 \frac{\varphi}{2}} - \cos 2\beta \sqrt[3]{2 \sin^2 \varphi} \right)}, \\ V(x, 0) &= \frac{8qr_0 \left(\sqrt[3]{(x+r_0)^2} + \sqrt[3]{(x-r_0)^2} \right) \cos^2 \beta (x^2-r_0^2)^{-\frac{1}{3}}}{3\pi \left(\sqrt[3]{(x+r_0)^4} + \sqrt[3]{(x-r_0)^4} + 2 \cos 2\beta \sqrt[3]{x^2-r_0^2} \right)}, \quad \beta = \frac{\pi}{6} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{r_0}{a}. \end{aligned}$$

7.180. $w(z) = \frac{q}{2\pi} \ln \left[z^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} + (de^{i\alpha})^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}} \right] + C$; на гранях угла, т.е. в точках $z = re^{\pm i\alpha}$, скорость $V = \frac{qe^{\pm i\alpha}}{2(\pi-\alpha)[1+(\frac{d}{r})^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}]}$. 7.181. На верхней стороне ($y>0$)

$$\begin{aligned} V &= \frac{-ie^{i(\frac{\varphi}{2}-\psi)} q \sin \frac{2(\pi-2\alpha)}{3}}{6\pi a \left[\sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\psi}{2} \right) + \sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{2} \right) \right]} \times \\ &\times \frac{\left[\sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\psi}{2} \right) - \sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{2} \right) \right] \sin^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\psi}{2} \right) \sin^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{2} \right)}{\left[\sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\psi}{2} \right) - 2 \sin \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\psi}{2} \right) \sin \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{2} \right) \sin \frac{2(\pi-2\alpha)}{3} + \sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\psi}{2} \right) \right]}, \end{aligned}$$

на нижней стороне ($y<0$)

$$\begin{aligned} V &= \frac{ie^{i(\frac{\varphi}{2}-\theta)} q \sin \frac{2(\pi-2\alpha)}{3}}{6\pi a \left[\sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2} \right) + \sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) \right]} \times \\ &\times \frac{\left[\sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2} \right) - \sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) \right] \sin^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2} \right) \sin^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right)}{\left[\sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2} \right) - 2 \sin \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{2(\pi-2\alpha)}{3} + \sin \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2} \right) \right]}. \end{aligned}$$

$$7.182. \quad V(\varphi) = \frac{qi}{2\pi\rho_0} \frac{(b \cos \varphi + ia \sin \varphi) \sin \varphi}{(d_1 - \cos \varphi)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)}, \quad d_1 = \frac{d^2 + b^2}{ad + b\sqrt{d^2 - c^2}}.$$

$$7.183. \quad V(\varphi) = -\frac{qi}{2\pi\rho_0} \frac{(b \cos \varphi + ia \sin \varphi) \cos \varphi}{(d_1 + \sin \varphi)(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)}, \quad d_1 = \frac{d^2 + a^2}{bd + a\sqrt{d^2 + c^2}}.$$

$$7.184. \quad V(x, y) = -\frac{qpy(y+ip)}{\pi\rho_0(y^2+p^2) \left[y^2 + 2p \left(\sqrt{d + \frac{p}{2}} - \sqrt{\frac{p}{2}} \right)^2 \right]}. \quad 7.185. \quad V(x, y) = \frac{q \operatorname{th} \frac{\pi y}{2p} (y+ip)}{2\rho_0(y^2+p^2)}.$$

$$7.186. \quad V(x, y) = \frac{2q \left[\left(\sqrt{y^2+1} + y \right)^{\frac{4}{3}} - \left(\sqrt{y^2+1} - y \right)^{\frac{4}{3}} \right] (y+i\sqrt{y^2+1})}{3\pi\rho_0 \left[\left(\sqrt{y^2+1} + y \right)^{\frac{4}{3}} + \left(\sqrt{y^2+1} - y \right)^{\frac{4}{3}} + 1 \right] (2y^2+1)}.$$

$$7.187. \quad V(x, y) = \frac{8qy\sqrt{y^2+1}(y+i\sqrt{y^2+1})}{\pi\rho_0 \left[\left(\sqrt{y^2+1} + y \right)^4 + \left(\sqrt{y^2+1} - y \right)^4 + 1 \right]}.$$

$$7.188. \quad V(x, y) = \frac{qy\sqrt{y^2+1}(y+i\sqrt{y^2+1})}{\pi\rho_0(2y^2+1)^2}. \quad 7.189. \quad w(z) = \frac{iJ}{2\pi\sigma} \ln \frac{1}{z} + C.$$

$$7.190. \quad w(z) = \frac{iJ}{\pi\sigma} \ln \frac{z+a}{z-a} + C; \text{ линии тока — окружности, проходящие через}$$

точки $(a, 0)$ и $(-a, 0)$: $x^2 + (y - C_1)^2 = C_1^2 + a^2$.

$$\begin{aligned} 7.191. \quad w(z) &= \frac{iJ}{\pi\sigma} \ln \frac{z \frac{\pi}{\alpha} + a \frac{\pi}{\alpha}}{z \frac{\pi}{\alpha} - a \frac{\pi}{\alpha}} + C; \quad j(r, \varphi) = \\ &= \frac{2Jr \frac{\pi}{\alpha} a \frac{\pi}{\alpha} \left[\left(r \frac{2\pi}{\alpha} \cos \frac{(\pi+\alpha)\varphi}{\alpha} - a \frac{2\pi}{\alpha} \cos \frac{(\pi-\alpha)\varphi}{\alpha} \right) + i \left(r \frac{2\pi}{\alpha} \cos \frac{(\pi+\alpha)\varphi}{\alpha} + a \frac{2\pi}{\alpha} \cos \frac{(\pi-\alpha)\varphi}{\alpha} \right) \right]}{\alpha r \left(r \frac{4\pi}{\alpha} + a \frac{4\pi}{\alpha} - 2r \frac{2\pi}{\alpha} a \frac{2\pi}{\alpha} \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \right)}. \end{aligned}$$

$$7.192. \quad w(z) = \frac{iJ}{\pi\sigma} \ln \frac{\left(z \frac{\pi}{2\alpha} - ia \frac{\pi}{2\alpha} \right) \left(z \frac{\pi}{2\alpha} a \frac{\pi}{2\alpha} - ir_0 \frac{\pi}{\alpha} \right)}{\left(z \frac{\pi}{2\alpha} + ia \frac{\pi}{2\alpha} \right) \left(z \frac{\pi}{2\alpha} a \frac{\pi}{2\alpha} + ir_0 \frac{\pi}{\alpha} \right)} + C;$$

$$\begin{aligned} 7.193. \quad v(x, y) &= \frac{J}{4\pi\sigma} \ln \frac{1}{[ch \frac{\pi x}{H} + \cos \frac{\pi(y-y_0)}{H}][ch \frac{\pi x}{H} + \cos \frac{\pi(y+y_0)}{H}]}, \\ j(x, \frac{H}{2}) &= \frac{J}{2H} \frac{sh \frac{2\pi x}{H} - i \sin \frac{2\pi y}{H}}{ch \frac{2\pi x}{H} + \cos \frac{2\pi y}{H}}. \end{aligned}$$

$$7.194. \quad w(z) = \frac{iJ}{\pi\sigma d} \ln \frac{z - ir_0}{z + ir_0} + C, \quad j(r, \varphi) = \frac{2r_0 J (r_0^2 - r^2 \cos 2\varphi - ir^2 \sin 2\varphi)}{\pi d (r_0^4 + r^4 - 2r_0^2 r^2 \cos 2\varphi)}.$$

Указание. Отобразить круг на полуплоскость (см. задачу 7.190).

$$\begin{aligned} 7.195. \quad w(z) &= \frac{iJ}{2\pi\sigma} \ln \frac{(z+a)(z+\frac{r_0^2}{a})}{(z-a)(z-\frac{r_0^2}{a})} + C, \quad 1) j(0, y) = -\frac{J}{\pi a} \frac{(r_0^2 + a^2)(y^2 + r_0^2)}{(y^2 + a^2)(y^2 + \frac{R_0^4}{a^2})}; \\ 2) j(x, 0) &= \frac{J}{\pi a} \frac{(r_0^2 + a^2)(\frac{r_0^4}{a^2} - x^2)}{(x^2 - a^2)(\frac{r_0^4}{a^2} - x^2)}. \quad 7.196. \quad j(r, \varphi) = \frac{iJ(r_0^4 - r^4 + 2r_0^2 r^2 \sin 2\varphi)}{\pi d (r_0^4 + r^4 + 2r_0^2 r^2 \cos 2\varphi)}. \end{aligned}$$

Отобразить полукруг на полуплоскость (см. задачу 7.190).

$$7.197. \quad j(x, y) = \frac{J}{2dH} \frac{sh \frac{2\pi x}{H} + i \sin \frac{2\pi y}{H}}{ch \frac{2\pi x}{H} - \cos \frac{2\pi y}{H}}.$$

$$7.198. \quad A(r, \varphi) = \frac{2J}{c} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \varphi}} + \frac{2J}{c} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + d_1^2 - 2rd_1 \cos \varphi}} + C, \quad d_1 + \frac{r_0^2}{d}.$$

$$7.199. \quad j(\varphi, z) = \frac{J}{4\pi r_0} \frac{\sin \varphi + i sh \frac{z}{r_0}}{ch \frac{z}{r_0} - \cos \varphi}.$$

Указание. Задача для скалярного потенциала (см. задачу 1.356)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= -\frac{J}{\sigma r_0} \delta(\varphi) \cdot \delta(z), \quad -\pi \leq \varphi < \pi, \quad -\infty < z < \infty, \\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pm\pi} &= 0 \quad (\text{из четности по } \varphi) \end{aligned}$$

в переменных $\xi = vr_0$, $\eta = z$ принимает форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} &= -\frac{J}{\sigma} \delta(\xi) \cdot \delta(\eta), \quad -\pi r_0 \leq \varphi < \pi r_0, \quad -\infty < \eta < \infty, \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \Big|_{\varphi=\pm\pi r_0} &= 0. \end{aligned}$$

На комплексной плоскости ($\zeta = \xi + i\eta$) поле $E = -i\overline{w'}$, $j = -i\sigma\overline{w'}$, интенсивность точечного источника $N = \frac{J}{\sigma}$.

$$7.200. \quad j(\varphi, z) = \frac{J}{2\pi r_0} \frac{\sin 2\varphi + i sh \frac{2z}{r_0}}{ch \frac{2z}{r_0} - \cos 2\varphi}. \quad \text{См. указание к предыдущей задаче.}$$

$$7.201. \quad j(\varphi, z) = \frac{J}{\pi r_0} \frac{-\cos \varphi ch \frac{z}{r_0} + i \sin \varphi sh \frac{z}{r_0}}{\cos 2\varphi + ch \frac{2z}{r_0}}. \quad \text{См. указание к задаче 7.199.}$$

$$7.202. j(x, y) = \frac{J}{2dH} \frac{sh \frac{\pi x}{H} + i \sin \frac{\pi y}{H}}{ch \frac{\pi x}{H} - \cos \frac{\pi y}{H}}.$$

$$7.203. j(x, y) = \frac{2J}{dH} \frac{\cos \frac{\pi x}{H} ch \frac{\pi y}{H} - i \sin \frac{\pi x}{H} sh \frac{\pi y}{H}}{\cos \frac{2\pi x}{H} + ch \frac{2\pi y}{H}}.$$

$$7.204. F = -i \frac{q^2}{h}. \quad 7.205. F = -\frac{q^2}{r_0} e^{\frac{3\pi}{4} i}.$$

$$7.206. F = \frac{q^2}{2r_0} \left(1 - \cos \varphi_0 - i \sin \varphi_0 \frac{2 - \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0} \right).$$

$$7.207. F = -\frac{q^2}{r_0} \left(1 + i \frac{\pi}{\alpha} \operatorname{ctg} \frac{\pi \varphi_0}{\alpha} \right) e^{i \varphi_0}. \quad 7.208. 1) F = -\frac{2q^2 d}{d^2 - a^2}; \quad 2) F = -\frac{q^2}{h} \frac{a^2 + 2h^2}{a^2 + h^2}.$$

$$7.209. 1) F = \frac{2q^2 d}{a^2 - d^2}; \quad 2) F = -\frac{q^2 h}{a^2 + h^2} i. \quad 7.210. F = -\frac{q^2}{h} \frac{(H^2 - 3h^2)}{H^2 - h^2} i.$$

$$7.211. F = -\frac{q^2}{h} \frac{h^2 + H^2}{h^2 - H^2} i. \quad 7.212. F = -i \frac{q^2 d^2 + h^2}{d(d^2 + h^2)}. \quad 7.213. F = \frac{2q^2 d}{d^2 - r_0^2}.$$

$$7.214. 1) F = -\frac{2q^2 d}{d^2 - r_0^2} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}r_0}{9d} \right); \quad 2) F = -\frac{2q^2 h}{h^2 + r_0^2} \left(1 + \frac{2r_0}{3h} \operatorname{ctg} \frac{2\alpha - \pi}{3} \right) i,$$

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{h}{r_0}; \quad \text{в частном случае } F = -\frac{q^2}{r_0} i.$$

$$7.215. \text{п1, п2. } F = -\frac{2q^2 d}{|d^2 - a^2|}. \quad 7.216. 1) F = \frac{2q^2 d(7a^4 + 2a^2 d^2 + d^4)}{(a^2 + d^2)(a^4 - 6a^2 d^2 + d^4)} i;$$

$$2) F = -i \frac{2q^2 a}{a^2 + d^2} \left(\frac{|d|}{a} + \frac{2}{3} \operatorname{ctg} \left(\frac{4\alpha}{3} - \frac{\pi}{6} \right) \right) \frac{|d|}{d}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{|d|}{a}.$$

$$7.217. 1) F = -i \frac{2q^2}{d}; \quad 2) F = -\frac{2q^2}{d} \left(1 + \frac{\pi r_0}{2d} \operatorname{tg} \frac{\pi r_0}{d} \right).$$

$$7.218. F = -q^2 \frac{r_0^2 + x^2 + r_0 x}{(r_0 + x)(r_0^2 + x^2)}. \quad 7.219. F = -\frac{2\pi q^2}{H sh \frac{2\pi a}{H}}.$$

$$7.220. 1) F = -\frac{2q^2}{r_0} \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad 2) F = -\frac{q^2}{2r_0} \frac{2 \sin \frac{\alpha - \psi}{2} \sin \frac{\alpha + \psi}{2} - i \sin \psi}{\sin \frac{\alpha - \psi}{2} \sin \frac{\alpha + \psi}{2}} e^{i\psi}.$$

$$7.221. 1) F = -i \frac{q^2}{d} \frac{d^4 + 4r_0^2 d^2 - r_0^4}{d^4 - r_0^4}. \quad 7.222. F = -\frac{\pi q^2}{H} \operatorname{ctg} \frac{\pi h}{H}.$$

$$7.223. F = -i \frac{\pi q^2}{H} \frac{\sin^2 \frac{\pi h}{2H} + \cos \frac{\pi d}{2H} \sin^2 \frac{\pi d}{2H}}{\sin \frac{\pi d}{H} \sin \frac{\pi(d-h)}{2H} \sin \frac{\pi(d+h)}{2H}}. \quad \text{Сила обращается в нуль при}$$

$$\text{условии } d = \frac{H}{\pi} \operatorname{arcsin} \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + 8 \sin^2 \frac{\pi h}{2H}}} \right). \quad 7.224. F = \frac{q^2}{d} \frac{2d^4 + a^2 d^2 + a^4}{d^4 - a^4}.$$

$$7.225. F = -i \frac{q^2}{a\sqrt{3}} \left[\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2(2 - \sqrt{2})(5 - \sqrt{2} - 2\sqrt{3(2 - \sqrt{2})})} - 1 \right].$$

$$7.226. F = i \frac{q^2}{a} \left[\frac{3 + 2\sqrt{2}}{2(2 - \sqrt{2})(2\sqrt{2(2 - \sqrt{2})} + 3\sqrt{2} - 1)} - 1 \right].$$

$$7.227. F = \frac{q^2}{\sqrt{d^2 - c^2}} \left[\frac{(d^2 + b^2)(bd + a\sqrt{d^2 - c^2})}{(d^2 - a^2)(ad + b\sqrt{d^2 - c^2})} + \frac{d}{\sqrt{d^2 - c^2}} \right].$$

$$7.228. F = -\frac{iq^2}{\sqrt{d^2 + c^2}} \left[\frac{(d^2 + a^2)(ad + b\sqrt{d^2 + c^2})}{(d^2 - b^2)(bd + a\sqrt{d^2 + c^2})} + \frac{d}{\sqrt{d^2 + c^2}} \right].$$

$$7.229. F = -i \frac{q^2}{\sqrt{d^2 + c^2}} \left[\frac{(b(\sqrt{d^2 + c^2} + ad) + (a\sqrt{d^2 + c^2} + bd))}{(d^2 + a^2)(d^2 - b^2)} + \frac{d}{\sqrt{d^2 + c^2}} \right].$$

$$7.230. F = -i \frac{q^2}{\sqrt{d^2 - c^2}} \left[\frac{(b(\sqrt{d^2 - c^2} + ad) + (a\sqrt{d^2 - c^2} + bd))}{(d^2 - a^2)(d^2 + b^2)} + \frac{d}{\sqrt{d^2 - c^2}} \right].$$

$$7.231. 1) F = \frac{q^2 d(5 - 3d^2)}{(1 - d^2)(2 - d^2)}; 2) F = -\frac{q^2 h}{2 + h^2} i \text{ См. указание к задаче 7.34.}$$

$$7.232. 1) F = \frac{q^2}{d} \frac{d^2 + 1}{d^2 - 1}. 2) F = -\frac{17\sqrt{2}q^2}{54}. \text{ См. указание к задаче 7.57.}$$

$$7.233. 1) F = \frac{q^2}{p + 2d} \frac{2\sqrt{p + 2d} - \sqrt{p}}{\sqrt{p + 2d} - \sqrt{p}}. 2) F = -\frac{\pi^2 q}{6p}. \text{ См указание к задаче 7.55.}$$

$$7.234. F = -\frac{2q^2 r_0^2}{d(d^2 - r_0^2)}. 7.235. 1) F = -\frac{2q^2(d - \sqrt{d^2 - a^2})}{d^2 - a^2};$$

$$2) F = -\frac{q^2}{h} \left(\frac{a^2 + 2h^2}{a^2 + h^2} - \frac{2h}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) i. 7.236. F = -\frac{q^2}{\sqrt{d^2 - c^2}} \left(\frac{3 - d^2}{d_1^2 - 1} + \frac{d}{\sqrt{d^2 - c^2}} \right),$$

$$d_1 = \frac{d + \sqrt{d^2 - c^2}}{a + b}. 7.237. w(z) = 2i \left(\frac{p}{z} - \frac{\bar{p}z}{r_0^2} \right) + \lambda, \text{ Im } \lambda = 0.$$

$$7.240. 1) \sigma(x) = -\frac{2phx}{\pi(x^2 + h^2)^2}; 2) \sigma(x) = -\frac{p(x^2 - h^2)}{\pi(x^2 + h^2)^2};$$

$$3) \sigma(x) = -\frac{p}{\pi\sqrt{2}} \frac{x^2 + 2xh - h^2}{(x^2 + h^2)^2}.$$

$$7.241. \sigma(r) = \frac{\pi|p|r_0^{\frac{\pi}{\alpha}-1} r^{\frac{\pi}{\alpha}-1}}{\alpha^2 \left(r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \right)} \left[\left((r^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}}) \cos\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \pm 2r^{\frac{\pi}{\alpha}} r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right) \right) \right].$$

$$7.242. \sigma(\varphi) = -\frac{p}{\pi} \frac{(r_0^2 + d^2) \cos \varphi - 2r_0 d}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \varphi)^2}, \quad q_1 = 0, \quad p_1 = -p.$$

$$7.243. \sigma(\varphi) = -\frac{p}{\pi} \frac{(r_0^2 - d^2) \sin \varphi}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \varphi)^2}, \quad q_1 = 0, \quad p_1 = ip.$$

$$7.244. \sigma(\varphi) = -\frac{p}{\pi} \frac{2r_0 d - (r_0^2 + d^2) \cos \varphi}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \varphi)^2}, \quad q_1 = 0, \quad p_1 = \frac{r_0^2}{d^2} p.$$

$$7.245. \sigma(\varphi) = -\frac{p}{\pi} \frac{(d^2 - r_0^2) \sin \varphi}{(r_0^2 + d^2 - 2r_0 d \cos \varphi)^2}, \quad q_1 = 0, \quad p_1 = i \frac{r_0^2}{d^2} p.$$

$$7.246. 1) \sigma(x) = -\frac{\pi p \sin \frac{\pi h}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{H}}{2H^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi h}{H} - \cos \frac{\pi h}{H} \right)^2}; 2) \sigma(x) = -\frac{\pi p \left(\cos \frac{\pi h}{H} \operatorname{ch} \frac{\pi x}{H} - 1 \right)}{2H^2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi h}{H} - \cos \frac{\pi h}{H} \right)^2};$$

$$7.247. 1) \sigma(\varphi) = -\frac{p}{2\pi\sqrt{d^2 - c^2}} \frac{1 - k \cos \varphi}{(k - \cos \varphi)^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$2) \sigma(\varphi) = -\frac{p}{2\pi\sqrt{d^2 - c^2}} \frac{(d^2 - a^2) \sin \varphi}{(bd + a\sqrt{d^2 - c^2})(k - \cos \varphi)^2} \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}},$$

$$k = \frac{ad - b\sqrt{d^2 - c^2}}{c^2}. 7.249. F = -\frac{|p|^2}{2h^3} i. 7.250. F = -\frac{\pi^3 |p|^2}{2H^3} \frac{\cos \frac{\pi h}{H}}{\sin^3 \frac{\pi h}{H}} i.$$

$$7.251. F = -\frac{e^{i\varphi_0}}{4r_0^3} \left[\frac{1}{3} \bar{p}^2 e^{2i\varphi_0} (1 - \beta^2) + |p|^2 \beta^2 \frac{\sin \beta \varphi_0 + i\beta \cos \varphi_0}{\sin^3 \beta \varphi_0} \right].$$

$$7.252. F = -\frac{4dr_0^2 |p|^2}{(d^2 - r_0^2)^3}. 7.253. F = -\frac{4dr_0^2 |p|^2}{(r_0^2 - d^2)^3}. 7.254. G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z \frac{\pi}{\alpha} - z_0 \frac{\pi}{\alpha}}{z \frac{\pi}{\alpha} - z_0 \frac{\pi}{\alpha}} \right|.$$

$$7.255. v(x, y) = v_0 \left(e^{-y} \sin x - e^{-x} \sin y + e^{-\frac{x+y}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x-y}{\sqrt{2}} - e^{-\frac{x-y}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right).$$

$$7.256. v(x, y) = v_0 \left(e^{-y} \sin x - e^{-x} \sin y - e^{-\frac{x+y}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x-y}{\sqrt{2}} + e^{-\frac{x-y}{\sqrt{2}}} \sin \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right).$$

7.257. $v(r, \varphi) = v_0 \sum_{k=0}^{n-1} e^{-r \sin(\varphi + \frac{\pi k}{n})} \sin(r \cos(\varphi + \frac{\pi k}{n}))$.

7.258. $v(x, y) = \frac{q_0}{\alpha k} e^{-\alpha x} \sin \alpha y$. Указание. Поставить задачу в форме

$$\Delta v(x, y) = -\frac{2q_0}{k} \delta(x) \cdot \sin \alpha y, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y,$$

$$v(x, 0) = 0.$$

7.259. $q(r) = \frac{q_0 r}{\pi a} \ln \left(1 + \frac{a^4}{r^4} \right)$. **7.260.** 1) $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{z_0}{r_0} \right| \left| \frac{z - z_1}{z - z_0} \right|$;

2) $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z - \bar{z}_0)(z - z_1)}{(z - z_0)(z - \bar{z}_1)} \right|$; 3) $G(z, z_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{(z \frac{\pi}{\alpha} - \bar{z}_0 \frac{\pi}{\alpha})(z \frac{\pi}{\alpha} - z_1 \frac{\pi}{\alpha})}{(z \frac{\pi}{\alpha} - z_0 \frac{\pi}{\alpha})(z \frac{\pi}{\alpha} - \bar{z}_1 \frac{\pi}{\alpha})} \right|$, $z_1 = \frac{r_0^2}{z_0}$.

7.261. $v(x, y) = \frac{q}{2\pi k} \ln \left| \frac{z^2 h^2 + r_0^4}{r_0^2(z^2 + h^2)} \right| + v_0$.

7.262. 1) $G(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{ch \frac{\pi(x-\xi)}{H} - \cos \frac{\pi(y+\eta)}{H}}{ch \frac{\pi(x-\xi)}{H} - \cos \frac{\pi(y-\eta)}{H}}$;

2) $G_1(M, P) = G(M, P) - G(M, P')$, $M = (x, y) \in \bar{\Omega}$, $P(\xi, \eta) \in \bar{\Omega}$, P' — точка, симметричная точке P относительно оси Oy , $G(M, P)$ — функция Грина задачи Дирихле для полосы.

7.263. 1) $v(x, y) = v_0 \frac{\sin x sh \frac{(H-y)}{H}}{sh \frac{H}{H}}$;

2) $v(x, y) = v_0 \frac{\cos x sh \frac{y}{H}}{sh \frac{H}{H}}$; 3) $v(x, y) = v_0 \frac{(H-y)sh \frac{2\pi x}{H} - x \sin \frac{2\pi y}{H} - H sh \frac{\pi x}{H} \sin \frac{\pi y}{H}}{H(ch \frac{2\pi x}{H} + \cos \frac{2\pi y}{H})}$.

7.264. $q = \frac{kv_0}{\alpha H}$. **7.265.** 1) $v(x, y) = \frac{v_0 sh \frac{\pi x}{H}}{ch \frac{\pi x}{H} + \sin \frac{\pi y}{H}}$; 2) $v(x, y) = v_0 e^{-\frac{\pi x}{H}} \sin \frac{\pi y}{H}$.

7.266. $v(x, y) = \frac{v_0}{\pi} \left(sh x \sin y \ln \frac{ch x - \cos y}{ch x + \cos y} + 2ch x \cos y \operatorname{arctg} \frac{\sin y}{sh x} \right)$.

7.267. $q(x, 0) = -q(x, H) = -\frac{2q_0 i}{H} \ln ctg \frac{\pi x}{2H}$. Указание. Посредством четного продолжения решения перейти к задаче Дирихле в полосе

$$\Delta v = -\frac{2q}{k} \delta(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < H,$$

$$v(x, 0) = v(x, H) = 0.$$

7.268. $q(x) = -\frac{2q_0 r_0}{\pi x} \ln \frac{r_0 + x}{r_0 - x}$, $-r_0 < x < r_0$. Решение. Требуется решить следующую краевую задачу в полукруге Ω_z :

$$\Delta v(r, \varphi) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \frac{q_0}{k}, \quad v(r, 0) = v(r, \pi) = 0.$$

При конформном отображении $\zeta(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$ граничное условие 2-го рода

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial n_z} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_z,$$

где $\Gamma_z = \partial\Omega_z$, преобразуется к виду

$$\frac{\partial V(\xi, \eta)}{\partial n_\zeta} = \frac{F(\xi, \eta)}{|\zeta'(z)|}, \quad (\xi, \eta) \in \Gamma_\zeta, \quad (7.41)$$

где $V(\xi, \eta) = v(x, y)$, $F(\xi, \eta) = f(x, y)$, n_z — нормаль к контуру Γ_z , n_ζ и Γ_ζ — соответствующие образы. Для доказательства следует записать нор-

мальную производную в форме (7.8)

$$\frac{\partial v}{\partial n_z} = \mathbf{Re}(\nabla v \bar{n}_z)$$

и применить соотношения $\nabla v = \bar{\zeta}' \nabla V$ и (7.10).

Дробно-линейное отображение $\zeta = \frac{r_0 + z}{r_0 - z}$ преобразует область Ω_z в 1-й квадрант $\Omega_\zeta \{\xi, \eta | \xi > 0, \eta > 0\}$. Функция $\zeta = \zeta(z)$ определяет замену переменных

$$\xi + i\eta = \frac{r_0 + re^{i\varphi}}{r_0 - re^{i\varphi}},$$

т.е.

$$\xi = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \varphi}, \quad \eta = \frac{2r_0 r \sin \varphi}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \varphi}.$$

Функция $V(\xi, \eta)$ является решением задачи:

$$\begin{aligned} \Delta V(\xi, \eta) &= 0, \quad (\xi, \eta) \in \Omega_\zeta, \\ V_\xi(0, \eta) &= \frac{2q_0 r_0}{k(1+\eta^2)}, \quad V(\xi, 0) = 0. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно сослаться на инвариантность уравнения Лапласа при замене переменных, определяемой аналитической функцией $\zeta(z)$ (пример 7.8), и воспользоваться формулой (7.41), в которую входит модуль производной

$$|\zeta'(r_0 e^{i\varphi})| = \frac{2r_0}{|r_0 - r_0 e^{i\varphi}|^2} = \frac{1}{2r_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Так как

$$\zeta(r_0 e^{i\varphi}) = \frac{r_0(1+e^{i\varphi})}{r_0(1-r_0 e^{i\varphi})} = i \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2},$$

то $\xi = 0$, $\eta = \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$, следовательно, $|\zeta'(r_0 e^{i\varphi})| = (1 + \eta^2)/(2r_0)$. Задача для $V(\xi, \eta)$ эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \Delta V(\xi, \eta) &= -\frac{2q_0 r_0}{k} \frac{\delta(\xi)}{1+\eta^2}, \quad 0 < \xi, \quad 0 < \eta, \\ V_\xi(0, \eta) &= 0, \quad V(\xi, 0) = 0. \end{aligned}$$

Четное продолжение решения приводит к задаче Дирихле в полуплоскости

$$\begin{aligned} \Delta V(\xi, \eta) &= -\frac{2q_0 r_0}{k} \frac{\delta(\xi)}{1+\eta^2}, \quad -\infty < \xi < \infty, \quad 0 < \eta, \\ V(\xi, 0) &= 0, \end{aligned}$$

решение которой определяется формулой (6.22)

$$\begin{aligned} V(\xi, \eta) &= \frac{4q_0 r_0}{k} \int_0^\infty d\eta' \int_{-\infty}^\infty d\xi' G(\xi, \eta, \xi', \eta') \frac{\delta(\xi')}{1+\eta'^2} = \\ &= \frac{q_0 r_0}{\pi k} \int_0^\infty \ln \frac{\xi^2 + (\eta - \eta')^2}{\xi^2 + (\eta + \eta')^2} \frac{d\eta'}{1+\eta'^2}. \end{aligned}$$

Плотность потока через диаметральную плоскость

$$q(x) = -\frac{k}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0;\pi} = -\frac{k}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) \Big|_{\varphi=0;\pi} =$$

$$= -\frac{8q_0 r_0^2}{\pi k (r_0 - x)^2} \int_0^\infty \frac{\eta d\eta}{(1 + \eta^2)(\xi_0^2 + \eta^2)}, \quad \xi_0 = (r_0 + x)/(r_0 - x).$$

7.269. $v(0, y) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$, $0 < y < a$. Указание. С помощью конформного отображения перейти к задаче для уравнения Лапласа в области $(0 < \xi, 0 < \eta)$, граница $\xi = 0$ которой теплоизолирована.

7.270. $v(r, \varphi) = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{r^2 + r_0^2 + 2rr_0 \sin \varphi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \sin \varphi}$.

7.271. $v(x, y) = \frac{q}{2\pi k} \ln \left| \frac{(z + hi)(r_0^2 - zhi)}{(z - hi)(r_0^2 + zhi)} \right|$.

7.272. $v(r, \varphi) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{r(r_0^2 + a^2) \cos \varphi - a(r_0^2 + r^2)}{r(r_0^2 - a^2) \sin \varphi}$.

7.273. $w(z) = \frac{iJ}{\pi \sigma h} \ln \frac{z - r_0}{z + r_0} + C$, $j(r, \varphi) = \frac{2r_0 J}{\pi h} \frac{r_0^2 - r^2 \cos 2\varphi - ir^2 \sin 2\varphi}{r^4 + r_0^4 - 2r^2 r_0^2 \cos 2\varphi}$.

Указание. Отобразить круг на полуплоскость; затем посредством четного продолжения получить задачу во всей плоскости для двух источников разных знаков. **7.274.** $q(\varphi) = \frac{2q_0}{\pi} (\cos \varphi \ln \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{2} \sin \varphi - 1)$.

7.275. $v(r, 0) = \frac{v_0}{\pi} \operatorname{arccctg} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{2}{\alpha} - 1}}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0} \right)^{\frac{2}{\alpha} - 1}}}$, $r > r_0$.

7.276. 1) $v(r, 0) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{rr_0}}{r_0 - r}$; 2) $v(r, 0) = \frac{2v_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2rr_0}}{r_0 - r}$.

7.277. $v(x, y) = v_0$. **7.278.** $w(z) = -\frac{V_0 r_0}{z} i + C$;

$V(x, 0) = -\frac{V_0 r_0^2}{x^2} i$, $|x| \geq r_0$, $V(r_0, \varphi) = V_0 (\sin 2\varphi - i \cos 2\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

7.280. $w(z) = -iV_0(z - \sqrt{z^2 - a^2})$; $V(x, 0) = \begin{cases} V_0 \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} \right) i & |x| > a, \\ V_0 \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} + i \right), & |x| < a. \end{cases}$

7.281. $\mu = \frac{\pi \rho a^2}{2}$. **7.282.** $w(z) = -i \frac{V_0}{a-b} (z - \sqrt{z^2 - c^2})$;

$V(x, 0) = \frac{V_0 a}{a-b} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right) i$, $|x| > a$,

$V(r, \varphi) = \frac{V_0 a}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \left[\frac{a+b}{2} \sin 2\varphi + (a \sin^2 \varphi - b \cos^2 \varphi) i \right]$.

7.283. $\mu = \frac{\rho a^3}{c} \left(\frac{bc}{a^2} + \operatorname{arcsin} \frac{c}{a} \right)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

7.284. 1) $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}$; 2) $v(x, y) = \frac{x^2 + y(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}$; 3) $v(x, y) = \frac{x(y+1)}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$;

4) $v(x, y) = \frac{x^2 - (y+1)^2}{[x^2 + (y+1)^2]^2}$; 5) $v(x, y) = \frac{x^2 y + (y+2)(y+1)^2}{2[x^2 + (y+1)^2]^2}$; 6) $v(x, y) = e^{-x} \cos x$.

$$7.285. v(x, y) = \frac{v_0}{2\pi a} \left[y \ln \frac{(x-a)^2 + y^2}{x^2 + y^2} + 2x \operatorname{arccctg} \frac{x^2 + y^2 - ax}{xy} \right].$$

$$7.286. \quad 1) \quad v(x, y) = \frac{2}{\pi} \frac{(1+x^2-y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + xy \ln(x^2+y^2)}{(1+x^2-y^2)^2 + 4x^2 y^2};$$

$$2) \quad v(x, y) = \frac{2}{\pi} \frac{[(x^2+y^2)^2 + x^2 - y^2] \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - xy \ln(x^2+y^2)}{(1+x^2-y^2)^2 + 4x^2 y^2}.$$

$$7.287. v(r, \varphi) = 2v_0 \frac{(r_0^2 - r^2)(r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos \varphi)}{(r_0^2 - r^2)^2 + (r_0^2 + r^2 - 2\sqrt{2}r_0 r \cos(\varphi + \frac{\pi}{4}))^2}.$$

$$7.288. v(r_0, \varphi) = 2v_0 \operatorname{tg} \varphi \ln(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}). \quad 7.290. v(r, \varphi) = \frac{v_0 k (r^2 - r_0^2 + \sqrt{3} r r_0 \cos \varphi)}{\sqrt{3} (r^2 + k^2 r_0^2 + 2k r r_0 \cos \varphi)},$$

$$k=2+\sqrt{3}. \quad 7.291. v(r, \varphi) = \frac{v_0 (r^2 - k^2 r_0^2)}{\sqrt{7} (r^2 + k^2 r_0^2 + 2k r r_0 \sin \varphi)}, \quad k = \frac{4+\sqrt{7}}{3}.$$

$$7.293. V(r, \varphi) = \frac{i\Gamma}{2\pi r} e^{i\varphi}. \quad 7.294. V_1(\varphi) = \frac{3\Gamma}{32\pi a} \frac{ie^{i\varphi}}{5-4\cos \varphi},$$

$$V_2(\psi) = \frac{2\Gamma}{9\pi a} \frac{ie^{i\psi}}{5-3\cos \psi}. \quad 7.295. V_1(\varphi) = \frac{2\Gamma}{9\pi a} \frac{ie^{i\varphi}}{5-3\cos \varphi}, \quad V_2(\psi) = -\frac{6\Gamma}{5\pi a} \frac{ie^{i\psi}}{13+5\cos \psi}.$$

7.296. $w(z) = \frac{2J}{c} \ln \frac{1}{z} + C$. Указание. В силу теоремы Стокса из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ следует, что циркуляция магнитного поля $\Gamma = \frac{4\pi J}{c}$.

7.297. Лемнискаты: $r^4 - 2r^2 a^2 \cos 2\varphi = C$. 7.298. Указание. Поставить задачу для векторного потенциала (пример 1.22) и обратиться к примеру 7.8.

$$7.299. \mathbf{H}(x, y) = \mathbf{e}_z \begin{cases} \frac{4\pi N J}{c}, & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega. \end{cases}$$

Указание. Показать, что при конформном отображении граничное условие $H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi i}{c}$ (см. задачу 1.320) не изменяется.

7.300. $H_x - iH_y = -\frac{4\pi J}{\alpha c} \frac{iz}{z} \frac{\frac{2\pi}{\alpha} - 1}{\frac{2\pi}{\alpha} + r_0^\alpha}$. Указание. Так как индукция $B = \mu H$ ограничена, то при $\mu \gg 1$ магнитное поле в магнетике равно нулю. Из непрерывности тангенциальной составляющей на границе $\varphi=0$, $\varphi=\alpha$ следует, что вектор H перпендикулярен границе. Для построения комплексного потенциала надо построить аналитическую функцию $\zeta = \zeta(z)$, конформно отображающую область $\Omega = \{r, \varphi : 0 < r, 0 < \varphi < \alpha\}$ на плоскость (ζ) так, чтобы $\partial\Omega$ отобразилась в разрез, принадлежащий некоторой прямой, на которую отображается также и точка z_0 , при этом $\zeta(\infty) = \infty$.

$$7.301. H = \frac{\pi J}{ch} - \frac{\sin \frac{\pi y}{h} + i \operatorname{sh} \frac{\pi x}{h}}{ch \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi y}{h}}.$$

$$7.302. H_x = -\frac{2J}{ch} \frac{\left(ch \frac{\pi a}{h} ch \frac{\pi x}{h} - \cos \frac{\pi y}{h} \right) \sin \frac{\pi y}{h}}{\left(ch \frac{\pi a}{h} - ch \frac{\pi x}{h} \cos \frac{\pi y}{h} \right)^2 - sh^2 \frac{\pi x}{h} \sin^2 \frac{\pi y}{h}},$$

$$H_y = -\frac{2J}{ch} \frac{\left(ch \frac{\pi a}{h} \cos \frac{\pi y}{h} - ch \frac{\pi x}{h} \right) sh \frac{\pi x}{h}}{\left(ch \frac{\pi a}{h} - ch \frac{\pi x}{h} \cos \frac{\pi y}{h} \right)^2 - sh^2 \frac{\pi x}{h} \sin^2 \frac{\pi y}{h}}.$$

7.303. $F = -\frac{j^2}{hc^2}i$. Указание. Линейная плотность силы, действующей на проводник с током, рассчитывается по формуле

$$F = \frac{j}{c}[\overline{w'(z_0)} - \overline{w'_J(z_0)}],$$

где $w(z)$ и $w'(z)$ — комплексные потенциалы результирующего магнитного поля и поля тока J соответственно. Эта формула является следствием записи векторного произведения в выражении для силы $\mathbf{F} = \frac{1}{c}[\mathbf{JH}]$, куда входят трехмерные векторы $\{0, 0, J\}$ и $\{H_x, H_y, 0\}$, в комплексной форме $[\mathbf{JH}] = -JH_y + iJH_x = iJ(H_x + iH_y) = iJH$ и соотношения (7.4), в котором $A = H$. **7.304.** $F = \frac{2\sqrt{3}J^2}{9r_0c^2}i$. **7.305.** $F = \frac{3\pi J^2}{\alpha r_0 c^2} \left(1 - \frac{2\alpha}{3\pi} + \frac{i}{3}ctg \frac{\pi\varphi_0}{\alpha}\right) e^{i\varphi_0}$.

7.306. $F = i\frac{\pi h^2}{2c^2 H}tg \frac{\pi h}{2H}$. **7.307.** $F = -i\frac{\pi J^2}{c^2 H}cth \frac{\pi a}{H}$. **7.308.** $F = -\frac{J^2}{c^2 d} \frac{2r_0^2}{d^2 - r_0^2}$.

7.309. $F = -\frac{J^2}{c^2} \frac{b(a\sqrt{d^2+b^2-a^2}+bd)}{(d^2-a^2)(d^2+b^2-a^2)}$. **7.310.** $F = -\frac{J^2}{c^2} \frac{a(b\sqrt{d^2+b^2-a^2}+ad)}{(d^2-b^2)(d^2+b^2-a^2)}$.

7.311. $F = -i\frac{J^2}{c^2 r_0} \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{2}-1}{3(2+\sqrt{2})}$. **7.312.** $F = i\frac{J^2}{c^2 r_0} \frac{8+3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$.

?? $F = -\frac{2J^2}{3(d-a)c^2} \left[\frac{a}{3(d+a)} \frac{7(d+a)^{\frac{4}{3}} + (d-a)^{\frac{4}{3}}}{(d+a)^{\frac{4}{3}} - (d-a)^{\frac{4}{3}}} \right]$.

7.313. $F = -\frac{2J^2 i}{d^2+a^2}c^2 \left[\frac{4(1+\sin^2 \frac{2\beta}{3})}{\sin \frac{4\beta}{3}} - d \right]$, $\beta = arctg \frac{d}{a} - \frac{\pi}{4}$.

7.314. $F = \frac{J^2}{2c^2} \frac{r_0^4 + 4r_0^2 d^2 - d^4}{d(r_0^4 - d^4)}$. **7.315.** $w(z) = \overline{V}_\infty z + \frac{V_\infty r_0^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z + C$.

7.316. $z_{1,2} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\Gamma}} \left(\Gamma i \mp \sqrt{16\pi^2 r_0^2 V_0^2 - \Gamma^2} \right)$. Если $|\Gamma| < 4\pi r_0 V_0$, то точка ветвления $z_1 = r_0 e^{i\varphi_1}$, точка схода $z_2 = r_0 e^{i\varphi_2}$, $\varphi_1 = \pi - \varphi_2 + 2\alpha$, $\varphi_2 = \alpha + arcsin \frac{\Gamma}{4\pi r_0 V_0}$; если $|\Gamma| = 4\pi r_0 V_0$, то $z_1 = z_2 = r_0 i e^{i\alpha}$; если $|\Gamma| > 4\pi r_0 V_0$, то единственная критическая точка лежит вне $\overline{B}$.

7.318. 1) $V(\varphi) = -ie^{i\varphi} \frac{4\sqrt[3]{2}V_0 \left(4\sin^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} \cos^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} - \sin^{\frac{4}{3}} \frac{\varphi}{2} - \cos^{\frac{4}{3}} \frac{\varphi}{2} \right)}{9 \left(\sin^{\frac{4}{3}} \frac{\varphi}{2} + \cos^{\frac{4}{3}} \frac{\varphi}{2} - \sin^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} \cos^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} \right)^2 \sqrt[3]{\sin \varphi}}$,

$$V(x) = \frac{16r_0^2 V_0 \left[(r_0+x)^{\frac{4}{3}} + 4(r_0^2+x^2)^{\frac{2}{3}} + (r_0-x)^{\frac{4}{3}} \right]}{9 \left[(r_0+x)^{\frac{4}{3}} + (r_0^2-x^2)^{\frac{2}{3}} (r_0-x)^{\frac{4}{3}} \right]^2 \sqrt[3]{r_0^2-x^2}};$$

2) $V(\varphi) = -ie^{i\varphi} \frac{4\sqrt[3]{2}V_0 \left(\cos^{\frac{4}{3}} \frac{\varphi}{2} \right)}{3\sqrt{3} \left(\cos^{\frac{4}{3}} \frac{\varphi}{2} + \sin^{\frac{4}{3}} \frac{\varphi}{2} - \cos^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} \sin^{\frac{2}{3}} \frac{\varphi}{2} \right)^2 \sqrt[3]{\sin \varphi}}$,

$$V(x) = \frac{16r_0^2 V_0 \left[(r_0+x)^{\frac{4}{3}} - (r_0-x)^{\frac{4}{3}} \right]}{3\sqrt{3} \left[(r_0+x)^{\frac{4}{3}} + (r_0^2-x^2)^{\frac{2}{3}} (r_0-x)^{\frac{4}{3}} \right]^2 \sqrt[3]{r_0^2-x^2}}.$$

$$7.319. \quad 1) \quad V|_{S_1} = -ie^{i(\frac{\pi}{2}-\psi)} \frac{8V_0 \sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\psi}{2}) \sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\psi}{2})}}{9 \left[\sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}+\frac{\psi}{2})} + \sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}-\frac{\psi}{2})} \right]^2},$$

$$V|_{S_2} = ie^{i(\frac{3\pi}{2}+\theta)} \frac{8V_0 \sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2})}}{9 \left[\sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2})} + \sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2})} \right]^2};$$

$$2) \quad V|_{S_1} = ie^{i(\frac{\pi}{2}-\psi)} \frac{4V_0 \left[\sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\psi}{2})} - \sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\psi}{2})} \right]}{9 \left[\sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}+\frac{\psi}{2})} + \sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}-\frac{\psi}{2})} \right]^2 \sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\psi}{2}) \sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\psi}{2})}},$$

$$V|_{S_2} = ie^{i(\frac{3\pi}{2}+\theta)} \frac{4V_0 \left[\sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2})} - \sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2})} \right]}{9 \left[\sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2})} + \sqrt[3]{\sin^4(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2})} \right]^2 \sqrt[3]{\sin(\frac{\pi}{8}+\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{\pi}{8}-\frac{\theta}{2})}}.$$

$$7.320. \quad w(z) = V_0(z \cos \alpha - i\sqrt{z^2 - a^2} \sin \alpha) + C; \quad V_{1,2} = v_0 \left(\cos \alpha \mp \frac{x \sin \alpha}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right).$$

$$7.321. \quad 1) \quad V(\psi) = -ie^{i(\frac{\pi}{2}-\psi)} \frac{V_0 \sin \beta \sin \frac{\beta}{2} \left(\sqrt{\sin \frac{\beta+\psi}{2} \sin \frac{\beta-\psi}{2}} \mp \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \psi \right)}{\left(\cos \frac{\psi}{2} - \sqrt{\sin \frac{\beta+\psi}{2} \sin \frac{\beta-\psi}{2}} \right)^2 \sqrt{\sin \frac{\beta+\psi}{2} \sin \frac{\beta-\psi}{2}}};$$

$$2) \quad V(\psi) = \pm ie^{i(\frac{\pi}{2}-\psi)} \frac{V_0 \sin \beta \cos^3 \frac{\beta}{2} \sin \frac{\psi}{2}}{\left(\cos \frac{\psi}{2} \mp \sqrt{\sin \frac{\beta+\psi}{2} \sin \frac{\beta-\psi}{2}} \right)^2 \sqrt{\sin \frac{\beta+\psi}{2} \sin \frac{\beta-\psi}{2}}}.$$

Верхний знак соответствует выпуклой стороне, нижний — вогнутой.

$$7.322. \quad w(z) = \frac{V_0}{a-b} [(az - b\sqrt{z^2 - c^2}) \cos \alpha + i(bz - a\sqrt{z^2 - c^2}) \sin \alpha] + C;$$

$$P(\varphi) = P_0 - \frac{\rho V_0^2}{2} \left(1 - \frac{(a+b)^2 \sin^2(\varphi-\alpha)}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi} \right).$$

$$7.324. \quad 1) \quad P = -\frac{\rho N^2}{4\pi a}; \quad 2) \quad P = -\frac{\rho \Gamma^2}{4\pi a}.$$

$$7.325. \quad P = \frac{d\rho \Gamma^2}{2\pi \sqrt{(r_1+r_2+d)(r_1+r_2-d)(r_1-r_2+d)(r_1-r_2-d)}}.$$

$$7.327. \quad P = i2\pi a \rho V_0^2 \sin \alpha e^{i\alpha}. \quad 7.328. \quad V(z) = V_0 \left(\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{\frac{z-a}{z+a}} \right);$$

$V(x) = V_0 \left(\cos \alpha \mp \sin \alpha \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \right)$, минус соответствует верхней ($x, y=0+i0$), плюс — нижней стороне ($x, y=0-i0$) полосы.

$$7.329. \quad P = -i2\pi(\sqrt{a^2 + d^2} + d)\rho V_0^2 \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) e^{i\alpha}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{h}{a}.$$

$$7.330. \quad P = i4\pi r_0 \rho V_0^2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\alpha + \frac{\beta}{2} \right) e^{i\alpha}.$$

$$7.331. \quad P = i \frac{16\pi r_0 \rho V_0^2}{3\sqrt{3}} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6} \right) e^{i\alpha}. \quad 7.332. \quad P = i \frac{4\sqrt{2}\pi r_0 \rho V_0^2 \sin \alpha e^{i\alpha}}{3}.$$

$$7.333. \quad w(z) = V_0 \left(z - p - i\sqrt{2pz - z^2} \right); \quad V|_L = \frac{V_0 y(y+pi)}{y^2 + p^2}.$$

7.334. $w(z) = -iE_0 \left(z - \frac{r_0^2}{z} \right) + C$, $\sigma(\varphi) = \frac{E_0 \cos \varphi}{2\pi}$. Указание. Функция $w(z)$ конформно отображает внешность круга на внешность отрезка, параллельного вещественной оси, при условиях $w(\infty) = \infty$, $w'(\infty) = -i\bar{E}_0$ (см. пример 7.15). 7.337. $w(z) = -i \frac{aE_0}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + C$, $\zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a} e^{-i\alpha}$,

$\sigma(x) = \frac{E_0}{4\pi} \frac{x \cos \alpha \pm \sqrt{a^2 - x^2} \sin \alpha}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $-a < x < a$, знак плюс соответствует верхней стороне ($z = x + i0$) полосы, знак минус — нижней ($z = x - i0$).

$$\begin{aligned} 7.338. \quad 1) \quad \sigma_{1,2}(\varphi) &= \frac{E_0(\cos \frac{\varphi}{2} - \sin \frac{\varphi}{2})}{8\pi r_0(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\sin \varphi})^2 \sqrt{\sin \varphi}}, \\ q_{1,2} &= 0, \quad \text{sign } \sigma_{1,2} = \text{sign}(\frac{\pi}{2} - \varphi); \\ 2) \quad \sigma_{1,2}(\varphi) &= \frac{E_0(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \pm 2\sqrt{\sin \varphi})}{8\pi r_0(\cos \frac{\varphi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \pm \sqrt{\sin \varphi})^2 \sqrt{\sin \varphi}}, \quad q_{1,2} = \mp \frac{E_0}{2\pi}; \end{aligned}$$

на участке $\arcsin \frac{1}{3} < \varphi < \pi - \arcsin \frac{1}{3}$ выпуклой стороны заряд положителен, на остальной части поверхности — отрицателен.

$$\begin{aligned} 7.339. \quad w(z) &= -iE_0 \frac{a+b}{2} \left(\zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + C, \quad \zeta = \frac{z + \sqrt{z^2 - c^2}}{a+b} e^{-i\alpha}; \\ \sigma(\varphi) &= \frac{(a+b)E_0}{4\pi} \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7.340. \quad 1) \quad \sigma(\varphi) &= \frac{\sqrt[3]{2}E_0 \left(\cos \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} - 2 \cos \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} - \sin \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} \right)}{9\pi \left(\cos \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} - \cos \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} + \sin \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} \right)^2 \sqrt[3]{\sin \varphi}}, \\ \sigma(x) &= \frac{4E_0 r_0^2 \left[(r_0+x) \frac{4}{3} + 2(r_0^2-x^2) \frac{2}{3} - (r_0-x) \frac{4}{3} \right]}{3\sqrt[3]{3}\pi \left[(r_0+x) \frac{4}{3} + (r_0^2-x^2) \frac{2}{3} + (r_0-x) \frac{4}{3} \right]^2 \sqrt[3]{r_0^2-x^2}}; \\ 2) \quad \sigma(\varphi) &= -\frac{\sqrt[3]{2}E_0 \left(\cos \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} + 2 \cos \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} + \sin \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} \right)}{9\pi \left(\cos \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} - \cos \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} \sin \frac{\varphi}{2} \frac{2}{3} - \sin \frac{\varphi}{2} \frac{4}{3} \right)^2 \sqrt[3]{\sin \varphi}}, \\ \sigma(x) &= -\frac{4E_0 r_0^2 \left[(r_0+x) \frac{4}{3} - 2(r_0^2-x^2) \frac{2}{3} + (r_0-x) \frac{4}{3} \right]}{3\sqrt[3]{3}\pi \left[(r_0+x) \frac{4}{3} + (r_0^2-x^2) \frac{2}{3} + (r_0-x) \frac{4}{3} \right]^2 \sqrt[3]{r_0^2-x^2}}. \end{aligned}$$

7.341. $H_x = H_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \cos 2\varphi \right)$, $H_y = H_0 \frac{r_0^2}{r^2} \sin 2\varphi$, ось $0x$ направлена по H_0 . См. указание к задаче 7.300.

$$7.342. \quad H(\varphi) = (a+b) \cos(\varphi - \alpha) \frac{b \cos \varphi + ia \sin \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Глава 8

МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК

Глава содержит задачи для уравнений с частными производными в двухмерном пространстве (неизвестная функция зависит от двух переменных), построение и исследование свойств решений которых осуществляется методом характеристик. С помощью этого метода проводится классификация линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, множество которых разбивается на три основные группы однотипных уравнений. Отыскание характеристик (в двухмерном случае — это линии на плоскости) состоит в решении обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Посредством характеристик вводятся новые независимые переменные, переход к которым преобразует уравнение к наиболее простой (канонической) форме. В результате этой процедуры удастся найти общее решение (т.е. содержащее любое частное решение в заданном классе функций) некоторых уравнений гиперболического типа (в частности, волнового уравнения) и получить аналитическое решение различных задач (задачи Коши, задачи Гурса, смешанных задач). Применение метода характеристик к линейным и квазилинейным уравнениям с

частными производными 1-го порядка сводит их к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод характеристик применим также к решению различных задач для гиперболических систем линейных и квазилинейных уравнений относительно двух неизвестных функций в двумерном пространстве. Решение таких систем основано на преобразовании их сначала к характеристической форме, затем к инвариантам Римана. В некоторых случаях (гиперболическая система двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами) система в инвариантах распадается на два независимых уравнения. Гиперболические системы имеют многочисленные приложения в физике.

Литература к главе: [34], [72], [14], [10], [60].

8.1. Линейные гиперболические уравнения с частными производными 2-го порядка

Пример 8.1. Приведение дифференциальных уравнений с частными производными 2-го порядка, линейных относительно старших производных, к каноническому виду. Если в области $\Omega(x, y)$ уравнение (1.1)

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (8.1)$$

принадлежит определенному типу, то существует такое взаимно однозначное соответствие

$$T : \Omega(x, y) \rightarrow \Omega(\xi, \eta), \quad T \in C^2(\Omega),$$

что в области $\Omega(\xi, \eta)$ уравнение (8.1) имеет следующий вид, называемый каноническим:

$$\begin{aligned} u_{\xi\eta} + \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) &= 0 \quad \text{— гиперболический тип,} \\ u_{\eta\eta} + \Phi_2(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) &= 0 \quad \text{— параболический тип,} \\ \Delta u + \Phi_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) &= 0 \quad \text{— эллиптический тип.} \end{aligned}$$

Для построения отображения T применяется метод характеристик. Характеристиками называются интегральные кривые характеристического уравнения $a dy^2 - 2b dx dy + c dx^2 = 0$, или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad a \neq 0. \quad (8.2)$$

При $b^2 - ac > 0$ общие интегралы $\varphi_1(x, y) + C_1$, $\varphi_2(x, y) = C_2$ уравнений (8.2) определяют два различных семейства вещественных характеристик. В этом случае отображение T будет иметь форму: $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$. При $b^2 - ac = 0$ есть только одно семейство характеристик $\varphi_1(x, y) = C$. Отображение T определяется формулами $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$, где $\varphi_2(x, y)$ — произвольная функция класса $C^2(\Omega(x, y))$, такая что якобиан $J(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0$ в Ω . Если $b^2 - ac < 0$, то имеются два семейства мнимых характеристик $\varphi_1(x, y) \pm i\varphi_2(x, y) = C_{1,2}$. Формулы $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ задают отображение T .

Пусть дано уравнение

$$u_{xx} + 2chx u_{xy} + sh^2x u_{yy} + shx u_y = 0. \quad (8.3)$$

Так как $b^2 - ac = ch^2x - sh^2x = 1$, то уравнение принадлежит гиперболическому типу во всей плоскости. Характеристические уравнения

$$\frac{dy}{dx} = chx \pm 1$$

обладают общими интегралами $shx \pm x - y = C_{1,2}$. В новых переменных $\xi = shx + x - y$, $\eta = shx - x - y$ уравнение (8.3) примет вид: $u_{\xi, \eta} = 0$.

Привести к каноническому виду дифференциальные уравнения второго порядка 8.1 – 8.6.

8.1. $x u_{xx} + 2y u_{xy} + x u_{yy} + u_x = 0$.

8.2. $u_{xx} + 2u_{xy} + (1 + y^2) u_{yy} + 2y u_y = 0$.

$$8.3. \quad u_{xx} + 2 \cos x \, u_{xy} + u_{yy} - y \, u_y = 0.$$

$$8.4. \quad ch^2 y \, u_{xx} + 2 \, u_{xy} + u_{yy} + ch \, y \, u_x = 0.$$

$$8.5. \quad e^{2y} u_{xx} + 2e^y u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

$$8.6. \quad x^2 u_{xx} + 2x \sin 2y \, u_{xy} + \sin^2 2y \, u_{yy} - \sin 4y \, u_y = 0.$$

Пример 8.2. Решение задачи Коши для уравнения гиперболического типа. Пусть уравнение

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \quad (8.4)$$

принадлежит гиперболическому типу в области Ω . На линии $L \subset \overline{\Omega}$, касательное направление в каждой точке которой не совпадает с характеристическим направлением в этой точке, определены функции $u_0(x, y)$, $u_1(x, y)$ и вектор $\mathbf{l}(x, y)$, не касательный к L . Задача Коши ставится следующим образом: найти решение уравнения (8.4) в классе достаточно гладких функций при условиях

$$u|_{\Gamma} = u_0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{\Gamma} = u_1.$$

Решение задачи Коши для гиперболического уравнения (8.3) в полуплоскости $\Omega = \{x, y : -\infty < x < \infty, 0 < y\}$ при условиях на границе $u(x, 0) = sh \, x$, $u_y(x, 0) = 1$ (здесь Γ — ось $0x$) состоит из двух этапов: 1. построение общего решения методом характеристик, 2. выделение частного решения, удовлетворяющего условиям на Γ .

1°. Общее решение получается интегрированием уравнения, приведенного к каноническому виду $u_{\xi, \eta} = 0$ (пример 8.1), сначала по η

$$u_{\xi} = C(\xi),$$

а затем по ξ

$$u = \int C(\xi) \, d\xi + g(\eta) = f(\xi) + g(\eta),$$

или в старых переменных

$$u(x, y) = f(sh\,x + x - y) + g(sh\,x - x - y) = 0, \quad (f, g) \in C^2. \quad (8.5)$$

2°. Из условий на Γ следует, что функции f и g удовлетворяют системе тождеств

$$\begin{aligned} f(sh\,x + x) + g(sh\,x - x) &= sh\,x, \\ f'(sh\,x + x) + g'(sh\,x - x) &= 1. \end{aligned}$$

Сумма двух тождеств — продифференцированного по x первого и умноженного на $1 + ch\,x$ второго — равна $2f'(sh\,x + x) = 1$, следовательно, $f(z) = z/2 + C$. Тогда

$$g(sh\,x - x) = sh\,x - \frac{sh\,x + x}{2} - C = \frac{sh\,x - x}{2} - C,$$

т.е. $g(z) = z/2 - C$. Решение задачи Коши получается подстановкой в (8.5) найденных выражений для функций f и g :

$$u(x, y) = \frac{sh\,x + x - y}{2} + C + \frac{sh\,x - x - y}{2} - C = sh\,x - y.$$

8.7. Показать, что характеристика уравнения (8.4) — это линия, на которой могут иметь разрыв вторые производные решения $u(x, t)$ задачи Коши, т.е. решение $u(x, t)$ нельзя продолжить с характеристики на область Ω единственным образом.

8.8. Оператор Эйлера-Дарбу имеет вид

$$\mathcal{E}(\alpha, \beta) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{x - y} \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} - \beta \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{E}(\alpha, \beta) u(x, y) = 0$. Доказать, что

- 1) $v = (x - y)^{\alpha + \beta - 1} u$ — решение уравнения $\mathcal{E}(1 - \beta, 1 - \alpha) v = 0$;
- 2) $v = \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{E}(\alpha + n, \beta + m) v = 0$.

8.9. Найти общее решение уравнения

$$u_{xy} - \frac{\alpha u_x - \beta u_y}{x - y} = 0,$$

если 1) $\alpha=m$, $\beta=n$, $m, n \in \mathbf{N}$; 2) $\alpha = -m$, $\beta = -n$, $m, n \in \mathbf{N}$.

8.10. Доказать, что решение задачи Коши для волнового уравнения

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1 \end{aligned}$$

выражается формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{u_0(x + at) + u_0(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) d\xi.$$

8.11. При изучении свойств решений гиперболических уравнений вводится ряд понятий, которые в случае задачи Коши для волнового уравнения (см. задачу (8.10)) определяются следующим образом:

1) областью зависимости решения $u(x, t)$ в точке $M(x, t)$ называется множество точек оси $0x$, такое, что значения начальных условий в этих и только в этих точках определяют решение $u(x, t)$ в точке $M(x, t)$;

2) областью влияния отрезка $[A; B]$ оси $0x$ называется часть полуплоскости $t \geq 0$, вне которой решение $u(x, t)$ не изменится при изменении начальных данных на $[A; B]$;

3) областью определенности отрезка $[A; B]$ оси $0x$ называется часть полуплоскости $t \geq 0$, содержащая точки, области зависимости решения в которых принадлежат отрезку $[A; B]$.

Найти область зависимости решения в точке M , а также области влияния и определенности отрезка $[A; B]$ оси $0x$, если 1) $u_0(x) = 0$, $u_1(x) \neq 0$; 2) $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$.

Решить задачи Коши 8.12 – 8.21.

$$\begin{aligned} 8.12. \quad u_{tt} &= a^2 u_{xx} - 2\gamma u_t - \gamma^2 u, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.13. \quad u_{xx} - y^2 u_{yy} - y u_y &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 < y, \\ u(x, 1) &= 0, \quad u_y(x, 1) = 3x^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.14. \quad x^2 u_{xx} - u_{yy} + 3x u_x + 2u_y &= 0, \quad 1 < x, \quad -\infty < y < \infty, \\ u(1, y) &= y^2, \quad u_x(1, y) = 2y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.15. \quad x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} + x u_x - y u_y &= 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\ u(x, 1) &= u_0(x), \quad u_y(x, 1) = u_1(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.16. \quad x u_{xx} - u_{yy} + u_x &= 0, \quad 0 < x, \quad 0 < y < 1, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_y(x, 0) = e^{-\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.17. \quad x u_{xx} - y u_{yy} + (\sqrt{x} + \tfrac{1}{2}) u_x + (\sqrt{y} + \tfrac{1}{2}) u_y &= 0, \\ 1 < x < 2, \quad 1 < y < 2, \\ u(1, y) &= \sqrt{y}, \quad u_x(1, y) = -\tfrac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.18. \quad x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} &= 0, \quad 1 < x < 10, \quad -6 < y < -1, \\ u(1, y) &= \frac{2}{\sqrt{-y}}, \quad u_x(1, y) = \frac{1}{\sqrt{-y}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.19. \quad u_{xx} - 2 \cos x u_{xy} - \sin^2 x u_{yy} - u_x + (1 + \sin x + \cos x) u_y &= 0, \\ 0 < x, \quad 0 < y, \\ u(0, y) &= e^y, \quad u_x(0, y) = e^y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.20. \quad x u_{xx} - u_{yy} - \tfrac{1}{2} u_x &= 0, \quad 0 < x < 4, \quad |y| < 2, \\ u(x, 0) &= 4x, \quad u_y(x, 0) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.21. \quad u_{xx} - u_{yy} + x u_x - y u_y + \frac{x^2 - y^2}{4} u &= 0, \quad -\infty < y < \sqrt{3}x < \infty, \\ u|_{\Gamma} &= 2x e^{-x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = -\sqrt{3} e^{-x^2}, \\ \Gamma &= \{x, y : y = \sqrt{3}x, -\infty < x < \infty\}. \end{aligned}$$

Пример 8.3. Решить задачу Коши для неоднородного волнового уравнения

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

В переменных $\sigma = x + at$, $\theta = x - at$ задача Коши имеет вид:

$$\begin{aligned} u_{\sigma, \theta} &= -\frac{1}{4a^2} f\left(\frac{\sigma+\theta}{2}, \frac{\sigma-\theta}{2a}\right), \quad \infty < \theta < \sigma < \infty, \\ u(\sigma, \sigma) &= 0, \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$u_{\sigma}(\sigma, \sigma) - u_{\theta}(\sigma, \sigma) = 0. \quad (8.7)$$

После интегрирования уравнения по θ от θ до σ получается выражение

$$u_{\sigma}(\sigma, \sigma) - u_{\sigma}(\sigma, \theta) = -\frac{1}{4a^2} \int_{\theta}^{\sigma} f\left(\frac{\sigma+\beta}{2}, \frac{\sigma-\beta}{2a}\right) d\beta. \quad (8.8)$$

Если $\theta = \theta(\sigma)$, то $\frac{du}{d\sigma} = u_{\sigma} + u_{\theta} \frac{d\theta}{d\sigma}$. При $\sigma = \theta$ в силу (8.7)

$$\frac{du(\sigma, \sigma)}{d\sigma} = u_{\sigma}(\sigma, \sigma) + u_{\theta}(\sigma, \sigma) = 2u_{\sigma}(\sigma, \sigma).$$

С учетом этого соотношения и условия (8.6) интегрирование уравнения (8.8) по σ от θ до σ приводит к решению задачи Коши в форме:

$$u(\sigma, \theta) = \frac{1}{4a^2} \int_{\theta}^{\sigma} d\alpha \int_{\theta}^{\alpha} f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2a}\right) d\beta.$$

Естественно сделать замену $\alpha + \beta = 2\xi$, $\alpha - \beta = 2a\tau$ и вернуться к старым переменным, тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (8.9)$$

8.22. На бесконечную струну ($-\infty < x < \infty$) с момента времени $t=0$ до $t=t_0 > 0$ действует сила $F(t)\mathbf{e}_u$, приложенная в точке $x=0$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях, если $F(t)=F_0$. Начертить профиль струны в моменты времени $0 < t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$. Найти закон движения точки $x=x_0$ и построить соответствующий график.

8.23. Решить предыдущую задачу для $F(t)=F_0 \sin \omega t$, $t_0=2\pi/\omega$, $t_1=\frac{\pi}{\omega}$, $t_2=\frac{3\pi}{\omega}$.

8.24. К неограниченной струне ($-\infty < x < \infty$) с момента времени $t=0$ приложена сосредоточенная сила $F(t)\mathbf{e}_u$, движущаяся вдоль струны по закону $x=v_0 t$, $0 < v_0 \ll a$. Решить задачу о движении струны при нулевых начальных условиях.

8.25. Решить задачу 8.24 для $F(t)=F_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha > 0$. Начертить профиль струны в момент времени $t_0 > 0$. Найти закон движения точек струны с координатами $x_0 > 0$ и $x_0 < 0$.

8.26. Решить задачу 8.24 для $F(t)=F_0 \sin \omega t$. Найти частоты ω_1 и ω_2 колебаний точек струны, находящихся перед источником колебаний и за ним (эффект Доплера).

8.27. Трубка ($-\infty < x < \infty$) заполнена идеальным газом, давление и плотность которого P_0 и ρ_0 соответственно. С момента времени $t=0$ в трубке начинает действовать плоский источник того же газа мощности $q(t)$ на единицу площади, движущийся по закону $x=v_0 t$, $0 < v_0 \ll a$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

Пример 8.4. Решение смешанной задачи для гиперболического уравнения. К концу полуограниченного стержня ($0 < x$) прикреплена пружинка с коэффициентом жесткости k . С момента $t=0$ свободный конец пружинки движется вдоль оси $0x$ по закону $\mu(t)$. Решить задачу о движении стержня при нулевых началь-

ных условиях. Постановка задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t, \\ ESu_x(0, t) - k[u(0, t) - \mu(t)] &= 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Общее решение $u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$ волнового уравнения (задача 8.10) содержит две произвольные функции, которые надо выбрать так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} f(x) + g(x) &= 0, \\ af'(x) - ag'(x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad x \geq 0,$$

$$f'(at) + g'(at) - \frac{\beta}{a}[f(at) + g(at)] - \frac{\beta}{a}\mu(t), \quad t > 0, \quad \beta = \frac{k}{S\sqrt{E\rho}}.$$

Из первых двух уравнений следует, что $f(x) = -g(x) = C$ при $x \geq 0$. При $x < 0$ функция $g(x)$ определяется из третьего уравнения

$$g'(x) - \frac{\beta}{a}g(x) = \frac{\beta}{a}C - \frac{\beta}{a}\mu\left(-\frac{x}{a}\right), \quad x < 0,$$

при условии $g(0) = -C$, которое вытекает из непрерывности $g(x)$ в нуле. Отсюда

$$g(x) = \beta e^{\frac{\beta x}{a}} \int_0^{-\frac{x}{a}} \mu(\tau) e^{\beta \tau} d\tau - C, \quad x \leq 0.$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \beta e^{-\beta(t-\frac{x}{a})} \int_0^{t-\frac{x}{a}} \mu(\tau) e^{\beta \tau} d\tau \cdot \eta\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

8.28. Полуограниченная трубка ($0 < x$) заполнена идеальным газом, давление и плотность которого P_0 и ρ_0 соответственно. Конец трубки закрыт поршнем, который начинает двигаться с момента времени $t=0$ по закону $u_0 \sin \omega t$. Определить в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

8.29. Найти потенциал полубесконечной линии ($0 < x$) без искажения ($RC=LG$), к концу которой в момент времени $t=0$ подключается батарея с ЭДС $E(t)$.

8.30. На конце полуограниченной линии ($0 < x$) без искажения ($RC=LG$) находится конденсатор C_0 , заряд которого Q_0 . В момент времени $t=0$ конец линии заземляется. Определить зависимость от времени заряда конденсатора.

8.31. Полуограниченный круглый вал ($0 < x$) не деформирован и находится в покое. С момента времени $t=0$ на торец $x=0$ действует момент сил $M(t)$. Решить задачу о движении вала.

8.32. Торец вала ($0 < x$) упруго закреплён посредством спиральной пружины с коэффициентом жесткости k , свободный конец пружины совершает крутильные (относительно оси вала) колебания по закону $u_0 \sin \omega t$. Решить задачу о движении вала при нулевых начальных условиях.

8.33. Точечная масса M , движущаяся со скоростью v вдоль оси $0x$, ударяет в торец полуограниченного цилиндрического стержня ($0 < x$), находящегося в статическом равновесии. Решить задачу о движении стержня. Определить скорость массы M . Произойдет ли ее отрыв от стержня?

8.34. По полуограниченному стержню ($0 < x$) распространяется волна $f(x+at)$. При каком условии отсутствует отраженная волна, если на торец $x=0$ действует сила сопротивления, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности на единицу площади поперечного сечения стержня равен α)?

8.35. На конце полуограниченного стержня ($0 < x$) находится тонкая пластинка массой M , к которой прикреплена пружинка с коэффициентом жесткости k , расположенная вдоль оси $0x$. Свободный конец пружинки движется по закону $\mu(t)\eta(t)\mathbf{e}_x$. Решить задачу о движении стержня при нулевых начальных условиях.

Решить смешанные задачи 8.36–8.45.

- 8.36.** $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = ch \, x \sin x, \quad u_t(x, 0) = ch \, x \sin x + sh \, x \cos x,$
 $u(0, t) = e^{-t}.$
- 8.37.** $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = e^{-x} \sin x, \quad u_t(x, 0) = e^{-x} (\cos x - \sin x),$
 $u(0, t) = -e^{-t} \sin t.$
- 8.38.** $u_{tt} = u_{xx} - 1, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = \frac{x^2}{2}, \quad u_t(x, 0) = 2x + 1, \quad u(0, t) = t e^{-t}.$
- 8.39.** $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = \cos x, \quad u_x(0, t) = 2 \cos t.$
- 8.40.** $u_{tt} = u_{xx} + x e^{-t}, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = \sin t.$
- 8.41.** $u_{tt} = u_{xx} + 2u_x + u, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = e^{-\frac{x}{2}}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad u_x(0, t) = \frac{1}{6} e^{-\frac{t}{2}}.$
- 8.42.** $u_{tt} = u_{xx} - 2u_t - u, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = e^{-x}, \quad u_t(x, 0) = -e^{-x}, \quad u_x(0, t) = e^{-t}.$
- 8.43.** $u_{tt} = u_{xx} + u_x + u_t, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = e^{-x}, \quad u_x(0, t) = e^{-t}.$
- 8.44.** $u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = \cos x, \quad u_x(0, t) - u(0, t) = \sin t.$
- 8.45.** $u_{tt} = u_{xx} + \frac{4x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = \operatorname{erf} x, \quad u_t(x, 0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad u_t(x, 0) = \operatorname{erf} x,$
 $u_x(0, t) - u(0, t) = \operatorname{erf} t.$
- 8.46.** $u_{tt} = u_{xx} + 2 \sin x, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$
 $u(x, 0) = x, \quad u_t(x, 0) = -1, \quad u_t(0, t) + u(0, t) = -\sin t.$

$$8.47. \quad u_{tt} = u_{xx} + e^{-t} \sin x, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

$$2u_x(0, t) - u_t(0, t) = 2e^{-t}.$$

$$8.48. \quad u_{tt} = u_{xx} - x \sin t, \quad 0 < x, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x + \sin x,$$

$$4u_x(0, t) - 3u_t(0, t) = \frac{1}{6} \sin t.$$

$$8.49. \quad (H - x)^2 u_{tt} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} (H - x)^2 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\infty < x < H, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad |u(H, t)| < \infty.$$

8.50. Решить задачу Коши в $\mathbf{R}^3$:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad u|_{t=0} = u_0(r), \quad u_t|_{t=0} = u_1(r).$$

Рассмотреть случай: $u_0(r) = u_0 e^{-\alpha r}$, $u_1(r) = 0$.

8.51. По неоднородной струне $(-\infty < x < \infty)$, плотность которой

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1, & x < 0, \\ \rho_2, & 0 < x, \end{cases}$$

распространяется волна $f(t - \frac{x}{a})$. Найти отраженную и прошедшую волны.

8.52. Длинная трубка, площадь поперечного сечения которой равна S_1 при $x < 0$ и S_2 при $0 < x$, заполнена идеальным газом. По трубке распространяется звуковая волна $f(x + at)$. Определить в акустическом приближении коэффициент отражения звука (отношение потоков энергии в отраженной и прошедшей волнах) при прохождении волны через сечение $x=0$.

8.53. Идеальная несжимаемая жидкость заполняет неограниченный канал $(-\infty < x < \infty)$ с прямоугольным поперечным сечением; ширина и глубина канала равны соответственно b_1 и h_1 при $x < 0$, b_2 и h_2 при $x > 0$. Вдоль канала распространяется длинная гравитационная волна, при движении которой поверхность жидкости принимает форму $\zeta(x, t) = f(t - \frac{x}{c_1})$, где $c_1 = \sqrt{gh_1}$ (задача 1.235). Определить коэффициент отражения волны при прохождении через сечение $x=0$.

8.54. В точке $x=0$ неограниченной струны ($-\infty < x < \infty$) находится шарик, масса которого M . По струне распространяется волна $f(x+at)$. Найти закон движения шарика.

8.55. В сечении $x=0$ неограниченного стержня ($-\infty < x < \infty$) находится тонкая прокладка, масса которой M . Вдоль стержня распространяется волна $f(x+at)$. Решить задачу о движении стержня.

8.56. В точке $x=0$ неограниченной струны ($-\infty < x < \infty$) находится шарик, масса которого M . В момент времени $t = 0$ шарик получает ударный импульс Ie_u . Решить задачу о движении струны, если на шарик действует сила сопротивления, пропорциональная его скорости (коэффициент пропорциональности α задан); до удара смещения и скорости точек струны равны нулю.

8.57. В покоящемся идеальном газе находится сфера, радиус которой r_0 ; поверхность сферы совершает малые радиальные колебания со скоростью $V_0 \sin \omega t \cdot \eta(t)$. Найти в акустическом приближении потенциал скоростей газа.

Пример 8.5. Решить задачу о движении струны ($0 < x < l$) с закрепленными концами, начальная скорость которой равна нулю, а начальная форма $u(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(0) = u_0(l) = 0$, $u_0(x)$ — функция класса $C^2[0; l]$.

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

и может быть представлена в виде (см. задачу 8.10)

$$u(x, t) = f_1(x - at) + f_2(x + at), \quad f_{1,2} \in C^2. \quad (8.11)$$

Начальные условия порождают систему уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= u_0(x) \\ f'_1(x) - f'_2(x) &= 0, \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq l,$$

или

$$\begin{aligned} f_1(x) + f_2(x) &= u_0(x) \\ f_1(x) - f_2(x) &= 0, \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq l, \quad (8.12)$$

где константа интегрирования, не влияющая на результат, принята равной нулю. Решение системы (8.12)

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.13)$$

Следует заметить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ пока определены лишь для $x \in [0; l]$, тогда как их аргументы $x - at$ и $x + at$ принимают любые вещественные значения.

Средством определения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ на всей числовой оси служат граничные условия

$$\begin{aligned} f_1(-at) + f_2(at) &= 0 \\ f_1(l - at) - f_2(l + at) &= 0, \end{aligned}$$

или

$$f_1(x) + f_2(x) = 0 \quad (8.14)$$

$$f_1(l - x) - f_2(l + x) = 0. \quad (8.15)$$

Действительно, если $-l \leq x \leq 0$, то $0 \leq -x \leq l$ и согласно (8.14), (8.13)

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -f_2(-x) = -\frac{u_0(-x)}{2} \\ f_2(x) &= -f_1(-x) = -\frac{u_0(-x)}{2}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -u_0(-x), & -l \leq x \leq 0, \end{cases}$$

тогда

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2}\tilde{u}_0(x), \quad |x| \leq l, \quad (8.16)$$

Если $l \leq x \leq 3l$, то $-l \leq 2l - x \leq l$ и вследствие (8.15)

$$f_1(x) = -f_2(l - x) = -\frac{1}{2} \tilde{u}_0(2l - x), \quad (8.17)$$

$$f_2(x) = -f_1(l - x) = -\frac{1}{2} \tilde{u}_0(2l - x), \quad (8.18)$$

так что

$$f_1(x) = f_2(x) = -\frac{1}{2} \tilde{u}_0(2l - x), \quad l \leq x \leq 3l.$$

Продолжая этот процесс, можно с помощью (8.14) определить значения $f_{1,2}(x)$ на промежутке $[-3l; -l]$, затем посредством соотношения (8.15) — на промежутке $[3l; 5l]$ и т.д. На каждом новом промежутке значения функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определяются однозначно, поэтому обе функции оказываются определенными, притом единственным образом, на всей числовой оси. Теперь из соотношений (8.14) и (8.15), справедливых для любых $x \in \mathbf{R}$, вытекает, что

$$f_1(x) = -f_2(-x) = -[-f_1(2l + x)] = f_1(2l + x),$$

т.е. функция $f_1(x)$ и аналогично $f_2(x)$ — периодические с периодом $2l$;

$$f_{1,2}(x + 2l) = f_{1,2}(x), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Таким образом,

$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2} U_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \quad (8.19)$$

где

$$\begin{aligned} U_0(x + 2l) &= U_0(x), & x \in \mathbf{R}, \\ U_0(x) &= \tilde{u}_0(x), & x \in [-l; l]. \end{aligned}$$

В итоге формула (8.11) определяет решение задачи (8.10)¹

$$u(x, t) = \frac{U_0(x - at) + U_0(x + at)}{2}, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (8.20)$$

¹Так как функция $U_0(x)$ в общем случае не принадлежит $C^2(\mathbf{R})$, то (8.20) представляет собой обобщенное решение (см.[3]).

Полученный результат можно трактовать следующим образом. Так как функция $U(x, t)$, где $x \in \mathbf{R}$, является нечетным продолжением функции $u_0(x)$ на всю числовую ось относительно точек $x = 0$ и $x = l$ (это следует из соотношений (8.13), (8.14) и (8.15)), то задачу 8.10 можно свести к задаче Коши

$$\begin{aligned} U_{tt} &= a^2 U_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ U(x, 0) &= U_0(x), \quad U_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Согласно формуле Даламбера (см. задачу 8.10)

$$U(x, t) = \frac{U_0(x - at) + U_0(x + at)}{2},$$

а решение задачи (8.10)

$$u(x, t) = U(x, t), \quad x \in [0; l].$$

Действительно, функция $U(x, t)$ удовлетворяет волновому уравнению, т.е. уравнению задачи (8.10). При $x = 0$

$$U(0, t) = \frac{U_0(-at) + U_0(at)}{2} = 0,$$

так как $U_0(x)$ — нечетная функция относительно $x = 0$. Аналогично при $x = l$

$$\frac{U_0(l - at) + U_0(l + at)}{2} = 0.$$

При $t = 0$

$$\begin{aligned} U(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [0; l], \\ U_t(x, 0) &= 0, \quad x \in [0; l]. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $U(x, t)$ удовлетворяет всем условиям задачи (8.10) и, следовательно, является ее решением. В силу теоремы единственности

$$u(x, t) = U(x, t), \quad x \in [0; l],$$

что совпадает с (8.20).

8.58. Струна ($0 < x < l$) с закрепленными концами находится в равновесии под действием сосредоточенной силы $F_0 \mathbf{e}_u$, приложенной в точке $x=l/2$. В момент времени $t=0$ действие силы прекращается. Решить задачу о движении струны. Найти также 1) закон движения точки струны а) $x=l/4$; б) $x=l/2$; 2) профиль струны в момент времени а) $t=\frac{l}{8a}$; б) $t=\frac{l}{2a}$.

8.59. Начальная скорость струны ($0 < l$) с закрепленными концами равна нулю, а начальный профиль — парабола с вершиной в точке с координатами $x = l/2, u = h$. Решить задачу о движении струны. Найти также 1) закон движения точки струны а) $x=l/2$; б) $x=3l/4$; 2) профиль струны в момент времени а) $t=\frac{l}{4a}$; б) $t=\frac{l}{2a}$.

8.60. Решить задачу о колебаниях струны ($0 < x < l$) с закрепленными концами, начальный профиль которой $h \sin \pi x/l$, а начальная скорость равна нулю.

8.61. Струна ($0 < x < l$), расположенная на оси $0x$, получает в момент времени $t=0$ скорость $u_1(x) \mathbf{e}_u$. Решить задачу о движении струны, если ее концы закреплены.

8.62. Струна ($0 < x < l$) с закрепленными концами получает в результате ударного импульса в момент $t=0$ скорость $v_0 \sin \frac{2\pi x}{l} \mathbf{e}_u$. Решить задачу о движении струны, если ее начальное отклонение равно нулю.

8.63. Струна ($0 < x < l$), один конец ($x=0$) которой закреплен, а другой свободен, находится в статическом равновесии под действием сосредоточенной силы $F_0 \mathbf{e}_u$, приложенной в точке $x=l/2$. В момент времени $t=0$ действие силы прекращается. Решить задачу о колебаниях струны. Найти также 1) закон движения точки струны а) $x=l/2$; б) $x=l$; 2) форму струны в момент времени а) $t=\frac{l}{2a}$; б) $t=\frac{3l}{4a}$.

8.64. Неподвижная струна ($0 < x < l$), конец $x=0$ которой закреплен, а конец $x=l$ свободен, получает в результате ударного импульса в момент времени $t=0$ скорость $u_1(x) \mathbf{e}_u$. Решить задачу о движении струны, если ее начальное отклонение равно нулю.

8.65. Начальная скорость струны ($0 < x < l$) равна нулю, а начальный профиль $u_0(x)$. Решить задачу о движении струны, если один ее конец ($x=0$) закреплен, а другой свободен.

8.66. Начальная скорость струны ($0 < x < l$) равна нулю, а начальный профиль $h \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{\pi a t}{2l}$. Решить задачу о движении струны, если один ее конец ($x=0$) закреплен, а другой свободен.

8.67. Конец $x=0$ струны ($0 < x < l$) свободен, а конец $x=l$ закреплен. Решить задачу о движении струны, если ее начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость $v_0 \sin \frac{3\pi x}{2l}$.

8.68. Тяжелая неподвижная струна ($0 < x < l$) расположена на горизонтальной подставке. В момент времени $t=0$ подставку убирают. Решить задачу о движении струны под действием силы тяжести, если ее концы закреплены. Определить также 1) закон движения точки струны а) $x=l/2$; б) $x=3l/4$; 2) профиль струны в момент времени а) $t=\frac{l}{4a}$; б) $t=\frac{3l}{2a}$.

8.69. На струну ($0 < x < l$) с закрепленными концами действует сосредоточенная сила $F_0 \sin \frac{\pi a t}{l} \mathbf{e}_u$, приложенная в точке $x=l/2$. Найти 1) закон движения точки $x=l/2$; 2) профиль струны в момент времени а) $t=\frac{l}{2a}$; б) $t=\frac{l}{a}$. Начальные условия нулевые.

8.70. На струну ($0 < x < l$) с закрепленными концами действует сила, линейная плотность которой $F_0 \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \omega t \mathbf{e}_u$. Решить задачу о колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

8.71. На струну ($0 < x < l$), один конец ($x=0$) которой закреплен, а другой свободен, действует сила, линейная плотность которой $F_0 \sin \frac{\pi x}{2l} \sin \omega t \mathbf{e}_u$. Решить задачу о колебаниях струны при нулевых начальных условиях.

8.72. На струну ($0 < x < l$), конец $x=0$ которой закреплен, а конец $x=l$ свободен, действует сосредоточенная сила $F_0 \sin \frac{\pi at}{2l} \eta(t) \mathbf{e}_u$, приложенная в точке $x=l/2$. Найти 1) закон движения точки $x=l/2$; 2) форму струны в момент $t=\frac{l}{4a}$. Начальные условия нулевые.

8.73. Тяжелая струна ($0 < x < l$), конец $x=0$ которой закреплен, а конец $x=l$ свободен, находится на горизонтальной подставке. В момент времени $t=0$ подставку убирают. Решить задачу о движении струны под действием силы тяжести.

8.74. Конец $x=0$ струны ($0 < x < l$) закреплен жестко, а конец ($x=l$) — упруго. Найти форму струны в момент времени $t=\frac{l}{3a}$, если начальное отклонение $u(x, 0)=Ax$, а начальная скорость равна нулю.

8.75. Конец ($x=l$) струны ($0 < x < l$) закреплен жестко, а конец ($x=0$) — упруго. Найти форму струны в момент $t=\frac{3l}{4a}$, если начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость v_0 .

8.76. Тяжелая струна ($0 < x < l$), конец $x=0$ которой закреплен жестко, а конец $x=l$ — упруго, находится на горизонтальной подставке и занимает отрезок $[0; l]$ оси $0x$. В момент времени $t=0$ подставку убирают. Найти форму струны в момент времени $t=\frac{l}{2a}$.

8.77. Конец ($x=l$) струны ($0 < x < l$) закреплен, а на свободный конец ($x=0$) действует сила трения, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности α задан). Найти форму струны в момент времени 1) $t=\frac{3l}{5a}$, если начальное отклонение $u(x, 0)=Ax$, а начальная скорость равна нулю; 2) $t=\frac{5l}{7a}$, если начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость равна v_0 .

8.78. Конец $x=l$ струны ($0 < x < l$) закреплен, а на свободном конце ($x=0$) имеется шарик, масса которого M . Найти форму струны в момент времени $t=\frac{4l}{5a}$, если начальное отклонение $u(x, 0)=Ax$, а начальная скорость равна нулю.

8.79. Найти форму струны в момент времени $t = \frac{5l}{6a}$ при тех же условиях на концах струны, что и в предыдущей задаче, если начальное отклонение струны равно нулю, а начальная скорость равна v_0 .

8.80. Цилиндрический стержень ($0 < x < l$), масса которого m , покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В момент времени $t=0$ стержень получает продольный ударный импульс I в торец $x=0$. Найти закон движения сечения с координатой x и построить соответствующий график.

8.81. Стержень ($0 < x < l$), торец $x=0$ которого свободен, а торец $x=l$ закреплен, выводится из состояния статического равновесия продольным ударным импульсом I в свободный торец. Решить задачу о движении стержня.

8.82. Точечная масса M , движущаяся с постоянной скоростью v по оси Ox , ударяет в торец $x=0$ упругого недеформированного цилиндрического стержня ($0 < x < l$), покоящегося на гладкой горизонтальной поверхности. Показать, что 1) время соударения $\tau > 2l/a$, где $a = \sqrt{E/\rho}$; 2) если $\frac{m}{M} \geq \mu_0$, где m — масса стержня, μ_0 — корень уравнения $2 + e^{-2\mu} = 4\mu$, то $\tau = \frac{l}{2\mu a} (2 + 4\mu + e^{-2\mu})$ принадлежит промежутку $(\frac{2l}{a}; \frac{4l}{a})$.

8.83. Упругий цилиндрический стержень ($0 < x < l$), масса которого m , с закрепленным торцом $x=l$ находится в состоянии покоя. В момент времени $t = 0$ стержень получает импульс в результате удара в свободный торец $x=0$ тела, масса которого M , движущегося со скоростью v вдоль оси Ox . Показать, что время соударения $\tau > 2l/a$, где $a = \sqrt{E/\rho}$. При каких μ значение $\tau \in (\frac{2l}{a}; \frac{4l}{a})$? Каково это значение?

Пример 8.6. Задача Гурса. Пусть уравнение (8.4) принадлежит гиперболическому типу в области Ω , граница $\partial\Omega$ которой содержит части характеристик Γ_1 и Γ_2 , выходящих из точки $M \in \partial\Omega$, при этом $(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \cup \partial\Omega$ — связное множество (рис. 8.1).

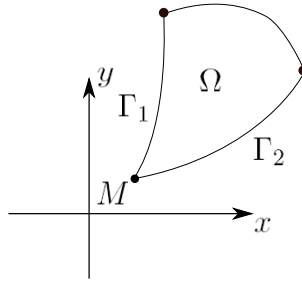


Рис. 8.1

Постановка задачи Гурса: на классе достаточно гладких в $\Omega \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ функций $u(x, y)$ найти решение уравнения (8.4) при условиях

$$u|_{\Gamma_i} = u_i, \quad u_i \in C(\partial\Omega \cap \Gamma_i), \quad i = 1, 2, \quad u_1(M) = u_2(M).$$

Модификации задачи Гурса: 1) условия для u ставятся на части характеристики Γ_1 (или Γ_2) и линии L , которая выходит из M и пересекает каждую характеристику не более, чем в одной точке; 2) условия для u ставятся на двух линиях L_1 и L_2 , выходящих из точки M , при этом каждая из линий имеет с любой характеристикой не более одной общей точки. В обоих случаях сохраняется требование связности участка границы области Ω , на котором функция u принимает заданные значения. Задача Гурса для уравнения (8.3): решить уравнение в области $\Omega\{x, y : sh\,x - y < y < sh\,x + x, 0 < y\}$ при условиях

$$u|_{y=sh\,x-x} = 1, \quad u|_{y=sh\,x+x} = \frac{1}{x+1}. \quad (8.21)$$

Чтобы решить эту задачу, нужно в общем решении (8.5) уравнения (8.3) взять такие функции f и g , при которых выполнялись бы условия (8.21), т.е.

$$\begin{cases} f(2x) + g(0) = 1 \\ f(0) + g(-2x) = \frac{1}{x+1} \\ f(0) + g(0) = 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$f(x) = 1 - g(0), \quad g(x) = \frac{2}{2-x} - f(0),$$

поэтому

$$u(x, y) = 1 - g(0) + \frac{2}{2 - sh\,x + x + y} - f(0) = \frac{2}{2 + x - sh\,x + y}.$$

Решить задачи Гурса 8.84 – 8.103.

$$\begin{aligned} 8.84. \quad & u_{xy} + 2xyu_x = 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\ & u|_{x=1} = y, \quad u|_{y=1} = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.85. \quad & u_{xy} + xu_x = 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\ & u|_{x=1} = y, \quad u|_{y=1} = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.86. \quad & u_{xy} + xu_x + u_y + (x+1)u = 0, \quad 1 < x, \quad 0 < y, \\ & u|_{y=1} = e^{-x-1}, \quad u|_{x=0} = e^{-y^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.87. \quad & u_{xx} - u_{yy} + 2\frac{u_x - u_y}{x-y} - \frac{4u}{(x-y)^2} = 0, \quad -y < x < y-1, \quad \frac{1}{2} < y, \\ & u|_{y=-x} = 1, \quad u|_{y=x+1} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.88. \quad & x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0, \quad \frac{1}{x} < y < x, \\ & u|_{y=x} = \sqrt{x}(x+1), \quad u|_{xy=1} = x+1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.89. \quad & x^2u_{xx} - y^2u_{yy} - x(1-2xy)u_x - y(3+2xy)u_y - 4xyu = 0, \\ & 0 < x, \quad \frac{1}{x} < y < x, \\ & u|_{y=x} = e^{-x^2}, \quad u|_{xy=1} = e^{-x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.90. \quad & x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + (y^2 - x^4)u_{yy} + 2xu_x + 2yu_y = 0, \\ & 2 < x, \quad 5x - x^2 < y < x^2 + x, \\ & u|_{y=5x-x^2} = \frac{2}{x}, \quad u|_{y=x^2+x} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8.91. \quad & 94y^2u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0, \\ & -\frac{x}{2} < y < \sqrt[3]{\frac{3x}{2}}, \\ & u|_{2y=-x} = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x^2}{2}\right), \quad u|_{y=\sqrt[3]{\frac{3x}{2}}} = \frac{1}{2}(x + \sqrt[3]{12x}). \end{aligned}$$

8.92. $x^2 u_{xx} + 3xy u_{xy} - 4y^2 u_{yy} + 6xu_x + 16yu_y = 0$, $\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < y < x^4$,
 $u|_{xy=1} = u_1(x)$, $u|_{y=x^4} = u_2(x)$, $u_1(1) = u_2(1)$.

Решить задачу в частном случае: $u_1(x) = 1 + x^{-5}$, $u_2(x) = 1 + x^5$.

8.93. $u_{xx} + u_{xy} - y(u_x + u_y) - u = 0$, $0 < y < x$,
 $u|_{y=0} = 1 - e^{-x}$, $u|_{y=x} = 0$.

8.94. $u_{xx} + u_{xy} + y(u_x + u_y) - u = 0$, $0 < y < x$,
 $u|_{y=0} = \frac{1}{(x+1)^2}$, $u|_{y=x} = e^{-x}$.

8.95. $xu_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} + u_x = 0$, $1 < y < x < \sqrt{2y-1}$,
 $u|_{x=y} = 1$, $u|_{x=\sqrt{2y-1}} = e^{2(y-1)}$.

8.96. $x^2 u_{xx} - y^3 u_{yy} + x(y+2x)u_x - y(y-2x)u_y = 0$,
 $0 < \frac{1}{x} < y < x$,
 $u|_{x=y} = 2 \ln x$, $u|_{xy=1} = x - 1$.

8.97. $xu_{xx} + 2yu_{xy} + xu_{yy} - u_x = 0$, $0 < x < \sqrt{2y-1} < 1$,
 $u|_{x=0} = 1 - y$, $u|_{x=\sqrt{2y-1}} = ye^{1-2y}$.

8.98. $2u_{xx} + 3u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y + u = 0$, $0 < y < 2x$,
 $u|_{y=0} = 0$, $u|_{y=2x} = x$.

8.99. $u_{xx} - 2 \sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y + u = 0$,
 $-x + \cos x < y < x + \cos x$,
 $u|_{y=-x+\cos x} = -x \cos x$, $u|_{y=x+\cos x} = x(2x + \cos x)$.

8.100. $x^2 y^3 u_{xx} + 10xy^2 u_{xy} + 16yu_{yy} + xy^3 u_x + 8y(9y-2)u_y -$
 $-144y^3 u = 0$, $1 < x$, $4 \ln x < y$,
 $u|_{x=1} = e^{2y^2}$, $u|_{y=2 \ln x} = x$.

8.101. $\sin^2 x u_{xx} + 2 \cos x u_{xy} - u_{yy} + \sin 2x u_x - \sin x u_y = 0$,
 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $-tg \frac{x}{2} < y < 0$,
 $u|_{y=-tg \frac{x}{2}} = ctg x$, $u|_{y=0} = cosec x$.

8.102. $(x-y)u_{xy} - u_y = 0$, $-y < x < y$, $0 < y$,
 $u|_{y=x} = 0$, $u|_{y=-x} = -4x^3$.

$$\begin{aligned}
8.103. \quad & u_{xx} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) u_{xy} + u_{yy} - \frac{3x^2+y^2}{x(x^2-y^2)} u_x + \frac{x^2+3y^2}{y(x^2-y^2)} u_y = 0, \\
& 2x < y < 3x, \\
& u|_{y=2x} = 9x^2, \quad u|_{y=3x} = 16x^2.
\end{aligned}$$

8.104. Пусть

$$\begin{aligned}
f(x, y) &\in C(y \geq x), \quad \forall x: \int_x^\infty d\xi \int_\xi^\infty |f(\xi, \eta)| d\eta < \infty, \\
\varphi(x) &\in C^1(R), \quad \int_{-\infty}^\infty |\varphi(\xi)| d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

Доказать, что задача Гурса

$$\begin{aligned}
v_{xx} - v_{yy} &= f(x, y), \quad -\infty < x < y < \infty, \\
v(x, x) &= \varphi(x), \quad \forall C: \lim_{\substack{x+y \rightarrow \infty \\ y-x=C}} v(x, y) = 0
\end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$\begin{aligned}
v(x, y) = \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+y}{2}} d\xi \int_{y+x-\xi}^{y-x+\xi} f(\xi, \eta) d\eta + \\
+ \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty d\xi \int_\xi^{y-x+\xi} f(\xi, \eta) d\eta. \quad (8.22)
\end{aligned}$$

Пример 8.7. Пусть функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (6.47); доказать существование и единственность решения задачи Гурса

$$\begin{aligned}
v_{xx} - v_{yy} &= u(x)v, \quad -\infty < x < y < \infty, \\
v(x, x) &= \frac{1}{2} \int_x^\infty u(\xi) d\xi, \quad \forall C: \lim_{\substack{x+y \rightarrow \infty \\ y-x=C}} v(x, y) = 0.
\end{aligned} \quad (8.23)$$

Функция $v(x, y)$ — решение интегрального уравнения

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) + (\mathcal{K}v)(x, y) \quad (8.24)$$

(см.(8.22)), где

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_z^\infty u(\xi) d\xi, \\ (\mathcal{K}v)(x, y) &= \frac{1}{2} \int_x^{\frac{x+y}{2}} d\xi \int_{y+x-\xi}^{y-x+\xi} u(\xi)v(\xi, \eta) d\eta + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty d\xi \int_\xi^{y-x+\xi} u(\xi)v(\xi, \eta) d\eta. \quad (8.25)\end{aligned}$$

Условия (6.47) обеспечивают существование следующих интегралов:

$$U_0(x) = \int_x^\infty |u| d\xi, \quad F(x, y) = \int_x^\infty (\xi - y)|u| d\xi, \quad U(x) = F(x, x). \quad (8.26)$$

Если $x \geq y$, то

$$U(x) \leq F(x, y). \quad (8.27)$$

Пусть $\mathcal{M}_\mathcal{K}$ — множество функций $v(x, y)$, непрерывных и ограниченных на $\overline{\Delta} = \{x, y | h \leq x \leq y\}$ при любом h . Нормой функции $v(x, y)$ называется число

$$\|v\| = \max_{\overline{\Delta}} |v(x, y)|;$$

последовательность функций называется сходящейся, если она сходится по норме:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0. \quad (8.28)$$

Оператор $\mathcal{K}$ определен на $\mathcal{M}_\mathcal{K}$. Действительно,

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}v| &\leq \|v\| \int_x^{\frac{x+y}{2}} (\xi - x)|u(\xi)| d\xi + \|v\| \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty \frac{y-x}{2}|u(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq \|v\| \int_x^\infty (\xi - x)|u(\xi)| d\xi \|v\| U(x) \leq \|v\| U(h). \quad (8.29)\end{aligned}$$

При выводе (8.29) учтено, что $(y-x)/2 \leq \xi - x$ при $(x+y)/2 \leq \xi$.

Если существует такое число $A > 0$, что для любой функции $v \in \mathcal{M}_K$ выполняется неравенство $|Kv| \leq A\|v\|$, то оператор K называется ограниченным. Точная нижняя граница множества чисел A называется нормой оператора и обозначается $\|K\|$. Свойство ограниченности записывается в виде $\|Kv\| \leq \|K\| \|v\|$.

Оператор K отображает $\mathcal{M}_K$ в $\mathcal{M}_K$. В самом деле, ограниченность функции Kv обусловлена оценкой (8.29). Для доказательства непрерывности функции Kv соотношение (8.25) следует записать в виде $Kv = w_1 + w_2 + w_3$, где w_1 — первое слагаемое, т.е. интеграл по $d\xi$ (с множителем $1/2$), взятый в пределах от x до $(x+y)/2$,

$$w_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^h d\xi \int_{\xi}^{y-x+\xi} u(\xi)v(\xi, \eta) d\eta, \quad w_3 = \frac{1}{2} \int_h^{\infty} d\xi \int_{\xi}^{y-x+\xi} u(\xi)v(\xi, \eta) d\eta.$$

Функции w_1 и w_2 , не являющиеся несобственными интегралами, непрерывны, а непрерывность функции

$$w_3 = \int_h^{\infty} \Phi d\xi, \quad \Phi(x, y, \xi) = \frac{1}{2} \int_{\xi}^{y-x+\xi} u(\xi)v(\xi, \eta) d\eta \quad (8.30)$$

вытекает из неравенства

$$\begin{aligned} |\Delta w_3| &= \frac{1}{2} \left| \int_h^{\infty} d\xi \int_{y-x+\xi}^{y+\Delta y-x-\Delta x+\xi} u(\xi)v(\xi, \eta) d\eta \right| \leq \\ &\leq \frac{\|v\|}{2} \int_h^{\infty} d\xi |\Delta x - \Delta y| |u(\xi)| \leq \frac{\|v\|}{2} U_0(h) (|\Delta x| + |\Delta y|). \end{aligned}$$

Оператор K называется непрерывным, если из сходимости последовательности $v_n \rightarrow v$ следует сходимость последовательности $Kv_n \rightarrow Kv$. Оператор K непрерывен:

$$\|Kv_n - Kv\| = \|K(v_n - v)\| \leq \|K\| \|v_n - v\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В последующих выкладках используется оценка

$$|\mathcal{K}^m v| \leq \|v\| \frac{U^m(x)}{m!}, \quad m \in N, \quad (8.31)$$

которая устанавливается методом математической индукции: если $m=0$, то $|v| \leq \|v\|$, т.е. оценка верна; если она справедлива для $m-1$, то (см. 8.27))

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}^m v| &= |\mathcal{K}(\mathcal{K}^{m-1} v)| \leq \\ &\leq \frac{\|v\|}{2(m-1)!} \left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} d\xi \int_{y+x-\xi}^{y-x+\xi} |u(\xi)| U^{m-1}(\xi) d\eta + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty d\xi \int_\xi^{y-x+\xi} |u(\xi)| U^{m-1}(\xi) d\eta \right) \leq \\ &\leq \frac{\|v\|}{2(m-1)!} \left(\int_x^{\frac{x+y}{2}} |u(\xi)| U^{m-1}(\xi) 2(\xi-x) d\xi + \right. \\ &+ \left. \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty |u(\xi)| U^{m-1}(\xi) (y-x) d\xi \right) \leq \\ &\leq \frac{\|v\|}{(m-1)!} \int_x^\infty (\xi-x) |u(\xi)| U^{m-1}(\xi) d\xi \leq \\ &\leq \frac{\|v\|}{(m-1)!} \int_x^\infty (-F_\xi(\xi, x)) F^{m-1}(\xi, x) d\xi \leq \|v\| \frac{U^m(x)}{m!}. \end{aligned}$$

Здесь, как и при доказательстве оценки (8.29), использовано неравенство $y-x \leq 2(\xi-x)$, справедливое при $x+y \leq 2\xi$. Для доказательства существования решения уравнения (8.25) применяется метод последовательных приближений (пример 4.9). Он состоит в построении последовательности

$$v_0(x, y) = \frac{1}{2} \varphi \left(\frac{x+y}{2} \right), \quad v_n = v_0 + \mathcal{K} v_{n-1}, \quad (8.32)$$

n -й член которой

$$v_n = \sum_{m=0}^{m=n} \mathcal{K}^m v_0$$

представляет собой частичную сумму ряда Неймана $\sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}^m v_0$. Исследование сходимости ряда основано на оценке (8.31), в которой $v=v_0$. Так как

$$|v_0| \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{x+y}{2}}^{\infty} |u(\xi)| d\xi = \frac{1}{2} U_0 \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{1}{2} U_0(h),$$

то $\|v\| \leq \frac{1}{2} U_0(h)$. Следовательно,

$$\left| \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{K}^m v_0 \right| \leq \frac{U_0(h)}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{U^m(x)}{m!} \frac{U_0(h)}{2} e^{U(x)} \leq \frac{U_0(h)}{2} e^{U(h)},$$

т.е. ряд Неймана абсолютно и равномерно сходится на $\overline{\Delta}$, поэтому его сумма $v(x, y) \in \mathcal{M}_{\mathcal{K}}$. Поскольку $\mathcal{K}$ — непрерывный оператор, а последовательность $v_n \rightarrow v$ при $n \rightarrow \infty$ в смысле определения (8.28), то переход к пределу в (8.32)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K} v_{n-1} \Rightarrow v = v_0 + \mathcal{K} v$$

показывает, что $v(x, y)$ — решение уравнения (8.24).

Если есть два решения v_1, v_2 , то $v=v_1 - v_2$ — решение уравнения $v=\mathcal{K}v$. Последовательное применение оператора $\mathcal{K}$ к этому уравнению приводит к равенствам: $v=\mathcal{K}v=\mathcal{K}^2v=\dots=\mathcal{K}^m v$. Отсюда с помощью оценки (8.31) получается неравенство

$$\|v\| = \|\mathcal{K}^m v\| \leq \frac{\|v\|}{m!} U_0(h) U^m(h),$$

правая часть которого стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$, поэтому $\|v\|=0$, откуда $v=0$.

Остается установить эквивалентность задачи Гурса (8.23) и интегрального уравнения (8.24). В одну сторону это свойство уже доказано (при построении уравнения (8.24)). Обратное положение — решение уравнения (2.8) удовлетворяет системе условий (8.23) — проверяется подстановкой; необходимо только обобщить дифференцирование по параметрам x и y интегралов в

(8.24). Несобственный интеграл (8.30) сходится на $\overline{\Delta}$, а интеграл с подынтегральной функцией $|\Phi_y(x, y, \xi)|$ равномерно сходится на $\overline{\Delta}$, так как

$$|\Phi_y(x, y, \xi)| = \frac{1}{2}|u(\xi)v(\xi, y - x + \xi)| \leq \frac{\|v\|}{2}|u(\xi)|.$$

Следовательно, дифференцирование тождества (8.24) по параметру y под знаком интеграла законно, в результате чего

$$v_y = -\frac{1}{4}u\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+y}{2}} u(\xi)v(\xi, y+x-\xi)d\xi + \\ + \frac{1}{2}\int_x^\infty u(\xi)v(\xi, y-x+\xi)d\xi, \quad (8.33)$$

откуда

$$|v_y| \leq \frac{1}{4}\max_{\overline{\Delta}}\left|u\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \frac{\|v\|}{2}\int_x^\infty |u(\xi)|d\xi + \\ + \frac{\|v\|}{2}\int_x^\infty |u(\xi)|d\xi \leq \frac{1}{4}\max_{\overline{\Delta}}\left|u\left(\frac{x+y}{2}\right)\right| + \frac{\|v\|}{2}\int_h^\infty |u(\xi)|d\xi = M_0.$$

Если в выражении (8.33) выделить интеграл

$$\int_h^\infty \Phi_1(x, y, \xi)d\xi, \quad \Phi_1(x, y, \xi) = u(\xi)v(y-x+\xi),$$

то оценки

$$\left|\int_h^\infty \Phi_1(x, y, \xi)d\xi\right| \leq \|v\|\int_h^\infty |u(\xi)|d\xi < \infty, \\ |\Phi_{1y}(x, y, \xi)| \leq M_0|u(\xi)|$$

доказывают правомерность дифференцирования по параметру y интегралов в (8.33). Законность дифференцирования этих интегралов по параметру x устанавливается так же.

8.105. Доказать, что решение $v(x, y)$ задачи Гурса (8.23) обладает свойствами:

для любого h функция $v(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ равномерно на $\overline{H} = [h, \infty]$;

интегралы

$$\int_h^\infty \left| \frac{\partial^m v(x, y)}{\partial x^m} \right| dy, \quad \int_h^\infty \left| \frac{\partial^m v(x, y)}{\partial y^m} \right| dy, \quad m = 0, 1, 2$$

равномерно сходятся на $\overline{H}$.

8.106. Доказать, что задача Гурса

$$v_{xx} - v_{yy} = f(x + y)v, \quad -\infty < x < y < \infty,$$

$$v(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty f(\xi) d\xi,$$

$$\forall C : \lim_{\substack{x+y \rightarrow \infty \\ y-x=C}} v(x, y) = 0, \quad \forall x : \int_x^\infty |f(\xi)| d\xi < \infty$$

имеет единственное решение

$$v(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{F(x+y)}{y-x}} I_1 \left(\sqrt{(y-x)F(x+y)} \right), \quad F(z) = \int_z^\infty f(\zeta) d\zeta.$$

8.107. Найти общее решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - c^2 u$$

и решить задачу Гурса, если

$$u|_{x=at} = F_1(x), \quad u|_{x=-at} = F_2(x),$$

где $F_{1,2}(x) \in C^1$, $F_1(0) = F_2(0)$.

8.108. Найти общее решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u$$

и решить задачу Гурса, если

$$u|_{x=at} = F_1(x), \quad u|_{x=-at} = F_2(x),$$

где $F_{1,2}(x) \in C^1$, $F_1(0) = F_2(0)$.

8.109. Заданы функции $q(x)$ и $r(x)$, удовлетворяющие условиям (6.50); доказать, что решение задачи Гурса

$$\begin{cases} u_x - u_y - q(x)v = 0, \\ v_x + v_y - r(x)u = 0, \\ v(x, x) = -\frac{1}{2}q(x), \end{cases} \quad -\infty < x < y < \infty, \quad (8.34)$$

$u(x, y) \rightarrow 0$, $v(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ равномерно на $\overline{H} = [h, \infty]$, где h — любое число, существует, единственно и при любом h интегралы

$$\int_h^\infty \left| \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} \right| dy, \quad \int_h^\infty \left| \frac{\partial^{m+n} v}{\partial x^m \partial y^n} \right| dy, \quad 0 \leq m + n < 1,$$

сходятся равномерно на $\overline{H}$.

Пример 8.8. Метод Римана. Метод применяется к задаче Коши

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= f, \\ u|_L &= u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_L = u_1, \end{aligned} \quad (8.35)$$

где

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + c(x, y).$$

Сущность метода: решение задачи (8.35) выражается через решение вспомогательной задачи Гурса. Для получения необходимых соотношений вводится сопряженный оператор $\mathcal{L}^*$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}: \quad (\mathcal{L}u, \varphi) = (u, \mathcal{L}^* \varphi).$$

Согласно (10.9) и по определению обобщенной производной (10.14)

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, \varphi) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \varphi \right) + \left(a \frac{\partial u}{\partial x}, \varphi \right) + \left(b \frac{\partial u}{\partial y}, \varphi \right) + (cu, \varphi) = \\ &= \left(u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) - \left(u, \frac{\partial(a\varphi)}{\partial x} \right) - \left(u, \frac{\partial(b\varphi)}{\partial y} \right) + (u, c\varphi), \end{aligned}$$

откуда

$$\mathcal{L}^* \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} a - \frac{\partial}{\partial y} b + c.$$

Построение решения задачи Коши (8.35) основано на тождестве (оно доказывается непосредственной проверкой)

$$\begin{aligned} v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*v &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right). \end{aligned} \quad (8.36)$$

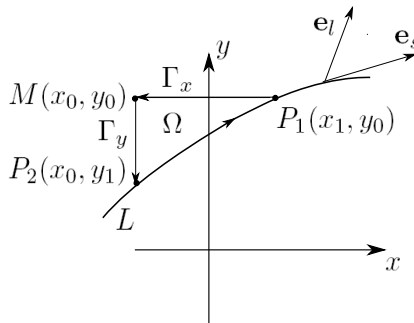


Рис. 8.2

Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка плоскости, не принадлежащая линии L , Γ_x и Γ_y — характеристики $x=x_0$ и $y=y_0$ уравнения $\mathcal{L}u=f$,

проходящие через точку M , P_1 и P_2 — точки пересечения характеристик с линией L , Ω — область, ограниченная линиями Γ_x , Γ_y и L , $\mathbf{e}_s$ — единичный вектор касательной к L (рис. 8.2). В результате интегрирования тождества (8.36) по Ω и применения формулы Грина получается соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}v) dx dy = \\ & = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2buv \right) dx + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} + 2auv \right) dy. \end{aligned} \quad (8.37)$$

Дальнейшие преобразования касаются интегралов по характеристикам:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \int_{P_1 M} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} + 2buv \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{P_1 M} \left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} + 2u \left(bv - \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dx = \\ & = \frac{1}{2} (uv)|_{P_1} - \frac{1}{2} (uv)|_M - \int_{P_1 M} u \left(bv - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{1}{2} \int_{MP_2} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy = \frac{1}{2} (uv)|_{P_2} - \frac{1}{2} (uv)|_M + \int_{MP_2} u \left(av - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy.$$

После проведенных преобразований интегральное соотношение (8.37) приобретает следующую форму:

$$\begin{aligned} (uv)|_M &= \frac{(uv)|_{P_1} + (uv)|_{P_2}}{2} - \frac{1}{2} \int_{P_2 P_1} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2buv \right) dx + \\ &+ \int_{P_2 P_1} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} + 2auv \right) dy - \int_{P_1 M} u \left(bv - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \\ &+ \int_{MP_2} u \left(av - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy - \int_{\Omega} (v\mathcal{L}u - u\mathcal{L}^*v) dx dy. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Значения производных u_x, u_y на линии L известны. Действительно, $\mathbf{e}_x = \alpha \mathbf{e}_s + \beta \mathbf{e}_l$, поэтому на L

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial s} + \beta \frac{\partial u}{\partial l} = \alpha u'_0(s) + \beta u_1(s);$$

производная u_y на L выражается подобным образом. Интегралы по Γ_x, Γ_y и Ω , где u, u_x, u_y не заданы, можно аннулировать, потребовав, чтобы

$$\mathcal{L}^* v = 0, \quad (v_x - bv)|_{\Gamma_x} = 0, \quad (v_y - av)|_{\Gamma_y} = 0,$$

v в точке M равна 1 (последнее условие необходимо для единственности, иначе функция v определена с точностью до постоянного множителя). Итак, функция двух точек $v = \mathcal{R}(P, M)$, называемая функцией Римана, является решением следующей задачи Гурса:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x,y}^* \mathcal{R}(x, y; x_0, y_0) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \mathcal{R}(x, y_0; x_0, y_0) &= e^{\int_{x_0}^x b(x, y_0) dx}, \\ \mathcal{R}(x_0, y; x_0, y_0) &= e^{\int_{y_0}^y a(x_0, y) dy}, \end{aligned} \quad (8.39)$$

где символ (x, y) у L обозначает дифференцирование по переменным x и y . В итоге решение задачи Коши (8.35) выражается формулой (она следует из (8.38)):

$$\begin{aligned} (uv)|_M &= \frac{(uv)|_{P_1} + (uv)|_{P_2}}{2} + \frac{1}{2} \int_{P_1 P_2} \left(\mathcal{R} \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial y} + 2bu\mathcal{R} \right) dx - \\ &- \left(\mathcal{R} \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x} + 2au\mathcal{R} \right) dy - \int_{\Omega} \mathcal{R} f dx dy. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Чтобы решить задачу Коши

$$\begin{aligned} 2x^2 u_{xx} - 5xy u_{xy} + 2y^2 u_{yy} + 2x(1 + 3x^3 y^3) u_x + y(2 - 3x^3 y^3) u_y &= 0, \\ u|_{y=x} &= 0, \quad u_y|_{y=x} = x^2 e^{\frac{x^6}{2}}, \end{aligned} \quad (8.41)$$

где $1 < x$, $1 < y$, нужно привести дифференциальное уравнение к каноническому виду. В данном случае имеются два характеристических уравнения $y' = -y/(2x)$, $y' = -2y/x$, общие интегралы которых $xy^2 = C_1$, $x^2y = C_2$; эти интегралы определяют замену

$$\xi = xy^2, \quad \eta = x^2y. \quad (8.42)$$

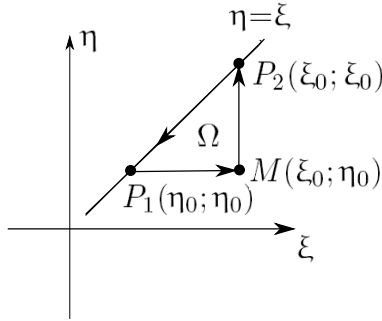


Рис. 8.3

В переменных ξ, η уравнение (8.41) принимает форму $u_{\xi\eta} - \eta u_\eta = 0$, а задача Гурса (8.39) запишется в виде (рис. 8.3)

$$\mathcal{R}_{\xi\eta} + \frac{\partial}{\partial \eta}(\eta \mathcal{R}) = 0, \quad (\xi, \eta) \in \Omega, \quad (8.43)$$

$$\mathcal{R}(\xi, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = e^{-\eta_0(\xi - \xi_0)}, \quad \mathcal{R}(\xi_0, \eta; \xi_0, \eta_0) = 1. \quad (8.44)$$

Посредством интегрирования по η уравнение (8.43) сводится к линейному: где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция. Далее можно применить, например, метод вариации постоянной:

$$R = C(\xi) e^{\xi\eta}, \quad \text{где } C(\xi)' = f(\xi) e^{-\xi\eta}.$$

Отсюда

$$C(\xi) = \int_0^\xi f(s) e^{\xi s} ds + g(\eta),$$

так что общее решение уравнения (8.43)

$$\mathcal{R} = \left[\int_0^\xi f(s) e^{\xi s} ds + g(\eta) \right] e^{-\xi \eta}, \quad (8.45)$$

где $g(\eta)$ — произвольная дифференцируемая функция. Функции f и g связаны условиями (8.44) на характеристиках:

$$\int_0^\xi f(s) e^{\xi s} ds + g(\eta_0) = e^{\xi \eta_0}, \quad \int_0^{\xi_0} f(s) e^{\xi_0 s} ds + g(\eta) = e^{-\xi_0 \eta}.$$

Из первого тождества (после дифференцирования по ξ) следует, что $f(\xi)=0$, тогда из второго — $g(\eta)=e^{\xi_0 \eta}$. Эти две функции определяют частное решение $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{\eta(\xi - \xi_0)}$.

Так как $u|_L=0$, $f=0$, то формула (8.40) упрощается:

$$u(M) = \frac{1}{2} \int_{P_1 P_2} \mathcal{R} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi - \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta \right). \quad (8.46)$$

Для вычисления производных u_ξ и u_η на L их нужно выразить через производные u_x и u_y , значения которых на L известны из начальных условий. По правилу дифференцирования сложной функции и на основании преобразования переменных (8.42), записанного в форме $x = \sqrt[3]{\frac{\eta^2}{\xi}}$, $y = \sqrt[3]{\frac{\xi^2}{\eta}}$,

$$\begin{aligned} u_\xi &= u_x x_\xi + u_y y_\xi = -\frac{1}{3\xi} \sqrt[3]{\frac{\eta^2}{\xi}} u_x + \frac{2}{3\sqrt[3]{\xi\eta}} u_y, \\ u_\eta &= u_x x_\eta + u_y y_\eta = \frac{2}{3\sqrt[3]{\xi\eta}} u_x - \frac{1}{3\eta} \sqrt[3]{\frac{\xi^2}{\eta}} u_y. \end{aligned}$$

Пусть $y=y(x)$ — уравнение линии L . Если точка (x, y) принадлежит L , то $u(x, y(x)) \equiv u_0(x)$, откуда в результате дифференцирования по x получается соотношение $u_x + u_y y' = u'_0$. В данном случае

$y=x$, $u_0(x)=0$, поэтому $y'=1$, $u'_0=0$, следовательно, $u_x=-u_y$ на L . Таким образом, на линии L , уравнение которой в новых переменных $\eta=\xi$,

$$\begin{aligned}u_\xi &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}}u_y + \frac{2}{3\sqrt[3]{\xi^2}}u_y = \frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}}u_1(\sqrt[3]{\xi}), \\u_\eta &= -\frac{2}{3\sqrt[3]{\xi^2}}u_y - \frac{1}{3\sqrt[3]{\xi^2}}u_y = -\frac{1}{\sqrt[3]{\xi^2}}u_1(\sqrt[3]{\xi}),\end{aligned}$$

где $u_1(x) = x^2 \exp\left(\frac{x^6}{2}\right)$. Решение задачи Коши завершается вычислением интеграла в формуле (8.46):

$$\begin{aligned}u(M) &= \int_{\eta_0}^{\xi_0} \mathcal{R}(\xi, \xi; \xi_0, \eta_0) u_1(\sqrt[3]{\xi}) \frac{d\xi}{\sqrt[3]{\xi^2}} = \int_{\eta_0}^{\xi_0} e^{\xi\xi_0 - \frac{\xi^2}{2}} d\xi = \\&= \int_{\eta_0}^{\xi_0} e^{-\left(\frac{\xi-\xi_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\xi_0^2}{2}} d\xi = e^{\frac{\xi_0^2}{2}} \int_0^{\frac{\xi_0-\eta_0}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\xi_0^2}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{\xi_0 - \eta_0}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

В старых переменных (они обозначаются x, y вместо x_0, y_0)

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{x^2 y^4}{2}} \operatorname{erf}\left(\frac{xy(y-x)}{\sqrt{2}}\right).$$

Решить методом Римана задачи 8.110 – 8.128.

$$\begin{aligned}8.110. \quad u_{xy} + \frac{u_y}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} &= 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\u|_{y=x} &= \frac{\pi}{2\sqrt[4]{x}}, \quad u_y|_{y=x} = \frac{1}{8x\sqrt[4]{x}}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8.111. \quad u_{xy} - yu_x - yu_y + (y^2 - 1)u &= 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2, \\u|_{y=-x} &= 0, \quad u_y|_{y=-x} = 1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8.112. \quad u_{xy} + xu_x + u &= 0, \quad 1 < x, \quad -\infty < y < \infty, \\u|_{y=x} &= 1, \quad u_y|_{y=x} = 0.\end{aligned}$$

$$8.113. \quad u_{xy} + 2xyu_x + 4yu = 0, \quad 1 < x, \quad -\infty < y < \infty, \\ u|_{y=\sqrt{x}} = 0, \quad u_y|_{y=\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}.$$

$$8.114. \quad 2x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x(1 - 2y)u_x - yu_y + yu = 0, \\ 0 < x, \quad 0 < y, \quad u|_{y=\sqrt{x}} = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 1, \quad u_y|_{y=\sqrt{x}} = \sqrt{x}e^{\sqrt{x}} + 2.$$

$$8.115. \quad u_{xx} - 2xu_{xy} - xu_x + 2x^2 - 1)u_y + xu = 0, \quad 0 < x, \quad 0 < y, \\ u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = (1 - \frac{x}{2}).$$

$$8.116. \quad xu_{xy} - yu_{yy} - x^3u_x - u_y + x^2(x^2y - 1)u = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad 1 < y, \quad u|_{y=1} = x^2 + 1, \quad u_y|_{y=1} = x^2(3 - x^2).$$

$$8.117. \quad xy^3u_{xx} - xy^3u_{yy} - y^3(1 - 16x^4)u_x + x^3(1 + 16x^2y^2)u_y = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad 1 < y, \quad u|_{y=1} = x^2(2 - x^2), \quad u_y|_{y=1} = 4(x^2 - 1).$$

$$8.118. \quad xu_{xx} - yu_{yy} + \frac{3}{4}u_x + \frac{1}{4}(\sqrt{\frac{y}{x}} - 2)u_y = 0, \quad < x < 1, \quad 1 < y, \\ u|_{y=1} = (1 - \sqrt{x})^2, \quad u_y|_{y=1} = 1 - \sqrt{x}.$$

$$8.119. \quad x^2u_{xx} - y^2u_{yy} + 5xu_x - yu_y + 4u = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 1 < y, \\ u|_{y=1} = (x + 1)^2, \quad u_y|_{y=1} = 2(2x^2 + 1).$$

$$8.120. \quad u_{xx} - e^{-2y}u_{yy} + (2 + e^{-y}u_x + 2e^{-y}(e^{-y} - 1)u_y + 2e^{-y}u = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < y, \quad u|_{y=0} = (1 - x)e^{-2x}, \quad u_y|_{y=0} = e^{-2x}.$$

$$8.121. \quad xu_{xx} - 4xyu_{yy} + u_x - 2(x + \sqrt{y})u_y = 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\ u|_{y=1} = 2\ln \frac{x}{x+1}, \quad u_y|_{y=1} = -\frac{1}{x+1}.$$

$$8.122. \quad xu_{xx} - 4x^3u_{yy} + [8x^2(x^2 + y) - 1]u_x - 16x^3(x^2 + y)u_y = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < y, \quad u|_{y=0} = 0, \quad u_y|_{y=0} = e^{x^4}.$$

$$8.123. \quad 8x^2u_{xx} - 20xyu_{xy} + 8y^2u_{yy} + 4x(2 + 3xy\sqrt{xy})u_x + \\ + 2y(4 - 3xy\sqrt{xy})u_y + 9xy\sqrt{xy}u = 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\ u|_{xy=1} = 2, \quad u_y|_{xy=1} = 3x.$$

$$8.124. \quad x^2u_{xx} - 3xyu_{xy} + 2y^2u_{yy} + x(1 + 2xy\sqrt{y})u_x + \\ + 2y(1 - xy\sqrt{y})u_y = 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\ u|_{y=x} = 0, \quad u_y|_{y=x} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\begin{aligned}
 8.125. \quad & 4x^2u_{xx} + 10xyu_{xy} + 4y^2u_{yy} + x(4 + 3\sqrt{xy})u_x + \\
 & + 2y(2 + 3\sqrt{xy})u_y + 9u = 0, \quad 1 < x, \quad 1 < y, \\
 & u|_{xy=1} = 2, \quad u_y|_{xy=1} = 3x.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.126. \quad & \sin 2xu_{xx} - 2y \cos 2xu_{xy} - y^2u_{yy} + 2 \cos^2 xu_x = 0, \\
 & \frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}, \quad 1 < y, \quad u|_{x=\frac{\pi}{2}} = y, \quad u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.127. \quad & u_{tt} = a^2u_{xx} + c^2u = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\
 & u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8.128. \quad & u_{tt} = a^2u_{xx} - c^2u = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\
 & u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x).
 \end{aligned}$$

8.2. Квазилинейные уравнения с частными производными

Пример 8.9. Задача Коши для квазилинейного уравнения. Квазилинейное уравнение имеет вид

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u), \quad (8.47)$$

где a , b , c — функции класса C^1 в некоторой области Ω пространства R^3 переменных x, y, u , при этом $a^2 + b^2 \neq 0$ в Ω . Пусть линия $L_0 = \{x, y : x = \xi(\tau), y = \eta(\tau), \tau_1 < \tau < \tau_2\}$ класса C^1 в плоскости xOy не имеет ни самопересечений, ни особых точек ($\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$, где точка обозначает дифференцирование по параметру). Постановка задачи Коши: решить уравнение (8.47) в классе достаточно гладких в Ω функций $u(x, y)$ при условии $u|_{L_0} = u_0(\tau)$. Так как решение $u = u(x, y)$ представляет собой поверхность (ее называют интегральной поверхностью) в R^3 , то задачу Коши для уравнения (8.47) можно интерпретировать геометрически: найти интегральную поверхность, которая содержит линию $L = \{x, y, u : x = \xi(\tau), y = \eta(\tau), u = u_0(\tau), \tau_1 < \tau < \tau_2\}$.

С геометрической точки зрения уравнение (8.47) задает в R^3 поле направлений $\mathbf{l} = (a, b, c)$. Линия Γ , касательный вектор в каж-

дой точке которой коллинеарен вектору $\mathbf{l}$ с началом в той же точке, называется характеристикой уравнения (8.47). Если характеристику задать параметрически

$$\Gamma = \{x, y, u : x = x(s), y = y(s), u = u(s), s_1 < s < s_2\},$$

то x, y, u — компоненты касательного вектора. Следовательно, функции $x(s), y(s), u(s)$ удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c. \quad (8.48)$$

Поскольку a, b, c не зависят явно от s , то система (8.48) инвариантна относительно преобразования $s \rightarrow s - s_0$, т.е. значение параметра на характеристике определяется с точностью до аддитивной постоянной. Применение характеристик для построения решения уравнения (8.47) основано на свойстве: любая интегральная поверхность состоит из характеристик ([34]).

Итак, для решения задачи Коши

$$(x + y)u_x - u_y = yu, \quad (8.49)$$

$$u|_{y=x+1} = x e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (8.50)$$

необходимо найти характеристики уравнения (8.49). Соответствующая система (8.48)

$$\frac{dx}{ds} = x + y, \quad \frac{dy}{ds} = -1, \quad \frac{du}{ds} = yu$$

имеет решение

$$\begin{aligned} x &= C_1 e^s + s + 1 - C_2, \\ y &= -s + C_2, \\ u &= C_3 e^{-\frac{(C_2 - s)^2}{2}}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Здесь линия L_0 — прямая $y = x + 1$, параметрические уравнения которой $x = \tau$, $y = \tau + 1$, а линия L (8.50) описывается уравнениями

$$x = \tau, \quad y = \tau + 1, \quad u = \tau e^{-\frac{\tau^2}{2}}. \quad (8.52)$$

Искомая интегральная поверхность $u = u(x, y)$ состоит из тех характеристик Γ семейства (8.51), которые имеют общую точку с линией L (8.52). Пусть $s=0$ и τ — координаты этой точки на Γ и L соответственно, тогда

$$\begin{cases} \tau = C_1 + 1 - C_2 \\ 1 + \tau = C_2 \\ \tau e^{-\frac{\tau^2}{2}} = C_3 e^{-\frac{C_2^2}{2}}. \end{cases}$$

Решение этой системы — $C_1 = 2\tau$, $C_2 = 1 + \tau$, $C_3 = \tau e^{\frac{1+\tau}{2}}$. Подстановка значений C_1, C_2, C_3 в соотношения (8.51) превращает их в параметрические уравнения интегральной поверхности $u = u(x, y)$:

$$\begin{aligned} x &= 2\tau e^s + s - \tau, \\ y &= -s + \tau + 1, \\ u &= \tau e^{s - \frac{1}{2}(s - \tau)^2}. \end{aligned}$$

В данном случае можно исключить параметры и представить решение задачи Коши в виде

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - 1)e^{-\frac{1}{2}(y-1)^2}.$$

8.129. Показать, что производные u_x и u_y решения $u(x, y)$ задачи Коши для квазилинейного уравнения (8.47) могут иметь разрыв на характеристиках этого уравнения.

Методом характеристик решить задачи Коши 8.130 – 8.179 в области $\Omega = \{x, y; -\infty < x < \infty, y_0(x) < y\}$.

- 8.130. $au_x + u_y = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = u_0(x).$
- 8.131. $(x - 1)u_x - u_y = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = x.$
- 8.132. $y^2u_x + xu_y = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$
- 8.133. $xu_x + (y^2 + 1)u_y = 0, \quad 1 < y, \quad u(x, 1) = x.$
- 8.134. $(x^2 + y^2)u_x + xu_y = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = x^2(x^2 + 1).$
- 8.135. $e^yu_x + x^2u_y = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = x.$
- 8.136. $e^{x^2}u_x + 4\sqrt{y}u_y = 0, \quad \pi < y, \quad u(x, \pi) = \mathcal{E}rfx.$
- 8.137. $yu_x + chxu_y = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = e^x.$
- 8.138. $ythxu_x + 2(y^2 + 1)u_y = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = shx.$
- 8.139. $xu_x + 2yu_y = 0, \quad 1 < y, \quad u(x, 1) = erf x.$
- 8.140. $(x + y)u_x + yu_y = 0, \quad 1 < y, \quad u(x, 1) = e^{-x}.$
- 8.141. $(x^2 + y^2)u_x + xyu_y = 0, \quad 1 < y, \quad u(x, 1) = x^2.$
- 8.142. $3xyu_x - (3 + y^2)u_y = 0, \quad 1 < y, \quad u(x, 1) = 8x.$
- 8.143. $u_x + u_y + 2yu = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = \sin x.$
- 8.144. $u_x + u_y + xu = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = \cos x.$
- 8.145. $u_x + xu_y + x^3yu = 0, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$
- 8.146. $u_x - 2u_y = 2u - y, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = x^2 - \frac{1}{2}.$
- 8.147. $2u_x + u_y = u + xy, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = x^2 - x - 4.$
- 8.148. $u_x + y^2u_y = yu + shx, \quad 1 < y, \quad u(x, 1) = e^x.$
- 8.149. $xu_x + u_y = \frac{u}{3}, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = \frac{1}{x^2 + 1}.$
- 8.150. $xu_x - 2yu_y = (x + \sqrt{y})u, \quad x^2 < y, \quad u(x, x^2) = x^2.$

- 8.151. $yu_x + u_y = xu$, $0 < y$, $u(x, 0) = x^3$.
- 8.152. $yu_x - xu_y = -2y^2$, $x < y$, $u(x, x) = -x^2$.
- 8.153. $yu_x - xu_y = -\frac{x}{y^2+1}$, $0 < y$, $u(x, 0) = \cos x$.
- 8.154. $xu_x - yu_y = x \ln y$, $1 < y$, $u(x, 1) = (x+1)^2$.
- 8.155. $(x+y)u_x + (4x+y)u_y = 4u$, $0 < y$, $u(x, 0) = x^4$.
- 8.156. $u_x - 2xu_y = -\frac{2x}{y}u$, $x^2 < y$, $u|_{y=x^2} = 1$.
- 8.157. $xu_x + yu_y = y$, $1 < y$, $u(x, 1) = \mathcal{E}rf\,x$.
- 8.158. $2yu_x - u_y = e^y$, $0 < y$, $u(x, 0) = \sqrt[3]{x}$.
- 8.159. $yu_x + u_y = 1 - xy$, $x^2 + y^2 < 1$, $u|_{x^2+y^2=1} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
- 8.160. $2yu_x - u_y = (2y^2 - x)u$, $1 < y$, $u(x, 1) = (1+x)e^x$.
- 8.161. $yu_x + xu_y = 2xy(x^2 + y^2)u$, $0 < y$, $u(x, 0) = 1$.
- 8.162. $u_x - \sqrt{y}u_y = -xu^{-1}$, $1 < y$, $u(x, 1) = 2\sqrt{1+x}$.
- 8.163. $u_x + 2\sqrt{y}u_y = 2e^{-u}$, $0 < y$, $u(x, 0) = \ln(1+x)$.
- 8.164. $yu u_x + xu_y = 0$, $x < y$, $u(x, x) = 1$.
- 8.165. $e^y u_x + e^{2x} u u_y = 0$, $x < y$, $u(x, x) = \operatorname{sech} x$.
- 8.166. $u u_x + 2e^{-y} u_y = 0$, $0 < y$, $u(x, 0) = x$.
- 8.167. $u^2 u_x + 2xy u_y = 0$, $1 < y$, $u(x, 1) = x$.
- 8.168. $(y+u)u_x + (x+u)u_y = x+y$, $-2x < y$, $u(x, -2x) = 7x$.
- 8.169. $yu_x - 2x(u^2 - x^2)u_y = 0$, $0 < y$, $u(x, 0) = \sqrt{x^2+1}$.
- 8.170. $yu u_x - xu_y = xy$, $\sqrt{3}x < y$, $u(x, x\sqrt{3}) = 1 + 2x$.
- 8.171. $u u_x + x\sqrt{y}u_y = xu$, $0 < y$, $u(x, 0) = \frac{1}{4}(x^2 + 1)$.

$$8.172. \quad uu_x + (x + u)u_y = xu, \quad x < y, \quad u(x, x) = \frac{x^2 + 2}{4}.$$

$$8.173. \quad x^3 u_x - 2(2x^2 y + u)u_y = -2x^2 u, \\ x^4 < y, \quad u(x, x^4) = x^4 - x^2 + 1.$$

$$8.174. \quad uu_x + 2xyu_y = 2xu, \quad 5x < 2y, \quad u(x, \frac{5x}{2}) = \frac{5x^2}{4}.$$

$$8.175. \quad xu_x + uu_y = x^2 y + u, \quad 3 < y, \quad u(x, 3) = 5x.$$

$$8.176. \quad xu_x - 2u^2 u_y = -u, \quad x^2 + 1 < y, \quad u(x, x^2 + 1) = 1.$$

$$8.177. \quad (y + u)u_x + xu_y = xy, \quad 0 < y, \quad u(x, 0) = x^2.$$

$$8.178. \quad 2(y + u)u_x - xu_y = -x, \quad x^2 + 4y^2 < 1, \quad u|_{x^2 + 4y^2 = 1} = y.$$

$$8.179. \quad u_x - u^2 u_y = -yu, \quad \sqrt{x^2 + 1} < y, \quad u(x, \sqrt{x^2 + 1}) = 1.$$

8.180. Найти общее решение уравнения (1.8), в котором функция $a(\sigma) = k\sigma$, где $k = C$, $\rho(x) = (C_1 + C_2 x)^{-\frac{4}{3}}$ (см. [47]).

Пример 8.10. Решения квазилинейных уравнений обладают качественно иными свойствами по сравнению с решениями линейных уравнений. Решение линейной задачи Коши

$$u_t + c_0 u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (8.53)$$

имеет вид $u(x, t) = u_0(x - c_0 t)$ (задача 8.130); гладкость функции $u(x, t)$ определяется гладкостью $u_0(x)$. Иначе обстоит дело в случае квазилинейных уравнений; существуют такие сколь угодно гладкие функции $u_0(x)$, что соответствующее решение не обладает даже первой производной: $|\nabla u| = \infty$ при некотором t_k ("градиентная катастрофа"). Чтобы в этом убедиться, достаточно решить задачу Коши для простейшего квазилинейного уравнения:

$$u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \quad (8.54)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (8.55)$$

Характеристическая система (пример 8.9)

$$\frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{du}{ds} = 0$$

имеет решение

$$x = C_3 s + C_1, \quad t = s + C_2, \quad u = C_3. \quad (8.56)$$

Точка $s=0$ характеристики (8.56) принадлежит линии (8.55), параметрическая форма которой $x=\tau$, $t=0$, $u=u_0(\tau)$, при условии, что $C_1=\tau$, $C_2=0$, $C_3=u_0(\tau)$. Решение задачи Коши получается в параметрической форме

$$x = u_0(\tau)s + \tau, \quad t = s, \quad u = u_0(\tau),$$

или, после исключения s , в виде

$$u = u_0(\tau), \quad x = u_0(\tau)t + \tau. \quad (8.57)$$

Отсюда $u_x = u'_0(\tau) \tau_x$, $1 = u'_0(\tau) \tau_x t + \tau_x$, следовательно,

$$u_x = \frac{u'_0(\tau)}{1 + t u'_0(\tau)}.$$

При $t(\tau) = -1/u'_0(\tau) > 0$ производная $u_x = \infty$ и решение становится неоднозначным. Если функция $t(\tau) = -1/u'_0(\tau)$ достигает наименьшего значения при $\tau = \tau_k$, то время и место возникновения неоднозначности в решении соответственно равны

$$t_k = -\frac{1}{u'_0(\tau_k)}, \quad x_k = u_0(\tau_k)t_k + \tau_k.$$

Пусть $u_0(x) = 1 + e^{-x^2}$. В этом случае

$$u_{0x} = \frac{u'_0(\tau)}{1 - 2t\tau e^{-\tau^2}}, \quad t(\tau) = \frac{e^{\tau^2}}{2\tau}.$$

Функция $t(\tau)$ достигает наименьшего значения при $\tau_k=1/\sqrt{2}$, следовательно,

$$t_k = \sqrt{\frac{e}{2}}, \quad x_k = \frac{2 + \sqrt{e}}{\sqrt{2}}.$$

Уравнение (8.54) является частным случаем уравнения

$$a(x, t, u)u_t + b(x, t, u)u_x = 0, \quad (8.58)$$

характеристики которого плоские кривые. Действительно, характеристическая система

$$\frac{dx}{ds} = b, \quad \frac{dt}{ds} = a, \quad \frac{du}{ds} = 0 \quad (8.59)$$

имеет решение

$$x = x(s), \quad t = t(s), \quad u = C, \quad (8.60)$$

которое представляет собой линию в плоскости $u=C$, параллельной координатной плоскости xOu (рис. 8.4).

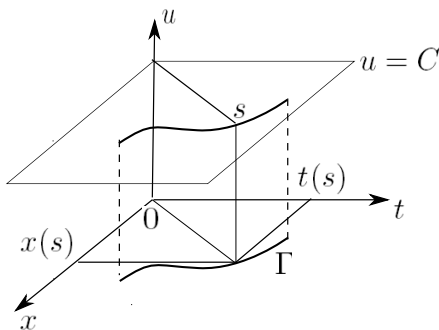


Рис. 8.4

Обычно при решении уравнения (8.58) используется проекция линии (8.60) на плоскость xOu и эта проекция Γ называется характеристикой уравнения (8.58). При таком определении характеристика задается двумя первыми уравнениями системы (8.59),

а третье трактуется следующим образом: решение $u(x, t)$ уравнения (8.58) сохраняет на характеристике Γ постоянное значение.

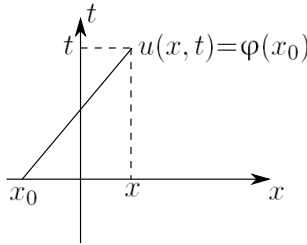


Рис. 8.5

Пусть Γ — характеристика уравнения (8.54), выходящая из точки x_0 оси $0x$ (рис.8.5). Так как $u(x, t)=u_0(x_0)$ на Γ , то уравнение характеристики имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = u_0(x_0),$$

а сама характеристика — прямая линия $x = u_0(x_0)t + x_0$. Следовательно,

$$u(x, t) = u_0(x_0), \quad x = u_0(x_0)t + x_0,$$

т.е. получено решение задачи Коши в форме (8.57).

Решение $u(x, t)=u_0(x-c_0t)$ уравнения (8.53) описывает волну, каждая точка которой движется с одной и той же скоростью c_0 . Поэтому форма волны не изменяется. Семейство характеристик — параллельные прямые $x=c_0t+x_0$, угловой коэффициент которых (рис. 8.6) $tg \alpha=1/c_0$.

В случае уравнения (8.54) точка с абсциссой x_0 перемещается со скоростью $u_0(x_0)$. Поэтому точки с большим начальным отклонением имеют большую скорость. Профиль волны искажается (рис.8.7) и в некоторый момент t_k волна "опрокидывается".

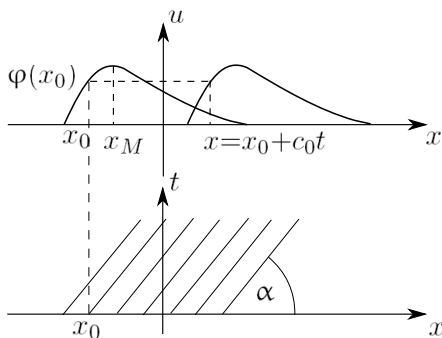


Рис. 8.6

При $t > t_k$ решение становится неоднозначным и не соответствует физике процесса в рамках принятой модели. Характеристики $x = u_0(x_0)t + x_0$ — прямые, угол наклона которых сначала растет ($x \rightarrow x_M - 0$), затем убывает. Поэтому при некотором $t = t_k$ характеристики пересекаются. В точке $(x, t > t_k)$ их пересечения решение неоднозначно, так как $u(x, t) = u_0(x_1)$ и $u(x, t) = u_0(x_2)$, а $u_0(x_1) \neq u_0(x_2)$. В момент времени t_k возникновения неоднозначности $|\nabla u| = \infty$.

8.181. Определить время существования однозначного решения задачи Коши

$u_t + u u_x = 0$, $-\infty < x < \infty$, $0 < t$, $u(x, 0) = u_0(x)$,
 где 1) $u_0(x) = 1 + (1 - x^2) \eta(1 - |x|)$; 2) $u_0(x) = 1 + \eta(\frac{\pi}{2} - |x|) \cos x$.

8.182. При начальных условиях 1) и 2) предыдущей задачи найти время существования однозначного решения задачи Коши для уравнения

$$u_t + u^2 u_x = 0.$$

8.183. Решить задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= 0, & -\infty < x < \infty, & 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

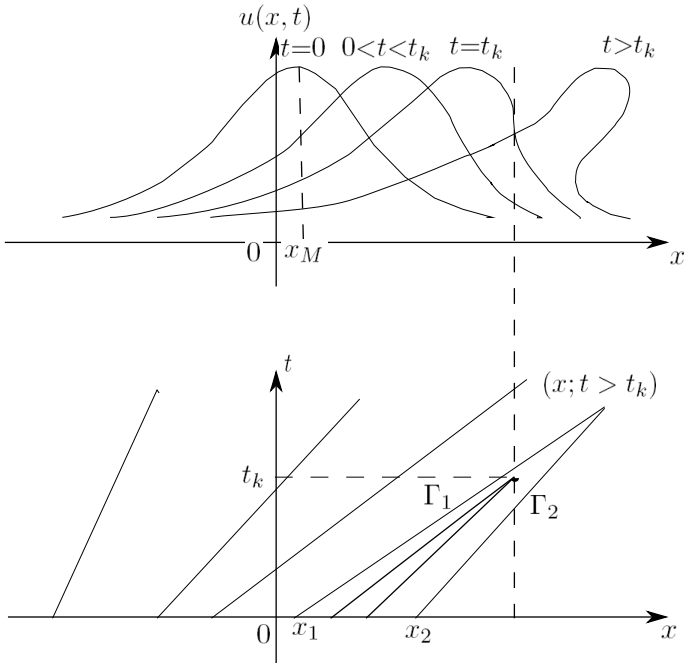


Рис. 8.7

График функция $u_0(x)$ дан на рис. 8.8. Показать, что в случае б) решение становится неоднозначным. Определить время существования однозначного решения.

8.184. Решить задачу Коши

$$u_t + uu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_2, & x > 0. \end{cases}$$

Найти время t_k существования однозначного решения; построить диаграмму характеристик на плоскости xOt .

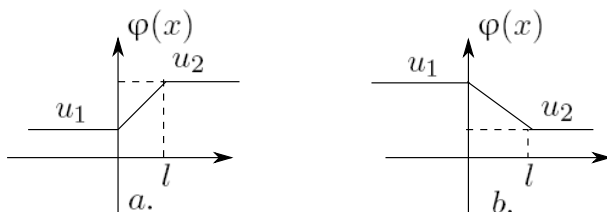


Рис. 8.8

8.185. Решить задачу Коши

$$u_t + f(u)u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & x < 0, \\ u_2, & x > 0, \end{cases} \quad u_1 < u_2,$$

где $f(u) > 0$, $f'(u)$ — знакоопределенная функция.

8.186. Транспортная задача. По шоссе без въездов и съездов движутся машины; плотность потока машин $q(x, t)$, а их число на единицу длины шоссе $u(x, t)$. Для описания движения нужно задать зависимость между q и u . Пусть $q = \frac{\alpha}{2}u^2$, $\alpha > 0$.

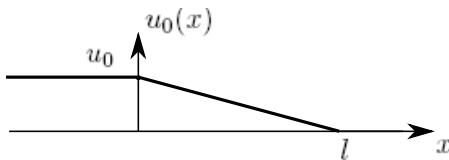


Рис. 8.9

Найти плотность машин, если $u(x, 0) = u_0(x)$ (рис. 8.9). Показать также, что в некоторый момент t_k возникает скачок плотности.

8.187. По длинной тонкой трубке с пористой стенкой течет газ (см. задачу 1.159), плотность потока которого $q = \frac{\alpha}{2}u^2$, $\alpha > 0$. При каком условии возникает скачок плотности газа?

8.188. Найти плотность газа в трубке (задача 8.187), если начальная плотность $u_0(x)$ задана графически на рис.8.9. При условии $\alpha u_0 > \beta l$ определить момент t_k возникновения скачка плотности и построить график функции $u=u(x, t_k)$.

8.189. Решить смешанную задачу:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0, & Vt < x, & \quad 0 < t, \\ u(Vt, t) &= u_1, & V &\leq u_1 < u_2. \\ u(x, 0) &= u_2, \end{aligned}$$

8.190. Решить смешанную задачу (см. [47]);

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & 0 < x, & \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= 0, & u(0, t) &= u_0(t), \\ f(u) &\in C^2, & u_0(t) &\in C^1(t \geq 0), & u_0(t) = u'(0) = 0. \end{aligned}$$

Найти расстояние, на котором возникает неоднозначное решение и время его возникновения.

8.191. Решить смешанную задачу (см. [59]);

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u)}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, & 0 < x, & \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= 0, & u(0, t) &= u_0(t), \\ f(u) &= u + k \frac{u^2}{2}, & k > 0, & \quad u_0(t) = \eta(t). \end{aligned}$$

8.192. Решить задачу:

$$\begin{aligned} u_t + (ku + m)u_x &= 0, & Vt < x, & \quad 0 < t, \\ u(Vt, t) &= u_1, \\ u(x, 0) &= u_2, \end{aligned}$$

где $k > 0$, m , u_1 , u_2 — постоянные величины; указать условия, при которых решение непрерывно при любом $t \geq 0$.

8.193. Решить задачу

$$\begin{aligned} u_x + f(u)u_y &= 0, & x \leq 0, \quad y > x, \\ & & x > 0, \quad y > -kx, \\ u(x, 0) &= u_1, & x \leq 0, \\ u(x, -kx) &= u_2, & x > 0, \end{aligned}$$

где $k > 0$, $u_1 > u_2$ — константы, $f(u) > 0$, $f'(u) > 0$.

8.194. Напряжение $\sigma(x, t)$ в цилиндрическом стержне с постоянной плотностью является решением нелинейного интегрального уравнения (1.14) (см. задачу 1.6). Найти $\sigma(x, t)$ в полуограниченном стержне ($0 < x < \infty$), если $\sigma(x, 0) = 0$, $\sigma(0, t) = \mu(t)$, $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, $\mu(t) \in C^1(0 \leq t)$. Определить время t_k возникновения ударной волны.

8.195. Решить предыдущую задачу в приближении малых колебаний (см. задачу 1.7).

8.196. На однородный полуограниченный цилиндрический стержень ($0 < x < \infty$) с момента $t = 0$ действует продольная сила, объемная плотность которой $F(t) \mathbf{e}_u$. Смещение $u(x, t)$ сечения с координатой x из положения равновесия удовлетворяет нелинейному дифференциальному уравнению (1.13). Решить задачу о движении стержня при условиях: $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$, $u(0, t) = \mu(t)$, $\mu(0) = \mu'(0) = 0$, $\mu(t) \in C^1(t \geq 0)$.

8.3. Гиперболические системы квазилинейных уравнений

Пример 8.11. Изучение ряда физических процессов сводится к решению систем квазилинейных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^2 p_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + q_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} = c_j, \quad i = 1, 2, \quad (8.61)$$

где $p_{ij}(x, t, u_1, u_2), q_{ij}(x, t, u_1, u_2) \in C^1$, $c_j(x, t, u_1, u_2) \in C$ в некоторой области переменных x, t, u_1, u_2 , а $u_1(x, t)$, и $u_2(x, t)$ — неизвестные функции. Другая форма записи системы (8.61)

$$\mathcal{P}u_t + \mathcal{Q}u_x = c, \quad (8.62)$$

где $\mathcal{P}=(p_{ij})$, $\mathcal{Q}=(q_{ij})$ — матрицы 2×2 , c и u — векторы-столбцы с компонентами c_1, c_2 и u_1, u_2 соответственно. Если $\det \mathcal{P} \neq 0$, то посредством умножения на $\mathcal{P}^{-1}$ слева система (8.62) приводится к нормальной форме

$$u_t + \mathcal{A}u_x = b, \quad (8.63)$$

или

$$\begin{cases} u_{1t} + a_{11}u_{1x} + a_{12}u_{2x} = b_1, \\ u_{2t} + a_{21}u_{1x} + a_{22}u_{2x} = b_2. \end{cases} \quad (8.64)$$

Пусть $a^2 + b^2 = N^2 \neq 0$, тогда выражение

$$a u_t + b u_x = N \left(\frac{a}{N} u_t + \frac{b}{N} u_x \right) = N(\mathbf{I}\nabla u)$$

представляет собой производную функции $u(x, t)$ по направлению вектора $\mathbf{l}$, компоненты которого $l_x=b/N$, $l_t=a/N$. С этой точки зрения конструкция уравнений (8.64) такова, что в каждом из них, например, в первом, функции u_1 и u_2 дифференцируются по разным направлениям. Однако можно образовать такую линейную комбинацию этих уравнений, что в результирующем уравнении дифференцирование обеих функций будет производиться по единому направлению. Действительно, пусть $h=(h_1, h_2)$ — вектор-строка, тогда линейная комбинация уравнений (8.64)

$$h u_t + h \mathcal{A} u_x = h b$$

будет обладать указанным свойством, если $h\mathcal{A}=\lambda h$, т.е. h — левый собственный вектор матрицы $\mathcal{A}$, соответствующий собственному значению λ . Если в каждой точке (x, t, u_1, u_2) некоторой области оба собственных значения вещественны и различны, то система

(8.63) называется гиперболической в этой области. Пусть в этом случае λ_k — собственные значения, $h^k = (h_1^k, h_2^k)$, $k=1, 2$ — соответствующие собственные векторы матрицы $\mathcal{A}$, тогда гиперболическую систему можно записать в характеристической форме

$$\sum_{j=1}^2 h_j^k \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = f_k, \quad k = 1, 2. \quad (8.65)$$

В каждом из уравнений обе функции дифференцируются по направлению

$$\mathbf{l}_k = \left\{ \frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 + 1}} \right\}, \quad k = 1, 2.$$

Направление $\mathbf{l}_k$ называется характеристическим направлением системы (8.62), а линия Γ_k , касательная к которой в каждой точке (x, t) совпадает с характеристическим направлением в этой точке, называется характеристикой системы. Отсюда следует, что характеристики определяются уравнениями

$$\frac{dx}{d\tau} = \lambda_k, \quad \frac{dt}{dx} = 1, \quad k = 1, 2,$$

либо (при $\tau=t$)

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_k, \quad k = 1, 2.$$

Применяется еще одна форма записи системы (8.65)

$$\sum_{j=1}^2 h_j^k \left(\frac{du_j}{dt} \right)_k = f_k, \quad k = 1, 2, \quad (8.66)$$

где $\left(\frac{du}{dt} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$ — производная по t функции $u(x, t)$ в направлении $\frac{dx}{dt} = \lambda$.

Из характеристической формы посредством замены зависимых переменных получается более простая система, в каждом

уравнении которой содержатся производные только одной функции. Решение этой задачи дано в [59]. Здесь приводятся два частных случая.

1. Элементы матрицы $\mathcal{A}$ системы (8.63) не зависят от переменной u : $\mathcal{A}=\mathcal{A}(x, t)$. Преобразование переменных

$$r_k = \sum_{j=1}^2 h_j^k u_j, \quad k = 1, 2 \quad (8.67)$$

является взаимно однозначным, так как якобиан преобразования $J=\det \mathcal{H}$ не равен нулю ($\mathcal{H}=(h_j^k)$ — неособая матрица). Замена переменных (8.67) в системе (8.66), записанной в форме

$$\left(\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^2 h_j^k u_j \right)_k - \sum_{j=1}^2 \left(\frac{dh_j^k}{dt} \right)_k = f_k(x, t, u_1, u_2), \quad k = 1, 2$$

приводит к следующему результату:

$$\left(\frac{dr_k}{dt} \right)_k = g_k(x, t, r_1, r_2), \quad k = 1, 2. \quad (8.68)$$

Переменные r_1 и r_2 называются инвариантами Римана, а система (8.68)—системой в инвариантах.

2. Элементы матрицы $\mathcal{A}$ не зависят от x, t : $\mathcal{A}=\mathcal{A}(u)$. Для дифференциальной формы $h_1^k du_1 + h_2^k du_2$ существует интегрирующий множитель $\mu_k(u)$, умножение на который превращает эту форму в полный дифференциал

$$\mu_k \sum_{j=1}^2 h_j^k du_j = dr_k, \quad k = 1, 2. \quad (8.69)$$

Так как

$$\frac{D(r_1, r_2)}{D(u_1, u_2)} = \det \mathcal{H} \neq 0,$$

то соотношения (8.69) устанавливают взаимно однозначное соответствие между u_1 , u_2 и r_1 , r_2 . Если теперь умножить уравнения (8.66) на соответствующие интегрирующие множители μ_1 и μ_2 и перейти от u_1 , u_2 к r_1 , r_2 , то получится система в инвариантах

$$\left(\frac{dr_k}{dt} \right)_k = g_k(x, t, r_1, r_2), \quad k = 1, 2. \quad (8.70)$$

Частным случаем системы (8.63) является линейная система

$$\begin{cases} sh\,2x \cdot u_t + sh(x+t) \cdot u_x - sh(x-t) \cdot v_x = 0, \\ sh\,2x \cdot u_t - sh(x-t) \cdot u_x + sh(x+t) \cdot v_x = 0. \end{cases} \quad (8.71)$$

Задача на собственные значения для матрицы $\mathcal{A}$ сводится к решению алгебраической системы уравнений

$$(h_1, h_2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{sh(x+t)}{sh\,2x} - \lambda & -\frac{sh(x-t)}{sh\,2x} \\ -\frac{sh(x-t)}{sh\,2x} & \frac{sh(x+t)}{sh\,2x} - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Если $\lambda_1 = ch\,t \operatorname{sech} x$, $\lambda_2 = sh\,t \operatorname{cosech} x$, то определитель системы равен нулю; собственным значениям $\lambda_{1,2}$ соответствуют собственные векторы $h^1 = (1, 1)$, $h^2 = (1, -1)$. Следовательно, система является гиперболической, характеристическая форма которой

$$\begin{cases} u_t + \lambda_1 u_x + v_t + \lambda_1 v_x = 0, \\ u_t + \lambda_2 u_x - (v_t + \lambda_2 v_x) = 0. \end{cases}$$

Замена переменных $r_1 = u + v$, $r_2 = u - v$ по формуле (8.67) приводит к системе в инвариантах

$$\begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial r_1}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (8.72)$$

8.197. Показать, что волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ приводится к системе

$$\begin{cases} u_t - a v_x = 0, \\ v_t - a u_x = 0. \end{cases}$$

Доказать, что эта система является гиперболической и преобразовать ее 1) к характеристической форме; 2) к инвариантам.

8.198. Одномерное плоское изэнтропическое движение идеального газа характеризуется функциями $v(x, t)$ (скорость газа) и $c(x, t)$ (скорость звука в газе), которые удовлетворяют системе квазилинейных уравнений (задача 1.239)

$$\begin{cases} v_t + v v_x + \frac{2}{\gamma-1} c c_x = 0, \\ c_t + \frac{\gamma-1}{2} c v_x + v c_x = 0. \end{cases} \quad (8.73)$$

Доказать, что это — гиперболическая система, характеристическая форма которой

$$\begin{cases} v_t + (v + c) v_x + \frac{2}{\gamma-1} (c_t + (v + c) c_x) = 0, \\ v_t + (v - c) v_x - \frac{2}{\gamma-1} (c_t + (v - c) c_x) = 0. \end{cases}$$

8.199. Доказать, что система (8.73), записанная в инвариантах Римана r, s , имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} + (\alpha r + \beta s) \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + (\beta r + \alpha s) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (8.74)$$

где

$$\begin{aligned} r &= v + \frac{2}{\gamma-1} c, & \alpha r + \beta s &= v + c, & \alpha &= \frac{1}{2} + \frac{\gamma-1}{4}, \\ s &= v - \frac{2}{\gamma-1} c, & \beta r + \alpha s &= v - c, & \beta &= \frac{1}{2} - \frac{\gamma-1}{4}. \end{aligned}$$

Показать, что все газодинамические величины (v, c, ρ, P) выражаются через r и s .

8.200. Изэнтропическое движение идеального газа, при котором один из инвариантов постоянен, называется бегущей волной, или волной Римана: r -волна при $s=s_0$, s -волна при $r=r_0$.

1. Показать, что в акустическом приближении волны Римана — это бегущие линейные волны, профиль и скорость которых постоянны: $r = f_1(x - c_0 t)$, $s = f_2(x + c_0 t)$, $c_0 = P_0 \gamma / \rho_0$.

2. Волна Римана, в которой плотность ρ выделенного элемента газа, перемещающегося в пространстве, увеличивается со временем, называется волной сжатия, в противном случае — волной

разрежения. Доказать, что критерием волны сжатия является условие $\frac{\partial r}{\partial x} < 0$ для r -волны, $\frac{\partial s}{\partial x} < 0$ для s -волны, а волны разрежения — $\frac{\partial r}{\partial x} > 0$ для r -волны, $\frac{\partial s}{\partial x} > 0$ для s -волны.

3. Если в некоторый момент времени $t > 0$ градиент давления (или другой газодинамической величины) становится неограниченным, то в этот момент в газе образуется ударная волна (скачок давления). Показать, что ударная волна возникает в бегущей волне сжатия и не возникает в волне разрежения.

8.201. При некоторых условиях стационарное течение идеального газа описывается системой уравнений (см. задачу 1.241)

$$\begin{cases} (v_x^2 - c^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + 2v_x v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + (v_y^2 - c^2) \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (8.75)$$

где

$$c^2 = c_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2}(v^2 - v_0^2). \quad (8.76)$$

1. Показать, что при $v > c$ (сверхзвуковое течение) система является гиперболической.

2. Преобразовать систему к характеристической форме.

3. Доказать, что каждая из двух характеристик Γ_1 и Γ_2 , пересекающих линию тока L в некоторой точке M , образует с этой линией один и тот же острый угол $\varphi = \arcsin \frac{c}{v}$. (рис. 8.10)

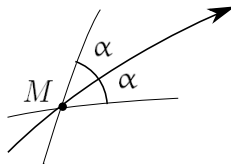


Рис. 8.10

4. Перейти к новым зависимым переменным θ и φ по формулам

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad c = v \sin \varphi \quad (8.77)$$

и записать систему (8.75) в инвариантах

$$\begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial r_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (8.78)$$

$$\lambda_{1,2} = tg(\theta \pm \varphi), \quad r_{1,2} = F(\varphi) \pm \theta,$$

$$F(\varphi) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} tg \varphi \right) - \varphi.$$

8.202. Движение одномерных гравитационных волн на мелкой воде (задача 1.238) описывается системой квазилинейных уравнений

$$\begin{cases} h_t + u h_x + h u_x = 0, \\ u_t + g h_x + u u_x = 0. \end{cases} \quad (8.79)$$

Доказать, что это гиперболическая система и привести ее к инвариантам Римана.

8.203. Показать, что система уравнений, описывающих ионно-акустические колебания в локально нейтральной плазме (см. задачу 1.370, п.3), является гиперболической и записать ее в инвариантах Римана.

8.204. В одномерной изотропной среде распространяется (вдоль оси $0x$) электромагнитная волна, электрическое и магнитное поле которой $\mathbf{E} = \mathcal{E}(x, t) \mathbf{e}_y$, $\mathbf{H} = \mathcal{H}(x, t) \mathbf{e}_z$. Диэлектрическая проницаемость среды зависит от E и равна (по определению) $\varepsilon(E) = \frac{dD}{dE}$, где индукция D есть некоторая функция E (см.[?]). Показать, что 1) функции E и H удовлетворяют системе квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{c}{\varepsilon(E)} \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} &= 0; \end{aligned}$$

2) эта система является гиперболической. 3) если H есть функция E (или наоборот), то возможно возникновение ударной электромагнитной волны.

Пример 8.12. Постановка задачи Коши для гиперболической системы квазилинейных уравнений: в некоторой окрестности дуги $L=\{x, t : x=x(\tau), y=y(\tau), \tau_1 < \tau < \tau_2\}$ найти решение системы

$$\begin{aligned} u_t + \mathcal{A}u_x &= b, \\ u|_L &= u_0(\tau) \end{aligned}.$$

Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} sh\,2x\,u_t + sh\,(x+t)\,u_x - sh\,(x-t)\,v_x = 0, \\ sh\,2x\,u_t - sh\,(x-t)\,u_x + sh\,(x+t)\,v_x = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) = e^x - 1, \quad v(x, 0) = 1 - e^{-x}. \end{cases}$$

Преобразование системы к инвариантам (пример 8.11) сводит задачу к двум независимым задачам Коши:

$$\begin{aligned} ch\,x\,r_{1t} + ch\,t\,r_{1x} &= 0, & sh\,x\,r_{2t} + sh\,t\,r_{2x} &= 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, & & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ r_1(x, 0) &= 2\,sh\,x, & r_2(x, 0) &= 2\,ch\,x - 2. \end{aligned}$$

Отсюда $r_1(x, t) = 2(sh\,x - sh\,t)$, $r_2(x, t) = 2(ch\,x - ch\,t - 1)$, следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = e^x - e^t - 1, \\ v(x, t) &= \frac{1}{2}(r_1 - r_2) = e^{-t} - e^{-x} + 1. \end{aligned}$$

8.205. Решить задачу 8.10, преобразовав ее в эквивалентную задачу для гиперболической системы (см. задачу 8.197).

Решить задачи Коши 8.206 – 8.244 для систем уравнений в области $\Omega = \{x, t : -\infty < x < \infty, t_0 < t\}$.

$$\mathbf{8.206.} \quad \begin{cases} u_t + 7u_x - 8v_x = 0, \\ v_t + 2u_x - 3v_x = 0, \\ u(x, 0) = 2x, \quad v(x, 0) = x + 1, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$\mathbf{8.207.} \quad \begin{cases} u_t + 11u_x + v_x = 0, \\ v_t - 8u_x + 2v_x = 0, \\ u(x, 1) = -2x + 13, \quad v(x, 1) = x^2 - 4x - 4, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.208. \quad \begin{cases} u_t + 17u_x + 2v_x = 0, \\ v_t + 13u_x + 6v_x = 0, \\ u(x, 0) = 2x^2 + x, \quad v(x, 0) = -13x^2 + x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.209. \quad \begin{cases} 24u_t - 13u_x - 7v_x = 0, \\ 24v_t - 245u_x + v_x = 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad v(x, 0) = -48x^2, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.210. \quad \begin{cases} u_t + 5u_x + 21v_x = 0, \\ v_t + 2u_x + 4v_x - u = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad v(x, 0) = -\frac{8}{3}(x + 5), \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.211. \quad \begin{cases} u_t + u_x + 2tv_x - v = 0, \\ v_t + 2tu_x + v_x - u = 0, \\ u(x, 0) = shx, \quad v(x, 0) = chx, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.212. \quad \begin{cases} 11xu_t - tu_x + 2tv_x = 0, \\ 11xv_t + 60tu_x + tv_x = 0, \\ u(x, 0) = 11x^2, \quad v(x, 0) = -11x^4, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.213. \quad \begin{cases} 21tu_t - (15x - 2t)u_x + (3x + t)v_x = 0, \\ 21tv_t + 10(3x + t)u_x - (6x - 5t)v_x = 0, \\ u(x, 2) = x, \quad v(x, 2) = 2x, \quad t_0 = 2. \end{cases}$$

$$8.214. \quad \begin{cases} u_t + \left(\frac{3}{2}t - 1\right)u_x + \left(\frac{3}{2}t + 1\right)v_x = 0, \\ v_t + \left(\frac{3}{2}t + 1\right)u_x + \left(\frac{3}{2}t - 1\right)v_x = 0, \\ u(x, 1) = 3x^2 + 20x, \quad v(x, 0) = 3x^2 + 4x + 24, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.215. \quad \begin{cases} 2xtu_t - (x^2 + t^2)u_x + (x^2 - t^2)v_x - v = 0, \\ 2xtv_t + (x^2 - t^2)u_x - (x^2 + t^2)v_x - u = 0, \\ u(x, 1) = 2x^2, \quad v(x, 1) = 2, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.216. \quad \begin{cases} 5tu_t + (4t^2 + 3x)u_x + (x - 2t^2)v_x = 0, \\ 5tv_t + 6(x - 2t^2)u_x + 2(x + 3t^2)v_x = 0, \\ u(x, 1) = 5x, \quad v(x, 1) = 5x^2, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.217. \quad \begin{cases} u_t + \frac{1}{2} \left(t - \frac{x}{t+1} \right) u_x - \left(t + \frac{x}{1+t} \right) v_x = 0, \\ v_t - \frac{1}{4} \left(t + \frac{x}{t+1} \right) u_x + \frac{1}{2} \left(t - \frac{x}{1+t} \right) v_x = 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad v(x, 0) = x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.218. \quad \begin{cases} u_t + shx u_x - chx v_x = 0, \\ v_t - chx u_x + shx v_x = 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad v(x, 0) = x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.219. \quad \begin{cases} 7u_t + \left(x + \frac{6}{1+t} \right) u_x - 3 \left(x - \frac{1}{1+t} \right) v_x = 0, \\ 7v_t - 2 \left(x - \frac{1}{1+t} \right) u_x + \left(6x + \frac{1}{1+t} \right) v_x = 0, \\ u(x, 0) = 4x, \quad v(x, 0) = -x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.220. \quad \begin{cases} shx u_t + ch(x-t) u_x + ch(x+t) v_x = 0, \\ shx v_t + ch(x+t) u_x + ch(x-t) v_x = 0, \\ u(x, 0) = sh^2x, \quad v(x, 0) = 1, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.221. \quad \begin{cases} 2x^2tu_t - (x^3 - t^3)u_x + (x^3 + t^3)v_x = 0, \\ 2x^2tv_t + (x^3 + t^3)u_x - (x^3 - t^3)v_x = 0, \\ u(x, 0) = sh^2x^3, \quad v(x, 0) = ch^2x^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.222. \quad \begin{cases} shx u_t - 2shx v_x = 2sh(x+t), \\ 2shx v_t - shx u_x = 0, \\ u(x, 0) = ch^2x, \quad v(x, 0) = e^{-x}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.223. \quad \begin{cases} u_t + tu_x - xv_x = 0, \\ v_t - xu_x + tv_x = 0, \\ u(x, 0) = x + 1, \quad v(x, 0) = 1, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.224. \quad \begin{cases} u_t + 2xu_x + 6x^2v_x = 0, \\ v_t + u_x + 3xv_x = 0, \\ u(x, 0) = 2x, \quad v(x, 0) = 1 - x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.225. \quad \begin{cases} u_t + 2tu_x + tv_x = 0, \\ v_t + 6u_x + 3v_x = 0, \\ u(x, 0) = x^2, \quad v(x, 0) = 2x(1-x), \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.226. \quad \begin{cases} 3u_t - 2v_t - 12u_x + 8v_x = 0, \\ 2u_t - 2v_t + 69u_x - 47v_x = 0, \\ u(x, 0) = 3x, \quad v(x, 0) = 5x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.227. \quad \begin{cases} 5xtu_t + 10xtv_t - (21x^2 - 16t^2)u_x + 2(7x^2 - 12t^2)v_x = 0, \\ 5xtu_t - 10xtv_t + (3x^2 - 8t^2)u_x - 2(x^2 - 6t^2)v_x = 0, \\ u(x, 1) = 2x^2 - 9, \quad v(x, 1) = 3(x - 1)^2, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.228. \quad \begin{cases} t(t + 2)u_t + t^2v_t - 2(x - t)u_x - 2tv_x = 0, \\ t^2u_t + t(t + 2)v_t - 2tu_x - 2(x - t)v_x = 0, \\ u(x, 1) = \frac{3x}{2} - 1, \quad v(x, 1) = 1 - \frac{x}{2}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.229. \quad \begin{cases} 2xtu_t - 4xtv_t + (3x^2 - 14t^2)u_x - (3x^2 + 14t^2)v_x = 0, \\ 3xtu_t - 5xtv_t + (4x^2 - 19t^2)u_x - (4x^2 + 19t^2)v_x = 0, \\ u(x, 1) = \frac{x^4 - 5(x^2 + 1)}{x^2 + 1}, \quad v(x, 1) = \frac{x^2 + 10x^2}{x^2 + 1}, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.230. \quad \begin{cases} u_t + vu_x = 0, \\ v_t + uv_x = 0, \\ u(x, 0) = 1, \quad v(x, 0) = x^3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.231. \quad \begin{cases} u_t + uu_x + v_x = 0, \\ v_t + vu_x + uv_x = 0, \\ u(x, 0) = \frac{2x+3}{3}, \quad v(x, 0) = \frac{x^2}{9}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.232. \quad \begin{cases} u_t + vu_x + uv_x = 0, \\ v_t + 4uu_x + vv_x = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1-x}{4}, \quad v(x, 0) = \frac{3x-1}{2}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.233. \quad \begin{cases} u_t + vu_x + (v - \frac{1}{4})v_x = 0, \\ v_t + (u - \frac{1}{4})u_x + uv_x = 0, \\ u(x, 0) = \cos^2 x, \quad v(x, 0) = \sin^2 x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.234. \quad \begin{cases} u_t + vu_x + uv_x = 0, \\ v_t + \frac{1}{u}u_x + vv_x = 0, \\ u(x, 0) = e^{2x}, \quad v(x, 0) = 2(x + 1), \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.235. \quad \begin{cases} 3u_t + (7u + 2v)u_x + 2(u - v)v_x = 0, \\ 3v_t - 2(u - v)u_x + (2u + 7v)v_x = 0, \\ u(x, 0) = \frac{2}{3}(x - 3), \quad v(x, 0) = \frac{2}{3}(x + 3), \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.236. \quad \begin{cases} u_t + t(u + v)u_x + t(v - u)v_x = 0, \\ v_t + t(u - v)u_x + t(u + v)v_x = 0, \\ u(x, 0) = x + 1, \quad v(x, 0) = x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.237. \quad \begin{cases} 2u_t + (tu - v)u_x + (tv - u)v_x = 0, \\ 2v_t + (tv - u)u_x + (tu - v)v_x = 0, \\ u(x, 0) = 2x, \quad v(x, 0) = 1, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.238. \quad \begin{cases} 2u_t + [(t + 2)u + tv]u_x + [tu + (t + 2)v]v_x = 0, \\ 2v_t + [tu + (t + 2)v]u_x + [(t + 2)u + tv]v_x = 0, \\ u(x, 0) = 3x + 2, \quad v(x, 0) = x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.239. \quad \begin{cases} u_t + (u \cos^2 t - v \sin^2 t)u_x - (u \sin^2 t - v \cos^2 t)v_x = 0, \\ vt - (u \sin^2 t - v \cos^2 t)u_x + (u \cos^2 t - v \sin^2 t)v_x = 0, \\ u(x, 0) = 3x + 1, \quad v(x, 0) = -x + 1, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.240. \quad \begin{cases} 2u_t + 3v_t + (7u + 8v)u_x + (8u + 7v)v_x = 0, \\ 3u_t - 4v_t + (2u - 5v)u_x - (5u - 2v)v_x = 0, \\ u(x, 0) = 2(x + 1), \quad v(x, 0) = x + 3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.241. \quad \begin{cases} 2u_t + 5v_t + (7u - 3v)u_x + (7u + 3v)v_x = 0, \\ 3u_t - 7v_t - 2(2u - 5v)u_x - 2(2u + 5v)v_x = 0, \\ u(x, 0) = x, \quad v(x, 0) = x - 3, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.242. \quad \begin{cases} 10tu_t - 6tv_t + (5u - 3v)u_x - (3u - 5v)v_x = 0, \\ 4tu_t - 2tv_t + (2u - v)u_x - (u - 2v)v_x = 0, \\ u(x, 1) = 2x, \quad v(x, 1) = 0, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.243. \quad \begin{cases} 10u_t + 8v_t - (2u + v)u_x - 4(u - v)v_x = 0, \\ 4u_t + 10v_t - (2u - 3v)u_x - 4uv_x = 0, \\ u(x, 0) = x + 6, \quad v(x, 0) = 2, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.244. \quad \begin{cases} (t+1)u_t + (t-1)v_t + uu_x + vv_x = 0, \\ (t-1)ut + (t+1)v_t + vu_x + uv_x = 0, \\ u(x,1) = 2x, \quad v(x,1) = 0, \quad t_0 = 1. \end{cases}$$

$$8.245. \quad \begin{cases} tu_t - (2t+1)v_t + t(2v-u)u_x + t(2u-5v)v_x = 0, \\ tu_t - (2t-1)v_t + t(2v-u)u_x + t(2u-3v)v_x = 0, \\ u(x,0) = x, \quad v(x,0) = x+1, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.246. \quad \begin{cases} u_t + v_t + t(3u-2v)u_x - (2tu-2tv-3)v_x = 0, \\ 7u_t - 2v_t + (11tu-6tv+6)u_x + -2t(3u-2v)v_x = 0, \\ u(x,0) = 4x, \quad v(x,0) = 5x, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.247. \quad \begin{cases} 12u_t - 15v_t + 2e^t(u+v)u_x + ((2u-7v)e^t + 9)v_x = 0, \\ 15u_t - 12v_t - ((7u-2v)e^t) + 9)u_x + 2e^t(u+v)v_x = 0, \\ u(x,0) = 3x+2, \quad v(x,0) = 3x+1, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.248. \quad \begin{cases} 3u_t - 5v_t + 3(u+v)u_x - (3u-14v+4\sin t)v_x = 0, \\ 5u_t - 3v_t + (14u-3v+4\sin t)u_x - 3(u+v)v_x = 0, \\ u(x,0) = \frac{4x+2}{8}, \quad v(x,0) = \frac{4x+1}{8}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

$$8.249. \quad \begin{cases} 3u_t + v_t + (4u \operatorname{sh} t + 1)u_x + (4v \operatorname{sh} t + 3)v_x = 0, \\ u_t + 3v_t + (4v \operatorname{sh} t + 3)u_x + (4u \operatorname{sh} t + 1)v_x = 0, \\ u(x,0) = \frac{3x}{2}, \quad v(x,0) = \frac{x}{2}, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

Пример 8.13. Идеальный газ заполняет полубесконечную трубу с поршнем, который, начиная с момента времени $t = 0$, движется по заданному закону. Нужно определить движение газа в трубе. Состояние газа определяется системой уравнений (см. задачу 10.44):

$$\begin{cases} v_t + v v_x + \frac{2}{\gamma-1} c c_x = 0, \\ c_t + \frac{\gamma-1}{2} c v_x + v c_x = 0, \end{cases} \quad \mu(t) < x, \quad 0 < t, \\ v(\mu(t), t) = \mu'(t), \quad v(x,0) = 0, \quad c(x,0) = c_0,$$

где $\mu(t) \in C^1(t \geq 0)$. В инвариантах Римана $r(x, t)$, $s(x, t)$ эта задача

ставится следующим образом (см.(8.74)):

$$\begin{cases} r_t + (\alpha r + \beta s)r_x = 0, \\ s_t + (\beta r + \alpha s)s_x = 0, \end{cases} \quad \mu(t) < x, \quad 0 < t, \\ r(x, 0) = \frac{2c_0}{\gamma-1}, \quad s(x, 0) = -\frac{2c_0}{\gamma-1}, \\ (r(x, t) + s(x, t))|_L = 2\mu'(t), \quad L = \{x, t : x = \mu(t), 0 \leq t\}$$

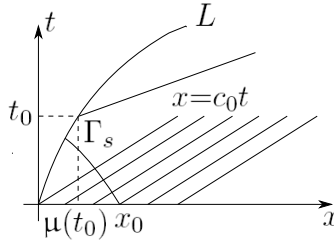


Рис. 8.11

Начальная скорость газа равна нулю и в течение некоторого времени $v < c$, т.е. тангенс угла наклона характеристики Γ_s к оси $0x$ отрицателен. Поэтому характеристика с началом в точке x_0 оси $0x$ пересекает линию L (рис.8.11). Инвариант $s(x, t) = s_0$ на Γ_s ; так как $s_0 = s(x_0, 0)$ не зависит от x_0 , то $s(x, t) \equiv s_0$, т.е.

$$v - \frac{2c}{\gamma-1} = -\frac{2c_0}{\gamma-1}. \quad (8.80)$$

Таким образом, в газе возникает r -волна Римана (см. задачу 8.200) и уравнение для $s(x, t)$ становится тождеством, а $r(x, t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} r_t + (\alpha r + \beta s_0)r_x &= 0, \quad \mu(t) < x, \quad 0 < t, \\ r(x, 0) &= \frac{2c_0}{\gamma-1}, \\ r(\mu(t), t) &= 2\mu'(t) + \frac{2c_0}{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (8.81)$$

На характеристике Γ_r инвариант $r(x, t) = r_0$, следовательно, Γ_r — прямая линия. Пусть (x, t) — точка области, ограниченной положительной частью оси $0x$ и линией L , а Γ_r — характеристика,

проходящая через эту точку. Если Γ_r пересекает ось $0x$ в точке x_0 , то $r(x, t) = r(x_0, 0)$, а угловой коэффициент характеристики

$$\frac{dx}{dt} = v(x_0, 0) + c(x_0, 0) = c_0.$$

Следовательно,

$$r(x, t) = \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad x = c_0 t + x_0, \quad x \geq 0,$$

т.е.

$$r(x, t) = \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad 0 \leq c_0 t \leq x.$$

Если Γ_r пересекает линию L в точке $(\mu(t_0), t_0)$, то с учетом (8.80) угловой коэффициент характеристики

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v(\mu(t_0), t) + c(\mu(t_0), t) = \mu'(t_0) + \frac{\gamma - 1}{2} \mu'(t_0) + c_0 = \\ &= \frac{\gamma + 1}{2} \mu'(t_0) + c_0, \end{aligned}$$

поэтому при $\mu(t) \leq x \leq c_0 t$

$$r(x, t) = 2\mu'(t_0) + \frac{2c_0}{\gamma - 1}, \quad x = \mu(t_0) + (c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} \mu'(t_0))(t - t_0).$$

Решение исходной задачи можно найти по формулам

$$v + \frac{r + s}{2}, \quad c = \frac{\gamma - 1}{4}(r - s),$$

либо, заметив, что на характеристиках каждая из функций v и c сохраняет постоянное значение. В итоге

$$\begin{aligned} v(x, t) &= 0, \\ c(x, t) &= c_0, \quad 0 \leq c_0 t \leq x, \\ v(x, t) &= \mu'(t_0), \\ c(x, t) &= c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} \mu'(t_0), \quad \mu(t) \leq x \leq c_0 t \\ x &= \mu(t_0) + \left(c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} \mu'(t_0) \right) (t - t_0). \end{aligned} \tag{8.82}$$

8.250. Идеальный газ заполняет часть ($x>0$) трубки ($-\infty<x<\infty$) и отделен от вакуума ($x<0$) перегородкой. С какой скоростью будет двигаться газ, если перегородку убрать?

8.251. Идеальный газ находится в трубке ($-\infty<x<\infty$) с поршнем по одну сторону ($0<x$) от поршня. Доказать, что 1) при движении поршня по закону $x = -at^2/2$, $a>0$, в газе возникает бегущая волна разрежения (см. задачу 8.200); 2) в момент $t_k = \frac{2c_0}{a(\gamma-1)}$ поршень отрывается от газа. Построить график зависимости от времени скорости элемента газа с начальной координатой $x=0$.

8.252. Найти скорость газа в трубке (задача 8.251), если поршень движется по закону $x = -Vt\eta(t)$, $V>0$.

8.253. Найти скорость газа в трубке (задача 8.251), если поршень движется по закону $x = at^2/2$, $a>0$. Определить момент времени t_k образования ударной волны и ее положение x_k в этот момент.

8.254. Поршень в трубке с газом (задача 8.251) движется по закону $x = at^3$, $a>0$. Определить момент времени t_k образования ударной волны и ее положение x_k в этот момент.

8.255. Показать, что скорость $v(x, t)$ газа в r -волне Римана является решением дифференциального уравнения

$$v_t + \left(c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) v = 0. \quad (8.83)$$

8.256. Бесконечная трубка ($-\infty<x<\infty$) заполнена идеальным газом, начальная скорость которого равна нулю. Решить задачу о движении газа при $x>0$, если его скорость в сечении $x=0$ задана и равна $\mu(t)$.

8.257. При условиях предыдущей задачи определить время и место возникновения ударной волны, если

$$1) \mu(t) = v_0 (1 - e^{-\alpha t}), \alpha>0; \quad 2) \mu(t) = kt^n, 0 \leq n.$$

8.258. Показать, что при целочисленном значении $\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} = k$ общее решение системы уравнений газодинамики (8.73) может быть представлено в виде (см.[70]):

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(r+s)t - \frac{k-1}{2(2k-1)} \frac{\partial^{2k-3}}{\partial r^{k-2} \partial s^{k-2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{f(r) - g(s)}{r-s}, \\ t &= \frac{\partial^{2k-2}}{\partial r^{k-1} \partial s^{k-1}} \frac{f(r) - g(s)}{r-s}, \end{aligned}$$

где r и s инварианты Римана, $f(r)$ и $g(s)$ — произвольные достаточно гладкие функции, а k принимает значения 2,3,4.

8.259. Идеальная несжимаемая жидкость заполняет неглубокий канал с прямоугольным поперечным сечением, дно которого горизонтально. В жидкости возбуждается бегущая волна Римана, распространяющаяся в положительном направлении оси $0x$ (задача 8.202) в невозмущенную область, глубина жидкости в которой h_0 . Определить высоту $h(x, t)$ и скорость $u(x, t)$ жидкости, если $h(x, 0) = H(x) \geq h_0$, $H(x) \in C^1$. Определить время t_k существования непрерывного решения.

8.260. Задача о разрушении плотины. По одну сторону от вертикальной перегородки находится идеальная несжимаемая жидкость, высота которой h_0 (рис. 8.12). В момент времени $t=0$ перегородка разрушается.

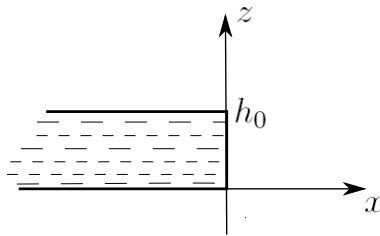


Рис. 8.12

Применяя уравнения мелкой воды (8.79), найти высоту $h(x, t)$ и скорость $v(x, t)$ жидкости, пренебрегая трением о поверхность дна. Каковы высота и скорость жидкости в сечении $x=0$?

8.261. Потенциальное обтекание цилиндрической поверхности S , уравнение которой $y=f(x)$, сверхзвуковым потоком идеального газа не зависит от времени (рис. 8.13). На бесконечности (вверх по течению) скорость газа равна v_0 и направлена по оси Ox , плотность и давление ρ_0 и P_0 соответственно.

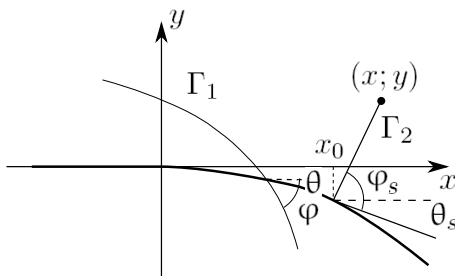


Рис. 8.13

1. Найти кинематические параметры течения $\theta(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ (задача 8.201), давление P на поверхности, если а) S — выпуклая поверхность: $f(x)=0$ при $x \leq 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) \leq 0$, $f \in C^2$;
б) S — угол:

$$y = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -kx, & x > 0, \quad k > 0. \end{cases}$$

2. Доказать, что при обтекании вогнутой поверхности в газе возникает ударная волна.

8.262. В локально нейтральной плазме возбуждаются ионно-акустические волны (задача 1.370). Возможно ли возникновение ударных волн?

Пример 8.14. Ударная волна в газе представляет собой перемещающуюся в пространстве сравнительно небольшую область, в

которой происходит существенное изменение гидродинамических величин. При моделировании движения газа размерами указанной области пренебрегают и заменяют ее поверхностью, на которой гидродинамические величины изменяются скачком. Иными словами, ударная волна моделируется разрывными решениями системы уравнений гидродинамики. Для построения таких решений необходимо задать дополнительные граничные условия — соотношения между величинами скачков на поверхности разрыва, которые определяются законами сохранения (в случае газа сохраняются масса, импульс, энергия).

Пусть $u(x, t) \in C^1$ — объемная плотность, $q(x, t)$ — плотность потока некоторой физической величины. Закон сохранения (1.32) при отсутствии источников принимает форму

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (8.84)$$

Если на поверхности $x=x(t)$, которая перемещается со скоростью $U=\dot{x}(t)$, функции $u(x, t)$ и $q(x, t)$ имеют скачки $[u]$ и $[q]$, где $[u]=u_1-u_2$, $u_{1,2}=u(x(t)\pm 0, t)$ и т.д., то закон сохранения величины $u(x, t)$ в элементе объема $S\Delta x=SU\Delta t$ запишется в виде

$$u_2 S\Delta x - u_1 S\Delta x = q_2 S\Delta t - q_1 S\Delta t.$$

Вытекающая отсюда (при $\Delta t \rightarrow 0$) локальная форма закона сохранения устанавливает зависимость между величинами скачков

$$U[u] - [q] = 0. \quad (8.85)$$

Закон сохранения массы, плотность которой ρ , плотность потока ρV , задает граничное условие $U[\rho] - [\rho V] = 0$, или $[\rho v] = 0$, где $v = U - v$ — скорость поверхности разрыва относительно газа.

Чтобы представить закон сохранения импульса в форме (8.85), нужно найти выражение для плотности потока импульса. Оно получается преобразованием производной $(\rho V)_t$ с помощью (1.74), (1.75):

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} = V \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -V \frac{\partial(\rho V)}{\partial x} - \rho V \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(P + \rho V^2).$$

Это соотношение имеет вид (8.84)

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(P + \rho V^2) = 0,$$

так что плотность потока импульса равна $P + \rho V^2$. Соответствующее граничное условие $U[\rho V] - [P + \rho V^2] = 0$ принимает форму $[P + \rho v^2] = 0$.

Вывод третьего граничного условия проводится аналогично. Плотность энергии газа $\rho V^2/2 + \rho E$ складывается из кинетической энергии и внутренней энергии. Скорость изменения плотности энергии преобразуется с помощью уравнений (1.74), (1.75) и соотношения (1.164), взятого в виде $\rho dw = dP$, где $w = E + P/\rho$ — энтальпия, или в виде $dE = P d\rho/\rho^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} \right) &= \frac{V^2}{2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho V \frac{\partial V}{\partial t} = \\ &= -\frac{V^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}(\rho V) - \rho V^2 \frac{\partial V}{\partial x} - V \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V \frac{V^2}{2} \right) - \rho V \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho E) &= E \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial E}{\partial t} = \left(E + \frac{P}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} = -w \frac{\partial}{\partial x}(\rho V). \end{aligned}$$

В результате получается уравнение непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho V^2}{2} + \rho E \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho V \left(\frac{V^2}{2} + w \right) \right] = 0$$

и граничное условие $[v^2/2 + w] = 0$.

Таким образом, на поверхности разрыва выполняются условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \\ P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2, \\ w_1 + \frac{v_1^2}{2} = w_2 + \frac{v_2^2}{2}. \end{array} \right. \quad (8.86)$$

8.263. Построить разрывное решение задачи 8.186 для $t > t_k$.

8.264. Пусть $u(x, t)$ — объемная плотность, $q(u)$ — плотность потока некоторой физической величины. Применяя закон сохранения для $u(x, t)$, построить разрывное решение смешанной задачи

$$\begin{aligned} u_t + f(u)u_x &= 0, \quad 0 < x, \quad t < 0, \\ u(x, 0) &= u_1, \quad u(0, t) = u_2, \\ f(u) &= q'(u) > 0, \quad q'(u_2) > q'(u_1). \end{aligned}$$

8.265. Установить следующие свойства ударной волны, возникающей при одомерном плоском движении идеального газа с постоянными теплоемкостями c_V , c_P :

1) давления P_1 , P_2 и плотности ρ_1 , ρ_2 связаны соотношением

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(\gamma + 1)\rho_2 - (\gamma - 1)\rho_1}{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_2}, \quad (8.87)$$

которое называется ударной адиабатой, или адиабатой Гюгонио;

2) на поверхности разрыва энтропия меняется скачком

$$S_2 - S_1 = c_V \ln \left[\frac{1 + \frac{\gamma+1}{2}z}{1 - \frac{\gamma-1}{2}z} (1+z)^{-\gamma} \right], \quad z = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1};$$

3) ударная волна является волной сжатия и перемещается из области с большим давлением в область с меньшим давлением (теорема Цемплена), при этом отношение P_2/P_1 неограничено сверху, а отношение ρ_2/ρ_1 ограничено;

4) относительно газа ударная волна движется со сверхзвуковой скоростью перед поверхностью разрыва и с дозвуковой скоростью — за ней.

8.266. Полуограниченная трубка ($0 < x$) с поршнем на конце заполнена идеальным газом, давление которого P_1 , плотность ρ_1 . Поршень начинает двигаться со скоростью $V > 0$. Найти положение ударной волны и распределение давления в газе.

8.267. При условиях, сформулированных в задаче 8.259, в жидкости возникают ударные волны и ее движение описывается разрывными решениями системы (8.79). Пусть $x(t)$ — положение поверхности разрыва, $U=\dot{x}(t)$ — ее скорость. Показать, что

1) на поверхности разрыва выполняются граничные условия, выражающие законы сохранения массы и импульса,

$$\begin{cases} v_1 h_1 = v_2 h_2 = j, \\ v_1^2 h_1 + \frac{gh_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{gh_2^2}{2}, \end{cases} \quad (8.88)$$

где $v=U-u$, $v_{1,2}=v(x(t) \pm 0, t)$ и т.д.;

2) закон сохранения энергии в форме (8.64) не выполняется из-за диссипации на разрыве:

$$T_2 - T_1 = U[w] - [q_w] = \frac{gj}{4h_1 h_2} (h_2 - h_1)^3 \neq 0,$$

q_w — поток энергии через вертикальную полосу единичной ширины и высоты h ;

3) при переходе жидкости через поверхность разрыва (из области 1 в область 2) уровень повышается ($h_2 > h_1$), т.е. жидкость перемещается в область с большей высотой (это явление называется "прыжком" воды);

4) $v_1 > c_1 = \sqrt{gh_1}$, $v_2 < c_2 = \sqrt{gh_2}$ (см. задачу 8.265).

8.4. Ответы

8.1. $|x| < |y|$, $\xi = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, $\eta = y - \sqrt{y^2 - x^2}$, $u_{\xi, \eta} = 0$,
 $|x| > |y|$, $\xi = \ln|x|$, $\eta = \arcsin \frac{y}{x}$, $\Delta u = 0$.

8.2. $\xi = \sin x - y \cos x$, $\eta = \cos x + y \sin x$, $\Delta u + \frac{\xi u_{\xi} + \eta u_{\eta}}{\xi^2 + \eta^2 - 1} = 0$.

8.3. $\xi = \sin x - y$, $\eta = \cos x$, $\Delta u + \frac{\xi u_{\xi} + \eta u_{\eta}}{\eta^2 - 1} = 0$.

8.4. $\xi = x - y$, $\eta = ch y$, $\Delta u + \frac{\eta}{\eta^2 - 1} (u_{\xi} + u_{\eta}) = 0$.

8.5. $u_{\eta\eta} + \frac{u_{\xi}}{\xi - \eta} = 0$.

8.6. $\xi = x^2 ctg y$, $\eta = x$, $u_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\eta^2} u_{\xi} = 0$. Указание. Существует лишь одно характеристическое уравнение $x dy = \sin 2y dx$, общий интеграл которого

$tg y = Cx^2$. Уравнение принадлежит параболическому типу и преобразуется к каноническому виду посредством замены $\xi = x^2 ctg y$, $\eta = x$.

8.7. Решение. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши, $L \in \Omega$ — кусочно-гладкая линия, на которой заданы функции $u, \frac{\partial u}{\partial t}$, и параметрические уравнения которой $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$. На линии L определены и притом однозначно производные $u_x = p$, $u_y = q$. В самом деле, производные по направлениям $\mathbf{l} = \cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{j}$ и $\tau = \cos \beta \mathbf{i} + \sin \beta \mathbf{j}$, где τ — вектор, касательный к L , формируют систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial l} = p \cos \alpha + q \sin \alpha, \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} = p \cos \beta - q \sin \beta \end{cases}$$

относительно p и q , определитель которой $\sin(\beta - \alpha) \neq 0$. Вторые производные $u_{xx} = r$, $u_{xy} = s$, $u_{yy} = t$ (на L) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} ar + 2bs + ct = -\Phi, \\ \dot{x}r + \dot{y}s = \dot{p}, \\ \dot{x}s + \dot{y}t = \dot{q}, \end{cases}$$

где два последние уравнения получаются дифференцированием по τ (обозначено точкой) тождеств $p = p(x(\tau), y(\tau))$, $q = q(x(\tau), y(\tau))$. Если определитель Δ системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение (r, s, t) . При $\Delta \neq 0$ и при условии дифференцируемости функций a, b, c, Φ можно однозначно определить на L производные третьего порядка решения $u(x, t)$ и т.д. Например, система для r_x, s_x, t_x получается дифференцированием исходного уравнения (точнее тождества) по x , тождеств $r = r(x(\tau), y(\tau))$, $s = s(x(\tau), y(\tau))$, $t = t(x(\tau), y(\tau))$ по τ и с учетом соотношений $r_y = s_x$, $s_y = t_x$:

$$\begin{cases} ar_x + 2bs_x + ct_x = H, \\ \dot{x}r_x + \dot{y}s_x = \dot{r}, \\ \dot{x}s_x + \dot{y}t_x = \dot{s}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что можно построить по крайней мере приближенное решение (с помощью формулы Тейлора) задачи Коши в окрестности линии L . В противном случае, т.е. при $\Delta = 0$, система имеет бесконечное множество решений (она совместна, так как по предположению существует решение $u(x, t)$ задачи Коши). Линия L , обладающая подобным свойством, описывается уравнением

$$\Delta = ay^2 - 2d\dot{x}\dot{y} + c\dot{x}^2 = 0,$$

которое (при $a \neq 0$) эквивалентно уравнению (8.2).

8.9. 1) $u = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1} \partial y^{n-1}} \left[\frac{f(x)+g(y)}{x-y} \right]$; 2) $u = (x-y)^{m+n+1} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \left[\frac{f(x)+g(y)}{x-y} \right]$.

Указание. См. свойства оператора $\mathcal{E}(\alpha, \beta)$, сформулированные в задаче 8.8.

8.10. Указание. Волновому уравнению $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$ соответствуют два характеристические уравнения $dx/dt = \pm a$, общие интегралы которых $x \pm at = C_{1,2}$. Замена переменных $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ преобразует

волновое уравнение к каноническому виду $u_{\xi,\eta} = 0$, откуда в результате последовательного интегрирования $u_\eta = h(\xi)$ и $u = f(\xi) + g(\eta)$, так что общее решение волнового уравнения $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$.

8.11. Области зависимости решения, области влияния и определенности отрезка (они не заштрихованы) показаны на рис. 8.14а, 8.14б, 8.14с в случае 1); на рис. 8.16а, 8.16б — в случае 2) Наклонные прямые — характеристики

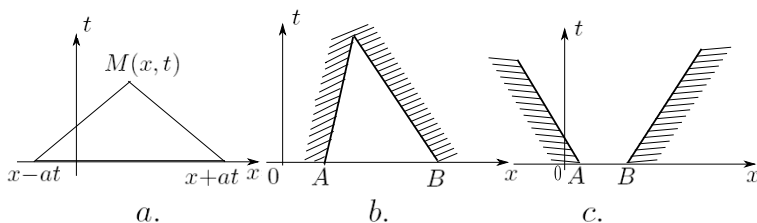


Рис. 8.14

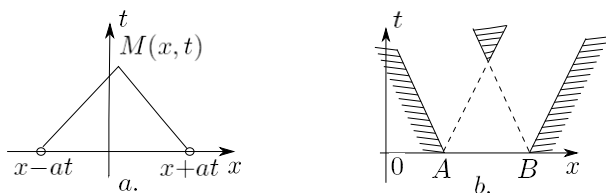


Рис. 8.15

семейств $x - at = C_1$, $x + at = C_2$. Указание. Множество точек области зависимости является дополнением до $\mathbf{R}$ множества точек, изменение начальных данных в которых не влияет на решение $u(x, t)$ в точке $M(x, t)$; область влияния состоит из точек, области зависимости решения в которых пересекаются с отрезком $[A; B]$.

8.12. $u(x, t) = e^{-\gamma t} v(x, t)$, $v(x, t)$ — решение задачи 8.10.

8.13. $u(x, y) = (3x^2 + \ln^2 y) \ln y$. **8.14.** $u(x, y) = 1 + (1 - \ln x + y)^2 - \frac{2(1 + \ln x + y)}{x^2}$.

8.15. $u(x, y) = \frac{1}{2} [u_0(xy) + u_0(\frac{y}{x})] + \frac{1}{2} \int_{\frac{y}{x}}^{xy} u_1(\xi) \frac{d\xi}{\xi}$. **8.16.** $u(x, y) = \sqrt{2} e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sh} \frac{y}{\sqrt{2}}$.

8.17. $u(x, y) = \sqrt{y} - \sqrt{x} + e^{2(1 - \sqrt{x})}$. **8.18.** $u(x, y) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{-xy}}$.

8.19. $u(x, y) = e^{\sin x + y}$. **8.20.** $u(x, y) = 4x + y - y^2$. **8.21.** $u(x, y) = 2xe^{-\frac{x^2 + y^2}{4}}$.

$$8.22. \quad u(x, t) = \frac{F_0}{2a\rho} \left[\left(t - \frac{|x|}{a} \right) \eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right) - \left(t - t_0 - \frac{|x|}{a} \right) \eta \left(t - t_0 - \frac{|x|}{a} \right) \right].$$

$$u(x, t_1) = \frac{F_0}{2a\rho} \begin{cases} t_1 - \frac{|x|}{a}, & |x| < at_1, \\ 0, & at_1 < |x|, \end{cases}$$

$$u(x, t_2) = \frac{F_0}{2a\rho} \begin{cases} t_0, & |x| < a(t_2 - t_0), \\ t_2 - \frac{|x|}{a}, & a(t_2 - t_0) < |x| < at_2, \\ 0, & at_2 < |x|, \end{cases}$$

$$u(0, t) = \frac{F_0}{2a\rho} \begin{cases} t, & 0 \leq t < t_0, \\ t_0, & t_0 \leq t, \end{cases}$$

$$8.23. \quad u(x, t) = \frac{F_0}{2a\rho\omega} \left[1 - \cos \omega \left(t - \frac{|x|}{a} \right) \right] \cdot \left[\eta \left(t - \frac{|x|}{a} \right) - \eta \left(t - t_0 - \frac{|x|}{a} \right) \right].$$

$$u(x, \frac{\pi}{\omega}) = \frac{F_0}{2a\omega\rho} \begin{cases} 1 + \cos \frac{\omega x}{a}, & |x| < \frac{\pi}{\omega}, \\ 0, & \frac{\pi a}{\omega} < |x|, \end{cases}$$

$$u(x, \frac{3\pi}{\omega}) = \frac{F_0}{2a\omega\rho} \begin{cases} 0, & |x| < \frac{\pi a}{\omega}, \\ 1 + \cos \frac{\omega x}{a}, & \frac{\pi a}{\omega} < |x| < \frac{3\pi a}{\omega}, \\ 0, & \frac{3\pi a}{\omega} < |x|, \end{cases}$$

$$u(0, t) = \frac{F_0}{2a\omega\rho} \begin{cases} 1 - \cos \omega t, & 0 \leq t < \frac{2\pi}{\omega}, \\ 0, & \frac{2\pi}{\omega} < t, \end{cases}$$

$$8.24. \quad u(x, t) = \frac{1}{2a\rho} \left[\int_{\frac{at+x}{a+v_0}}^{\frac{at-x}{a-v_0}} F(\tau) d\tau \cdot \eta(x - v_0 t) + \int_0^{\frac{at+x}{a+v_0}} F(\tau) d\tau \cdot \eta(x + at) \right] - \\ - \frac{1}{2a\rho} \int_0^{\frac{at-x}{a-v_0}} F(\tau) d\tau \cdot \eta(x - at).$$

Решение. На единицу длины струны действует сила $F(t) \delta(x - vt) \mathbf{e}_u$. Функция $u(x, t)$ является решением задачи Коши

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{F(t)}{\rho} \delta(x - vt), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t,$$

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0,$$

рассмотренной в примере 8.3. В силу формулы 8.9

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\rho} \int_0^t F(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \delta(\xi - v\tau) d\xi.$$

Замена переменной $\eta = \xi - v\tau$ (во внутреннем интеграле) преобразует интеграл к виду:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\rho} \int_0^t F(\tau) d\tau \int_{x-a(t-\tau)-v\tau}^{x+a(t-\tau)-v\tau} \delta(\eta) d\eta.$$

Область интегрирования на плоскости $\eta 0 \tau$ — треугольник, ограниченный прямыми $\eta = 0$, $\eta = x - at + (a - v)\tau$, $\eta = x + at - (a + v)\tau$; координаты

вершины, не лежащей на оси 0η , равны $\eta = x - vt$, $\tau = t$, а две другие вершины треугольника расположены на оси 0η и их абсциссы равны $x - at$, $x + at$.

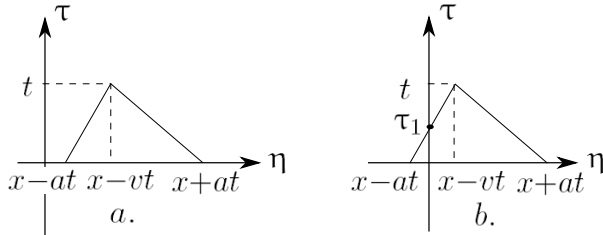


Рис. 8.16

Если $x - at > 0$ (рис. 8.16a), то носитель δ -функции не принадлежит промежутку $(x - a(t - \tau) - v\tau, x + a(t - \tau) - vt)$, поэтому $u(x, t) = 0$. Если $x - at < 0$, а $x - vt > 0$ (рис. 8.16b), то внутренний интеграл равен нулю при $\tau > \tau_1 = \frac{at-x}{a-v}$, следовательно, Вычисление интеграла в остальных случаях проводится аналогично.

$$8.25. \quad u(x, t) = \frac{F_0}{2\alpha a \rho} \cdot \begin{cases} 1 - e^{-\alpha \frac{at-x}{a-v_0}}, & v_0 t \leq x \leq at, \\ 1 - e^{-\alpha \frac{at+x}{a+v_0}}, & -at \leq x \leq v_0 t, \\ 0, & at \leq |x|. \end{cases}$$

$$8.26. \quad u(x, t) = \frac{F_0}{2a\rho\omega} \cdot \begin{cases} 1 - \cos \omega \frac{at-x}{a-v_0}, & v_0 t \leq x \leq at, \\ 1 - \cos \omega \frac{at+x}{a+v_0}, & -at \leq x \leq v_0 t, \\ 0, & at \leq |x|, \end{cases} \quad \omega_{1,2} = \frac{a\omega}{a \mp v_0}.$$

$$8.27. \quad \psi(x, t) = -\frac{a}{2\rho_0} \cdot \begin{cases} \int_0^{\frac{at-x}{a-v_0}} q(\tau) d\tau, & v_0 t \leq x \leq at, \\ \int_0^{\frac{at+x}{a+v_0}} q(\tau) d\tau, & -at \leq x \leq v_0 t, \\ 0, & at \leq |x|, \end{cases} \quad a^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}.$$

$$8.28. \quad \psi(x, t) = u_0 a \sin \omega(t - \frac{x}{a}) \eta(t - \frac{x}{a}), \quad a^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}.$$

$$8.29. \quad u(x, t) = e^{-\sqrt{\frac{C}{L}} R x} E(t - x\sqrt{LC}) \eta(t - x\sqrt{LC}).$$

$$8.30. \quad Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{C_0} \sqrt{\frac{C}{L}} t}.$$

$$8.31. \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{GJK}} \int_0^{t-\frac{x}{a}} M(\tau) d\tau \eta(t - \frac{x}{a}). \quad \text{Указание. См. задачу 1.32.}$$

$$8.32. u(x, t) = \frac{h\omega u_0}{a^2 h^2 + \omega^2} \left[\omega e^{-h\alpha(t - \frac{x}{a})} - \omega \cos \omega(t - \frac{x}{a}) + h\alpha \sin \omega(t - \frac{x}{a}) \right].$$

Указание. См. задачу 1.32.

8.34. Отраженной волны не будет при $\alpha = \sqrt{E\rho}$.

$$8.35. u(x, t) = \frac{k\eta(t - \frac{x}{a})}{ma^2} \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \int_0^{x-at} \mu(t - \frac{x-\xi}{a}) \sin \alpha \xi e^{-\frac{\rho S}{2M}\xi} d\xi, \\ \int_0^{x-at} \mu(t - \frac{x-\xi}{a}) \xi e^{-\frac{\rho S}{2V}\xi} d\xi, \\ \frac{1}{\alpha} \int_0^{x-at} \mu(t - \frac{x-\xi}{a}) sh \beta \xi e^{-\frac{\rho S}{2M}\xi} d\xi, \end{cases}$$

где $k = \frac{E^2 S^2}{4Ma^2}$, $\alpha = \sqrt{\frac{k}{Ma^2} - (\frac{ES}{2Ma^2})^2}$ и $\beta = \sqrt{(\frac{ES}{2Ma^2})^2 - \frac{k}{Ma^2}}$, — вещественные величины.

$$8.36. u(x, t) = \frac{1}{2} [e^{t-x} \sin(x-t) + e^{x+t} \cos(x+t)] + e^{x-t} \eta(t-x).$$

$$8.37. u(x, t) = \begin{cases} e^{-x-t} \sin(x+t), & x-t \geq 0, \\ 2e^{-x+t} \sin(x-t) + e^{-x-t} \sin(x+t), & x-t < 0. \end{cases}$$

$$8.38. u(x, t) = (t-x) e^{x-t} \eta(t-x) + 2 \begin{cases} t(2x+1), & x-t \leq 0, \\ x(2t+1), & x-t < 0. \end{cases}$$

$$8.39. u(x, t) = \begin{cases} \sin(x+t), & x-t \geq 0, \\ \sin(x+t) + \sin(x-t), & x-t < 0. \end{cases}$$

$$8.40. u(x, t) = xe^{-t} + \begin{cases} 2xt, & x-t \geq 0, \\ x^2 + t^2 + \cos(x-t) - e^{x-t}, & x-t < 0. \end{cases}$$

$$8.41. u(x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{2}} ch \frac{t}{2}, & x-t \leq 0, \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{x+t}{2}} + \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-x} sh \frac{x-t}{2}, & x-t < 0 \end{cases}$$

$$8.42. u(x, t) = e^{-t} \begin{cases} e^{-x} ch t, & x-t \leq 0, \\ x-t + e^{-t} ch x, & x-t < 0 \end{cases}$$

$$8.43. u(x, t) = \begin{cases} e^{-x}(e^t - 1), & x \leq t, \\ e^{x-t} - e^{-x} - x + t, & x < t. \end{cases}$$

$$8.44. u(x, t) = \begin{cases} \sin(x+t), & x \geq t, \\ \frac{3}{2} \cos(x-t) + \frac{1}{2} \sin(x-t) + \sin(x+t) - \frac{3}{2} e^{x-t}, & x < t. \end{cases}$$

$$8.45. u(x, t) = \frac{1}{2} [erf(x+t) - erf(x-t)]; \text{ при } x-t \geq 0, \\ u(x, t) = \frac{1}{2} erf(x+t) + \frac{3}{2} erf(x-t) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} (1 - e^{x-t}) - 2e^{x-t} + \\ + \frac{1}{4} [erf(x-t + \frac{1}{2}) - erf \frac{1}{2}] \text{ при } x-t < 0.$$

$$8.46. u(x, t) = \begin{cases} x-t - \sin(x-t) - \sin(x+t), & x-t \geq 0, \\ -\sin(x+t) - \frac{1}{2} e^{x-t} - \frac{\sin(x-t) - \cos(x-t)}{2}, & x-t < 0. \end{cases}$$

$$8.47. u(x, t) = e^{-t} \sin x + \begin{cases} \frac{\cos(x-t) - \cos(x+t)}{2}, & x > t, \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cos(x+t) - \frac{1}{6} \cos(x-t), & x < t. \end{cases}$$

$$8.48. \quad u(x, t) = x \sin t \begin{cases} \frac{\cos(x-t) - \cos(x+t)}{2}, & x > t, \\ \frac{3}{7} - \frac{1}{2} \cos(x+t) + \frac{1}{14} \cos(x-t), & x < t. \end{cases}$$

$$8.49. \quad u(x, t) = \frac{(H-x+at)u_0(x-at) + (H-x-at)u_0(H-|H-x-at|)}{2(H-x)} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{H-|H-x-at|} \frac{H-\xi}{H-x} u_1(\xi) d\xi. \quad \text{Указание. Ввести функцию } v = \frac{u}{H-x}.$$

$$8.50. \quad u(r, t) = \begin{cases} \frac{(r-at)u_0(r-at) + (r+at)u_0(r+at)}{2r} + \frac{1}{2ar} \int_{r-at}^{r+at} \xi u_1(\xi) d\xi, & r - at \geq 0, \\ \frac{(at+r)u_0(at+r) + (r-at)u_0(at-r)}{2r} + \frac{1}{2ar} \int_{at-r}^{at+r} \xi u_1(\xi) d\xi, & r - at < 0. \end{cases}$$

$$\text{Частный случай: } u(r, t) = \begin{cases} \frac{e^{-\alpha r}}{r} (ch \alpha at - at sh \alpha at), & r - at \geq 0, \\ \frac{e^{\alpha t}}{r} (ch \alpha r + at sh \alpha r), & r - at < 0. \end{cases}$$

$$8.51. \quad \begin{aligned} \text{Отраженная волна} & \quad \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right) \eta\left(t + \frac{x}{a_1}\right), \\ \text{прошедшая волна} & \quad \frac{2a_2}{a_2 + a_1} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right) \eta\left(t - \frac{x}{a_2}\right). \end{aligned}$$

$$8.52. \quad r = \left(\frac{S_1 - S_2}{S_1 + S_2} \right)^2. \quad \text{Указание. Потенциал скоростей газа } u(x, t) \text{ является решением однородного волнового уравнения } u_{tt} = a^2 u_{xx} \text{ при } x \neq 0, \text{ откуда}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} f_1(x - at) + g_1(x + at), & x < 0, \\ f_2(x - at) + g_2(x + at), & x > 0. \end{cases}$$

Функция $u(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям $u(x, 0) = f(x)$, и $u_t(x, 0) = af'(x)$ и граничным условиям (условиям "сшивки"): в сечении $x=0$ давление и поток газа непрерывны. Плотность потока энергии в плоской звуковой волне равна ρV^3 , где V — скорость элемента газа (см. [42]).

$$8.53. \quad r = \frac{b_1 \sqrt{h_1} - b_2 \sqrt{h_2}}{b_1 \sqrt{h_1} + b_2 \sqrt{h_2}}.$$

$$8.54. \quad u(0, t) = h e^{-hat} \int_0^t f(\xi) e^{h\xi} d\xi, \quad h = \frac{2\rho}{m}.$$

$$8.55. \quad u(x, t) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha(x+at)} \int_0^{x+at} f(\xi) e^{\alpha\xi} d\xi \cdot \eta(x + at), \\ f(x + at) + \left[-f(at - x) + \alpha e^{-\alpha(at-x)} \int_0^{at-x} f(\xi) e^{\alpha\xi} d\xi \right] \eta(at - x), \end{cases}$$

$\alpha = \frac{\rho S}{M}$, первая строка соответствует $x > 0$, вторая — $x < 0$.

$$8.56. \quad u(x, t) = \frac{Ia^2}{2T_0 + \alpha a} \left(1 - e^{-\frac{2T_0 + \alpha a}{Ma^2}(at - |x|)} \right) \eta(|x| - at).$$

$$8.57. \quad u(r, t) = \frac{V_0 r_0^2}{r} \left[\frac{\omega r_0}{a} e^{-\frac{r_0 - r + at}{a}} - \sin \frac{\omega(r_0 - r + at)}{a} + \frac{\omega r_0}{a} \cos \frac{\omega(r_0 - r + at)}{a} \right] \frac{\eta(r_0 - r + at)}{1 + \frac{\omega^2 r_0^2}{a^2}}.$$

$$8.58. \quad u(x, t) = \frac{U_0(x-at) + U_0(x+at)}{2}, \quad u_0(x + 2l) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U_0(x) = \begin{cases} u_0(x), & 0 \leq x \leq l, \\ -u_0(-x), & -l \leq x \leq 0, \end{cases}, \quad u_0(x) = \frac{F_0}{2T} \left(\frac{l}{2} - \left| x - \frac{l}{2} \right| \right), \quad x \in [-l; l].$$

$$1. a) \quad u\left(\frac{l}{4}, t\right) = \frac{F_0}{2T} \begin{cases} \frac{l}{4}, & 0 \leq at \leq \frac{l}{4}, \\ \frac{l}{2} - at, & \frac{l}{4} \leq at \leq \frac{3l}{4}, \\ -\frac{l}{4}, & \frac{3l}{4} \leq at \leq \frac{5l}{4}, \\ at - \frac{3l}{2}, & \frac{5l}{4} \leq at \leq \frac{7l}{4}, \\ \frac{l}{4}, & \frac{7l}{4} \leq at \leq 2l. \end{cases} \quad u\left(\frac{l}{4}, t + \frac{2L}{a}\right) = u\left(\frac{l}{4}, t\right), \quad 0 \leq t.$$

$$1. b) \quad u\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{F_0}{2T} \begin{cases} \frac{l}{2} - at, & 0 \leq at \leq l, \\ at - \frac{3l}{2}, & l \leq at \leq 2l \end{cases} \quad u\left(\frac{l}{2}, t + \frac{2L}{a}\right) = u\left(\frac{l}{2}, t\right), \quad 0 \leq t.$$

$$2. a) \quad u\left(x, \frac{l}{8a}\right) = \frac{F_0}{2T} \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{3l}{8}, \\ \frac{3l}{8}, & \frac{3l}{8} \leq x \leq \frac{5l}{8}, \\ -\frac{l}{4}, & \frac{3l}{4} \leq at \leq \frac{5l}{4}, \\ l - x, & \frac{5l}{8} \leq x \leq l. \end{cases} \quad 2. b) \quad u\left(x, \frac{l}{2}\right) = 0.$$

$$8.59. \quad u(x, t) = \frac{U_0(x-at) + U_0(x+at)}{2}, \quad U_0(x+2l) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U_0(x) = \frac{4h^2}{l^2} x(l - |x|), \quad x \in [-l; l],$$

$$1. a) \quad u\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{4h^2}{l^2} \begin{cases} \frac{l^2}{4} - a^2 t^2, & 0 \leq at \leq \frac{l}{2}, \\ \left(\frac{l}{2} - at\right)\left(\frac{3l}{2} - at\right), & \frac{l}{2} \leq at \leq \frac{3l}{2}, \\ \left(at - \frac{3l}{2}\right)\left(\frac{5l}{2} - at\right), & \frac{3l}{2} \leq at \leq \frac{5l}{2}, \end{cases}$$

$$u\left(\frac{l}{2}, t + \frac{2l}{a}\right) = u\left(\frac{l}{2}, t\right), \quad 0 \leq t.$$

$$1. b) \quad u\left(\frac{3l}{4}, t\right) = \frac{2h}{l^2} \begin{cases} \frac{3l^2}{8} - 2a^2 t^2, & 0 \leq at \leq \frac{l}{4}, \\ \frac{l^2}{2} - lat, & \frac{l}{4} \leq at \leq \frac{3l}{4}, \\ \frac{13l^2}{8} - 4lat + 2a^2 t^2, & \frac{3l}{4} \leq at \leq \frac{5l}{4}, \\ lat - \frac{3l^2}{2}, & \frac{5l}{4} \leq at \leq \frac{7l}{4}, \\ -2a^2 t^2 + 8lat - \frac{61l^2}{8}, & \frac{7l}{4} \leq at \leq 2l. \end{cases}$$

$$u\left(\frac{3l}{4}, t + \frac{2l}{a}\right) = u\left(\frac{3l}{4}, t\right), \quad 0 \leq t.$$

$$2. a) \quad u\left(x, \frac{l}{4a}\right) = \frac{2h}{l^2} \begin{cases} lx & 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ -2x^2 + 2lx - \frac{l^2}{8}, & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{3l}{4}, \\ l^2 - lx, & \frac{3l}{4} \leq x \leq l, \end{cases} \quad 2. b) \quad u\left(x, \frac{l}{2a}\right) = 0.$$

$$8.60. \quad u(x, t) = h \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi at}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$8.61. \quad u(x, t) = U_0(x+at) - U_0(x-at), \quad U_0(x+2l) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^{|x|} u_1(\xi) d\xi, \quad |x| \leq l.$$

$$8.62. \quad u(x, t) = \frac{v_0 l}{2\pi a} \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{2\pi at}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$8.63. \quad u(x, t) = \frac{U_0(x-at) + U_0(x+at)}{2}, \quad U_0(x+4l) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U_0(x) = \begin{cases} \tilde{u}_0(x), & 0 \leq x \leq 2l, \\ -\tilde{u}_0(-x), & -2l \leq x \leq 0, \end{cases}, \quad \tilde{u}_0(x) = \frac{F_0}{T} \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{l}{2}, & \frac{l}{2} \leq x \leq \frac{3l}{2}, \\ 2l - x, & \frac{3l}{2} \leq x \leq 2l. \end{cases}$$

$$1. a) u(\frac{l}{2}, t) = \frac{F_0}{2T} \begin{cases} l - at, & 0 \leq at \leq 2l, \\ at - 3l, & 2l \leq at \leq 4l, \end{cases}$$

$$u(\frac{l}{2}, t + \frac{4l}{a}) = u(\frac{l}{2}, t), \quad 0 \leq t.$$

$$1. b) u(\frac{l}{2}, t) = \frac{F_0}{2T} \begin{cases} l, & 0 \leq at \leq \frac{l}{2}, \\ 2(l - at), & \frac{l}{2} \leq at \leq \frac{3l}{2}, \\ -l, & \frac{3l}{2} \leq at \leq \frac{5l}{2}, \\ 2(at - 3l), & \frac{5l}{2} \leq at \leq \frac{7l}{2}, \\ l, & \frac{7l}{2} \leq at \leq 4l. \end{cases} \quad u(\frac{l}{2}, t + \frac{4l}{a}) = u(\frac{l}{2}, t), \quad 0 \leq t.$$

$$2. a) u(x, \frac{l}{2a}) = \frac{F_0 x}{2T}. \quad 2. b) u(x, \frac{3l}{4a}) = \frac{F_0}{2T} \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ x - \frac{l}{4}, & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{3l}{4}, \\ \frac{l}{2}, & \frac{3l}{4} \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$8.64. u(x, t) = U_0(x + at) - U_0(x - at), \quad U_0(x + 4l) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U_0(x) = \frac{1}{2a} \int_0^{|x|} u_1(\xi) d\xi, \quad |x| \leq 2l, \quad u_1(x) = \begin{cases} u_1(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u_1(2l - x), & l \leq x \leq 2l. \end{cases}$$

$$8.65. u(x, t) = \frac{U_0(x - at) + U_0(x + at)}{2}, \quad U_0(x + 4l) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U_0(x) = \begin{cases} \tilde{u}_0(x), & 0 \leq x \leq 2l, \\ -\tilde{u}_0(-x), & -2l \leq x \leq 0, \end{cases}, \quad \tilde{u}_0(x) = \begin{cases} u_0(x) & 0 \leq x \leq 2, \\ u_0(l - 2x), & l \leq x \leq 2l. \end{cases}$$

$$8.66. u(x, t) = h \sin \frac{\pi x}{2l} \sin \frac{\pi at}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$8.67. u(x, t) = \frac{2lv_0}{3\pi a} \sin \frac{3\pi x}{2l} \sin \frac{3\pi at}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$8.68. u(x, t) = \frac{U_0(x - at) + U_0(x + at)}{2} - \frac{gx(l - x)}{2a^2}, \quad U_0(x + 4l) = U_0(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

$$U_0(x) = \frac{gx(l - |x|)}{2a^2}, \quad |x| \leq l.$$

$$1. a) u(\frac{l}{2}, t) = -\frac{g}{2a^2} \begin{cases} a^2 t^2, & 0 \leq at \leq \frac{l}{4}, \\ -a^2 t^2 + 2lat - \frac{l^2}{2}, & \frac{l}{2} \leq at \leq \frac{3l}{2}, \\ a^2 t^2 - 4atl + 4l^2, & \frac{3l}{2} \leq at \leq 2l. \end{cases}$$

$$u(\frac{l}{2}, t + \frac{2l}{a}) = u(\frac{l}{2}, t), \quad 0 \leq t.$$

$$1. b) u(\frac{3l}{4}, t) = -\frac{g}{2a^2} \begin{cases} a^2 t^2, & 0 \leq at \leq \frac{l}{4}, \\ \frac{l}{2}(at - \frac{l}{8}), & \frac{l}{4} \leq at \leq \frac{3l}{4}, \\ -a^2 t^2 + 2lat - \frac{5l^2}{8}, & \frac{3l}{4} \leq at \leq \frac{5l}{4}, \\ \frac{l}{2}(\frac{15l}{8} - at), & \frac{5l}{4} \leq at \leq \frac{7l}{4}, \\ a^2 t^2 - 4lat + 4l^2, & \frac{7l}{4} \leq at \leq 2l. \end{cases}$$

$$u(\frac{l}{2}, t + \frac{2l}{a}) = u(\frac{l}{2}, t), \quad 0 \leq t.$$

$$2.a) u(x, \frac{l}{4a}) = \frac{g}{2a^2} \begin{cases} x(x - \frac{l}{2}), & 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ -\frac{l^2}{16}, & \frac{l}{4} \leq at \leq \frac{3l}{4}, \\ x^2 - \frac{3lx}{2} + \frac{l^2}{2}, & \frac{3l}{4} \leq x \leq 2l; \end{cases}$$

$$2.b) u(x, \frac{3l}{2a}) = -\frac{g}{2a^2} x(l-x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$8.69. 1) u(\frac{l}{2}, t) = \frac{F_0 l}{2\pi T} [(-1)^k - (2k+1) \cos \frac{\pi i a t}{l}], \quad \frac{kl}{q} \leq t \leq \frac{k+1}{a}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$2.a) u(x, \frac{l}{2a}) = \frac{F_0 l}{\pi T} (1 - |\cos \frac{\pi x}{l}|), \quad 0 \leq x \leq l; \quad 2.b) u(x, \frac{l}{a}) = \frac{F_0 l}{\pi T} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$8.70. u(x, t) = \frac{F_0 l}{2\pi a \rho} \begin{cases} \frac{\omega \sin \omega_1 t - \omega_1 \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_1^2}, & \omega \neq \omega_1 = \frac{2\pi a}{l}, \\ \frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega}, & \omega = \omega_1. \end{cases}$$

$$8.71. u(x, t) = \frac{2F_0 l}{\pi a \rho} \begin{cases} \frac{\omega \sin \omega_1 t - \omega_1 \sin \omega t}{\omega^2 - \omega_1^2}, & \omega \neq \omega_1 = \frac{\pi a}{2l}, \\ \frac{\sin \omega t - \omega t \cos \omega t}{2\omega}, & \omega = \omega_1. \end{cases}$$

$$8.72. 1) u(\frac{l}{2}, t) = \frac{F_0 l}{\pi T} [(-1)^k - (2k+1) \cos \frac{\pi a t}{2l}], \quad 2kl \leq at \leq 2(k+1)l, \quad k \in \mathbb{N};$$

$$2) u(x, \frac{4l}{\pi T}) \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ 1 - \cos(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2l} |\frac{l}{2} - x|), & \frac{l}{4} \leq x \leq \frac{3l}{4}, \\ 0, & \frac{3l}{4} \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$8.73. u(x, t) = v(x, t) - \frac{gx}{a^2} (l - \frac{x}{2}), \quad v(x, t) = \frac{V_0(x-at) + V_0(x+at)}{2},$$

$$V_0(x+4l, t) = V_0 * x, t), \quad V_0(x, t) = \frac{gx}{a^2} (l - \frac{|x|}{2}), \quad |x| \leq 2l.$$

$$8.74. u(x, \frac{l}{3a}) = A \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{2l}{3}, \\ x + \frac{1}{h}(1 + |hl|) (e^{-(\frac{2l}{3}-x)}), & \frac{2l}{3} \leq at \leq l. \end{cases}$$

$$8.75. u(x, \frac{3l}{4a}) = \frac{v_0}{a} \begin{cases} x + \frac{1}{h} - \frac{1}{h} e^{h(x-\frac{3l}{4})}, & 0 \leq x \leq \frac{l}{4}, \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{h} - \frac{1}{h} e^{h(x-\frac{3l}{4})}, & \frac{l}{4} \leq at \leq \frac{3l}{4}, \\ l-x, & l \leq \frac{3}{4} \leq at \leq l. \end{cases}$$

$$8.76. u(x, \frac{l}{2a}) = \frac{g}{2a^2} \begin{cases} \frac{plx}{1+p} - x^2, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \quad p = hl \\ \frac{(2+p)^2}{1+p} \frac{x}{h} - x^2 - \frac{2(2+p)}{h^2} + \frac{4}{h^2} e^{h(\frac{l}{2}-x)}, & \frac{l}{2} \leq x \leq l, \quad h = \frac{k}{T_0}. \end{cases}$$

Указание. Задача для неоднородного уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + g, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0,$$

заменой $u(x, t) = v(x, t) + w(x)$ сводится к задаче для однородного уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$$

$$v(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) + hv(l, t) = 0,$$

$$v(x, 0) = -w(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$

где $w(x) = -\frac{g}{2a^2} (x^2 + \frac{2+p}{1+p} lx)$. Решение задачи для $v(x, t)$, удовлетворяющее условию при $x = 0$, имеет вид

$$v(x, t) = f(at - x) - f(at + x).$$

Начальные условия выполняются, если

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}w(-x), & -l \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}w(x), & 0 \leq x < l. \end{cases}$$

Для решения данной задачи нужно продолжить $f(x)$ на промежутки $[l; 2l]$; закон продолжения определяется граничным условием при $x=l$;

$$f'(z) + hf(z) = -f'(z-2l) + hf(z-2l), \quad l \leq z \leq 2l,$$

откуда

$$f(z) = \frac{a}{2l} \left[(z-2l)^2 - (z-2l) \frac{4+2p-p^2}{h(1+p)} - \frac{2(p^2-2)}{h^2(1+p)} - \frac{4}{h^2} e^{h(l-z)} \right], \quad l \leq z \leq 2l.$$

Для определения постоянной интегрирования (в приведенном выражении для $f(z)$ эта константа уже определена) нужно использовать непрерывность $f(z)$ при $z=l$.

$$\mathbf{8.77.} \quad 1) u(x, \frac{3l}{5a}) = A \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{2l}{5}, \\ \frac{5\alpha ax + 2lT_0}{5(\alpha a + T_0)}, & \frac{2l}{5} \leq x \leq l. \end{cases}$$

$$2) u(x, \frac{5l}{7a}) = \frac{v_0}{2a} \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{2l}{7}, \\ \frac{7T_0x + 2\alpha al}{7(\alpha a + T_0)}, & \frac{2l}{7} \leq x \leq \frac{5l}{7}, \\ \frac{7\alpha a(l-x) + 5lT_0}{7(\alpha a + T_0)}, & \frac{5l}{7} \leq x \leq l. \end{cases}$$

Указание. Постановка задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= 0, \quad -T_0 u_x(l, t) - \alpha u_t(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= Ax, \quad u_t(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

Условию $u(0, t) = 0$ удовлетворяет функция $u(x, t) = f(at-x) + f(at+x)$, а из начальных условий следует, что $f(x) = -\frac{Ax}{2}$, $|x| \leq l$. Условие при $x=l$ запишется в виде $f'(l) = \frac{\alpha a - T_0}{\alpha a + T_0} f'(z-2l)$, $l \leq z \leq 2l$, откуда

$$f(z) = \frac{\alpha a - T_0}{\alpha a + T_0} f(z-2l) + C, \quad l \leq z \leq 2l.$$

Константа C определяется из условия непрерывности функции $f(z)$ при $z=l$. В итоге

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{Az}{2}, & |z| \leq l, \\ -\frac{A}{2} \frac{\alpha a - T_0}{\alpha a + T_0} (z-2l) - \frac{A\alpha al}{\alpha a + T_0}, & l \leq z \leq 2l. \end{cases}$$

2. Как и в предыдущем пункте с помощью аналогичных выкладок получаются выражения: $u(x, t) = f(at-x) + f(at+x)$,

$$f(z) = \begin{cases} -\frac{v_0|z|}{2a}, & |z| \leq l, \\ \frac{v_0}{2a} \frac{\alpha a - T_0}{\alpha a + T_0} (z-2l) - \frac{v_0 l T_0}{a(\alpha a + T_0)}, & l \leq z \leq 2l. \end{cases}$$

$$\mathbf{8.78.} \quad u(x, \frac{4l}{5a}) = A \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{5}, \\ x - \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha(\frac{l}{5})}\right), & \frac{l}{5} \leq x \leq l, \end{cases} \quad \alpha = \frac{\rho}{M},$$

Указание. Постановка задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= 0, \quad -T_0 u_x(l, t) = M u_{tt}(l, t), \\ u(x, 0) &= Ax, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Условию $u(0, t)=0$ удовлетворяет функция $u(x, t)=f(at-x)+f(at+x)$, а из начальных условий следует, что $f(x)=-\frac{Ax}{2}$, $|x|\leq l$. Условие при $x=l$ запишется в виде $f''z + \alpha f'(z)=f''(z-2l)-\alpha f'(z-2l)$, $l\leq z\leq 2l$, откуда

$$f(z)=C_1+C_2e^{-\alpha z}+\frac{Az}{2}, \quad l\leq z\leq 2l.$$

Непрерывность смещения струны при $x=l$: $C_1+C_2e^{-\alpha l}+\frac{Al}{2}=-\frac{Al}{2}$; непрерывность скорости $u_t(x, 0)=af'(-x)+af'(x)$ при $x=l$; $f'(-l)=f'(l)$, или $-\alpha C_2e^{-\alpha l}+\frac{A}{2}=-\frac{A}{2}$. В результате

$$f(z)=\begin{cases} -\frac{Az}{2}, & |z|\leq l, \\ \frac{A}{2}(z-2l)-\frac{A}{\alpha}(1-e^{-\alpha(l-z)}), & l\leq z\leq 2l. \end{cases}$$

8.79. $u(x, \frac{5l}{6\alpha}) = \frac{v_0}{a} \begin{cases} x, & 0\leq x\leq \frac{l}{6}, \\ x - \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha(\frac{l}{6}-x)}\right), & \frac{l}{6}\leq x\leq \frac{5l}{6}, \\ \frac{5l}{6} - \frac{1}{\alpha} \left(1 - e^{\alpha(\frac{l}{6}-x)}\right), & \frac{5l}{6}\leq x\leq l, \alpha = \frac{\rho}{M}. \end{cases}$

Указание. Так же, как и в предыдущей задаче, получаются соотношения: $u(x, t)=f(at-x)+f(at+x)$,

$$f(z)=\begin{cases} -\frac{v_0|z|}{2a}, & |z|\leq l, \\ -\frac{v_0z}{2a}+\frac{v_0}{\alpha a}\left(1-e^{\alpha(l-z)}\right), & l\leq z\leq 2l, \quad \alpha = \frac{\rho}{M}. \end{cases}$$

8.80. $u(x, t)=u_0\left[\eta(at-x)+\sum_{n=1}^{\infty}\eta(at+x-2nl)+\eta(at-x-2nl)\right]$, $u_0=\frac{U}{ma}$.

График дан на рис. 8.17

8.81. $u(x, t)=\frac{I}{a\rho S}\left\{\eta(at-x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[\eta(x+at-2nl)+\eta(at-x-2nl)]\right\}$.

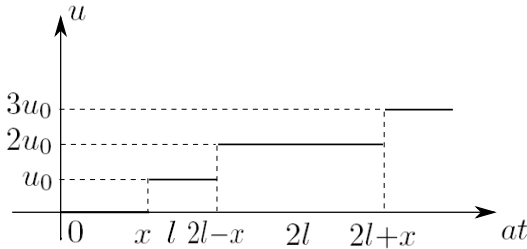


Рис. 8.17

8.82. Решение. Постановка задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & \quad 0 < t, \\ u_{tt}(0, t) &= \frac{\mu a^2}{l} u_x(0, t), & u_x(l, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, & u_t(x, 0) &= \begin{cases} v, & x = 0, \\ 0, & 0 < x < l. \end{cases} \end{aligned}$$

Общее решение волнового уравнения $u(x, t)=f(x+at)+g(x-at)$ (задача

8.22). Если $x = l$, то $f'(l - at) + g'(l + at) = 0$, $at \geq 0$, или $f'(x) + g'(2l - x) = 0$, $x \leq l$. Отсюда $f(x) = g(2l - x) + C$, поэтому $u(x, t) = g(2l - x + at) + g(x + at)$. Если ввести функцию $h(x) = f(x) + C/2$, то $u(x, t) = h(2l - x + at) + h(x + at)$. При $t = 0$, $0 < x \leq l$

$$\begin{cases} h(2l - x) + h(x) = 0 \\ ah'(2l - x) + ah'(x) = 0, \end{cases}$$

откуда $h(x) = C_1$, $h(2l - x) = -C_1$. Так как $h(l) = C_1 = -C_1$, то $C_1 = 0$. Полученный результат можно представить в форме

$$h(x) = 0, \quad 0 < x < 2l. \quad (8.89)$$

При $x = 0$

$$h''(2l + at) + h''(at) = -\frac{\mu}{l}h'(2l + at) + \frac{\mu}{l}h'(at)$$

или

$$h''(x) + \frac{\mu}{l}h'(x) = -h''(x - 2l) + \frac{\mu}{l}h'(x - 2l), \quad 2l < x. \quad (8.90)$$

Если $2l < x < 4l$, то в соответствии с (8.89) правая часть уравнения (8.90) равна нулю, поэтому

$$h'(x) = e^{-\frac{\mu x}{l}}.$$

Скорость сечения $x = 0$

$$u_t(0, t) = ah'(2l + at) + ah'(at). \quad (8.91)$$

При $t \rightarrow 0$ скорость $v = ah'(2l + 0) + ah'(+0)$. Так как согласно (8.90) $h'(+0) = 0$, то $C = \frac{v}{a} \exp(2\mu)$. Таким образом,

$$h'(x) = \frac{v}{a} e^{-\frac{\mu}{l}(x-2l)}, \quad 2l \leq x < 4l. \quad (8.92)$$

Если $4l < x < 6l$, то уравнение (8.90) примет вид

$$h'' + \frac{\mu}{l}h' = \frac{2\mu v}{al} e^{-\frac{\mu}{l}(x-4l)},$$

откуда

$$h' = \frac{2\mu v}{al} x e^{-\frac{\mu}{l}(x-4l)} + C e^{-\frac{\mu}{l}x} \quad (8.93)$$

Константа C определяется из условия непрерывности скорости (8.91) при $at = 2l$: $h'(2l - 0) + h'(4l - 0) = h'(2l + 0) + h'(4l + 0)$. В результате подстановки h' из выражений (8.89), (8.92), (8.93)

$$C = \frac{v}{a} e^{2\mu} - (1 + 8\mu) \frac{v}{a} e^{4\mu}.$$

Следовательно,

$$h' = \frac{v}{a} e^{-\frac{\mu}{l}(x-2l)} - \frac{v}{a} [1 - \frac{2\mu}{l}(x - 4l)] e^{-\frac{\mu}{l}(x-4l)}, \quad 4l \leq x < 6l.$$

Деформация $ESu_x(0, t) = ES[h'(at) - h'(2l + at)]$ элемента, примыкающего к сечению $x = 0$, в момент времени τ окончания взаимодействия меняет знак

с минуса на плюс. Если $at \in (0, 2l)$, то

$$u_x(0, t) = -\frac{v}{a} e^{-\frac{\mu}{l} at} < 0,$$

т.е. взаимодействие продолжается. Если $at \in (2l, 4l)$, то

$$u_x(0, t) = \frac{v}{a} e^{-\frac{\mu}{l}(at-2l)} [2 - e^{-2\mu} - \frac{2\mu}{l}(at-2l)]$$

меняет знак в точке

$$\tau = \frac{l}{2\mu a} (4\mu + 2 - e^{-2\mu})$$

при условии

$$2\frac{l}{a} < \frac{l}{2\mu a} (4\mu + 2 - e^{-2\mu}) < 4\frac{l}{a}.$$

Неравенство, связывающее два выражения слева, выполняется при любом μ , поэтому $\tau > 2l/a$. Второе неравенство удовлетворяется при $\mu \geq \mu_0$, где μ_0 — корень уравнения $2(1 - 2\mu) \exp(2\mu) = 1$ (существование и единственность корня μ_0 вытекает из монотонности левой части).

8.83. $\tau = \frac{l}{2\mu a} (4\mu + 2 + e^{-2\mu}) \in]\frac{2l}{a}, \frac{4l}{a}]$ при $\mu \geq \mu_0$, где μ_0 — корень уравнения $2 + e^{-2\mu} = 4\mu$.

8.84. $u(x, y) = x + \frac{1}{1-x^2} (e^{1-x^2y} - e^{1-x^2})$. **8.85.** $u(x, y) = y + \frac{e^{x(1-y)} - e^{1-y}}{1-y}$.

8.86. $u(x, y) = e^{-x} \left[e^{-y^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} x e^{-xy + \frac{x^2}{4}} \left(\operatorname{erf}\left(y - \frac{x}{2}\right) - \operatorname{erf}\left(1 - \frac{x}{2}\right) \right) \right]$.

Указание. Уравнение записать в виде: $(u_y + xu)_x + u_y + xu = 0$.

8.87. $u(x, y) = y - x + (x - y + 1)e^{\frac{y+x}{y-x}}$. **8.88.** $u(x, y) = x + \sqrt[4]{xy}$.

8.89. $u(x, y) = e^{1-xy - \sqrt{\frac{x}{y}}}$.

Указание. Посредством замены переменных $\xi = \frac{y}{x}$, $\eta = xy$ уравнение преобразуется к каноническому виду

$$\xi u_{\xi\xi} + \xi u_{\xi} + u_{\eta} + u = 0.$$

В результате интегрирования уравнения, записанного в форме

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\xi u_{\xi} + u) + \xi u_{\xi} + u = 0,$$

где $\xi u_{\xi} + u = \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi u)$, получается общее решение

$$u(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) e^{-xy} + \frac{xg(xy)}{y^3}.$$

8.90. $u(x, y) = \frac{y+x^2-x}{2x^2}$. **8.91.** $u(x, y) = x + y - \frac{y^3}{3}$.

8.92. $u(x, y) = u_1\left(\sqrt[5]{\frac{x^4}{y}}\right) + \frac{y}{x^4} [u_2(\sqrt[5]{xy}) - u_2(1)]$; $u(x, y) = 1 + \frac{y^2}{x^3}$. Указание.

Замена переменных $\xi = \frac{y}{x^4}$, $\eta = xy$ преобразует уравнение к каноническому виду $\xi u_{\xi} - u = 0$ общее решение которого,

$$u(x, y) = f_1\left(\frac{y}{x^4}\right) + \frac{y}{x^4} f_2(xy).$$

Из условий на характеристиках получается система

$$f_1(x) = u_1\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right) - x f_2(1),$$

$$f_2(x) = u_2(\sqrt[5]{x}) - f_1(1),$$

$$\text{при этом} \quad f_1(1) + f_2(1) = u_1(1).$$

8.93. $u(x, y) = \frac{e^{-y(x-y)} - e^{y-x}}{y+1}$.

8.94. $u(x, y) = \frac{e^{-y(x-y+1)}}{(x-y+1)^2}$. Решение. Замена переменных $\xi = x - y$, $\eta = y$ преобразует уравнение к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + \eta u_{\eta} - u = 0. \quad (8.94)$$

После дифференцирования по η для $v = u_{\eta\eta}$ получается линейное уравнение $v_{\xi} + \eta v = 0$, решение которого $v = f(\xi) e^{-\xi\eta}$; последующее интегрирование полученного выражения по η дает

$$u_{\eta} = \int_0^{\eta} f(\xi) e^{-s\xi} ds + g(\xi).$$

Чтобы найти u , нужно подставить производные u_{η} и $u_{\xi\eta}$ в уравнение (8.94); в переменных x, y

$$u(x, y) = \int_0^y f(s) (y - s) e^{-s(x-y)} ds + y g(x - y) + g'(x - y). \quad (8.95)$$

Функции f и g связаны условиями

$$\begin{cases} g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} \\ \int_0^x f(s) (x - s) ds + x g(0) + g'(0) = e^{-x}. \end{cases}$$

Решение первого уравнения $g(x) = -1/(x+1) + C$. Второе уравнение

$$\int_0^x f(s) (x - s) ds + x(C - 1) + 1 = e^{-x}$$

посредством интегрального преобразования Лапласа трансформируется в $F(p) = 1/(p+1) + C$. Так как $f(x)$ непрерывна при $x = 0$, то $C = 0$, т.е. $f(x) = e^{-x}$. Решение выражается формулой (8.95), в которую надо подставить найденные f и g .

8.95. $u(x, y) = 1 + 2e^{y-1} sh \sqrt{y^2 - x^2}$. **8.96.** $u(x, y) = e^{\frac{y-x}{x}} \ln xy + \sqrt{\frac{x}{y}} - 1$.

Указание. Уравнение приводится к каноническому виду $u_{\xi\eta} + u_{\xi} = 0$ посредством замены переменных $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$. Общее решение уравнения $u(x, y) = f(x, y) e^{-\frac{x}{y}} + g(\frac{x}{y})$ получается последовательным интегрированием по переменным ξ и η .

8.97. $u(x, y) = (1 - \sqrt{y^2 - x^2}) e^{-y + \sqrt{y^2 - x^2}}$. Указание. Посредством замены переменных $\xi = y + \sqrt{y^2 - x^2}$, $\eta = y - \sqrt{y^2 - x^2}$ уравнение преобразуется к каноническому виду $\Delta u + (u_{\xi} - u_{\eta})/(\xi - \eta) = 0$. Общее решение этого уравнения (см. задачу 8.9)

$$u(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2} [f'(y + \sqrt{y^2 - x^2}) - g'(y - \sqrt{y^2 - x^2})] - f(y + \sqrt{y^2 - x^2}) - g(y - \sqrt{y^2 - x^2}).$$

Функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям на характеристиках, если выполня-

ются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} f(x) &= -g'(0)x - g(0) - 1 + x + Ax^2, \\ g(x) &= f'(1)(1-x) - f(1) - e^{-x} + B(1-x)^2, \\ A = -B &= f'(1) - g(0) - f(1) - 1 = \frac{1}{2}[f'(1) + g'(0) - 1]. \end{aligned}$$

$$\mathbf{8.98.} \quad u(x, y) = \frac{x+2y}{5} e^{\frac{y-2x}{5}} - \frac{2x-y}{10} e^{-\frac{4x+3y}{10}}.$$

$$\mathbf{8.99.} \quad u(x, y) = (x+y)(y-\cos x). \quad \mathbf{8.100.} \quad u(x, y) = \left[(x^{13} - 1)x^4 \sqrt[3]{xe^{\frac{11y^2}{12}}} + e^{2y^2} \right].$$

Указание. Посредством замены переменных $\xi = 16 \ln x - y^2$, $\eta = 4 \ln x - y^2$ уравнение преобразуется к каноническому виду

$$u_{\xi\eta} + u_{\xi} + u_{\eta} + u = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(u_{\eta} + u) + u_{\eta} + u = 0.$$

Отсюда в результате последовательного интегрирования по ξ и η получаются соотношения

$$u_{\eta} + u = C(\eta)e^{-\xi}, \quad u = f(\xi) + g(\eta)e^{-\xi},$$

где $f(\xi)$ и $g(\eta)$ — произвольные дифференцируемые функции. Таким образом, общее решение уравнения запишется в виде:

$$u(x, y) = f(16 \ln x - y^2)x^{-4}e^{y^2} + g(4 \ln x - y^2)x^{-16}e^{y^2}.$$

Условия на границе области определяют систему уравнений для неизвестных функций $f(x)$ и $g(x)$:

$$\begin{cases} f(t) + g(t) = e^{-t}, \\ f(t) + g(1)e^{-t} = e^{\frac{t}{12}}. \end{cases}$$

$$\mathbf{8.101.} \quad u(x, y) = y + \operatorname{cosec} x.$$

8.102. $u(x, y) = (x - y)^2(x + 2y)$. Решение. Функция $v = (x - y)^2u$ удовлетворяет уравнению $v_{xy} - (2v_x - v_y)/(x - y) = 0$, общее решение которого (задача 8.9)

$$v(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{f(x) + g(y)}{x - y} \right].$$

Следовательно,

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + g'(y)(x - y). \quad (8.96)$$

Условия для $u(x, y)$ запишутся в виде

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ f(x) + g(-x) + 2xg'(-x) = -4x^3, \end{cases}$$

откуда $f(x) = -g(x)$ и

$$2xg'(x) - g(x) + g(-x) = -4x^3. \quad (8.97)$$

Конструкция уравнения (8.97), в частности его правой части, подсказывает форму решения: $g(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + h(x)$. Подстановка $g(x)$ в

уравнение (8.97) превращает его в тождество, если $A = -1$, $B = 0$:

$$2xh'(x) - h(x) + h(-x) = 0. \quad (8.98)$$

Почленная сумма уравнений, полученных из (8.98) при $x = s$ и $x = -s$ равна $2s(h'(s) - h'(-s)) = 0$, откуда $h(-s) = -h(s) + C_1$. Теперь из (8.98) следует, что $h(x)$ удовлетворяет уравнению $xh'(x) - h(x) = -C_1/2$; общее решение этого уравнения $h(x)C_2x - C_1/2$. Таким образом, $g(x) = -x^3 + C_3x + D_1$ исчерпывает множество решений уравнения (8.97). Функции f и g определены; подстановка их в (8.96) дает решение задачи.

8.103. $u(x, y) = (x + y)^2$. Решение. Посредством замены $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = xy$ уравнение преобразуется к каноническому виду $u_{\xi\eta} = 0$, откуда общее решение $u(x, y) = f(x^2 + y^2) + g(xy)$. Условия на характеристиках приводят к системе

$$\begin{cases} f(x) + g(\frac{2x}{5}) = \frac{9x}{5}, \\ f(x) + g(\frac{3x}{10}) = \frac{8x}{5}, \end{cases}$$

из которой следует, что

$$g(x) - g(\frac{3x}{4}) = \frac{x}{2}. \quad (8.99)$$

Правая часть уравнения (8.99) — многочлен первой степени, поэтому решение имеет вид $g(x) = Ax + h(x)$. Подстановка $g(x)$ в уравнение (8.99) превращает его в тождество, если $A = 2$, $h(x) = h(\frac{3}{4}x)$. Из уравнения для $h(x)$ следует, что $h(x) = h(\frac{3}{4}x) = h((\frac{3}{4}x)^2) = \dots = h((\frac{3}{4}x)^n)$, $n \in \mathbf{N}$, откуда $h(x) = h(0)$. Итак, $g(x) = 2x + C$, $f(x) = x - C$, решение задачи $u(x, y) = x^2 + y^2 - C + 2xy + C = (x + y)^2$.

8.104 Решение. Замена $x = s - t$, $y = s + t$ приводит к задаче

$$\begin{aligned} v_{st} &= -f(s - t, s + t), \quad -\infty < s < \infty, \quad 0 < t, \\ v(s, 0) &= \varphi(s), \quad \lim_{s \rightarrow \infty} v(s, t) = 0, \end{aligned}$$

которая решается последовательным интегрированием уравнения по t

$$v_s = v_s(s, 0) - \int_0^t f(s - \beta, s + \beta) d\beta,$$

затем по s

$$v = \varphi(s) + \int_s^\infty d\alpha \int_0^t f(\alpha - \beta, \alpha + \beta) d\beta.$$

В переменных x, y

$$v(x, y) = \varphi(\frac{x+y}{2}) + \int_{\frac{x+y}{2}}^\infty d\alpha \int_0^{\frac{y-x}{2}} d\beta f(\alpha - \beta, \alpha + \beta).$$

Выражение (8.22) получается в результате линейной замены переменных $\alpha - \beta = \xi$, $\alpha + \beta = \eta$; якобиан преобразования переменных $J(\alpha, \beta) = 1/2$. Доказательство единственности решения. Если существуют два решения u_1

и u_2 , то их разность $u = u_1 - u_2$ удовлетворяет однородному уравнению и нулевым дополнительным условиям:

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x, x) = 0, \quad \lim_{x+y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0.$$

Решение $u(x, y) = f(y - x) + g(x + y)$ при условии $u(x, x) = f(0) + g(2x) = 0$ принимает вид $u(x, y) = f(y - x) - f(0)$. Пусть $y - x = C$; если $x + y \rightarrow \infty$, то $f(s) - f(0) = 0$, откуда $f(y - x) = f(0)$, т.е. $u(x, y) = 0$. **8.106.** Указание. Ввести переменные $2\xi = x + y$, $2\eta = y - x$ и перейти к эквивалентному интегральному уравнению, которое решать методом последовательных приближений.

8.107. Общее решение

$$u(x, t) = \int_0^{x-at} I_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x+at)(x-at-s)} \right) f'_1(s) ds + \\ + \int_0^{x+at} I_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x-at)(x+at-s)} \right) f'_2(s) ds + (f_1(0) + f_2(0)) I_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{x^2 - a^2 t^2} \right),$$

где $f_{1,2}(s)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Решение задачи Гурса

$$u(x, t) = \int_0^{\frac{1}{2}(x-at)} I_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x+at)(x-at-2s)} \right) F'_1(s) ds + \\ + \int_0^{\frac{1}{2}(x+at)} I_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x-at)(x+at-2s)} \right) F'_2(s) ds + F_1(0) I_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{x^2 - a^2 t^2} \right).$$

Указание. Привести уравнение к каноническому виду $4a^2 u_{\xi\eta} = c^2 u$, где $\xi = x - at$, $\eta = \xi + at$, и перейти к эквивалентному интегральному уравнению

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi d\alpha \int_0^\eta d\beta u(\alpha, \beta) + f_1(\xi) + f_2(\eta),$$

которое решать методом последовательных приближений.

8.108. Общее решение

$$u(x, t) = \int_0^{x-at} J_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x+at)(x-at-s)} \right) f'_1(s) ds + \\ + \int_0^{x+at} J_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x-at)(x+at-s)} \right) f'_2(s) ds + (f_1(0) + f_2(0)) J_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{x^2 - a^2 t^2} \right),$$

где $f_{1,2}(s)$ — произвольные непрерывно дифференцируемые функции. Решение задачи Гурса

$$u(x, t) = \int_0^{\frac{1}{2}(x-at)} J_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x+at)(x-at-2s)} \right) F'_1(s) ds + \\ + \int_0^{\frac{1}{2}(x+at)} J_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{(x-at)(x+at-2s)} \right) F'_2(s) ds + F_1(0) J_0 \left(\frac{c}{2a} \sqrt{x^2 - a^2 t^2} \right).$$

См. указание к предыдущей задаче.

8.109. Указание. Перейти к системе интегральных уравнений

$$\begin{cases} u = u_0 + \mathcal{K}_{12}u, \\ v = v_0 + \mathcal{K}_{21}v, \end{cases}$$

где $\mathcal{K}_{12} = \mathcal{K}_1 \cdot \mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_{21} = \mathcal{K}_2 \cdot \mathcal{K}_1$, $v_0 = \mathcal{K}_2 u_0$, $u_0 = -\frac{1}{2}q\left(\frac{x+y}{2}\right)$,

$$(\mathcal{K}_1 v)(x, y) = -\int_x^{\frac{x+y}{2}} q(\xi) v(\xi, x+y-\xi) d\xi,$$

$$(\mathcal{K}_2 u)(x, y) = -\int_x^\infty r(\eta) u(\eta, \eta-x+y) d\eta.$$

Для решения интегральных уравнений применить метод последовательных приближений.

8.110. $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt[4]{xy}} \left(\frac{\pi}{4} + \arctg \sqrt[4]{\frac{y}{x}} \right)$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = \frac{\sqrt{\xi+\sqrt{\eta}}}{\sqrt{x+\sqrt{\eta}}}$.

8.111. $u(x, y) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{y(x+y)} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{x+y}{2}}$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = e^{-\eta(\xi-x) - \frac{\eta^2-y^2}{2}}$.

8.112. $u(x, y) = \frac{1}{x^2} (e^{x(x-y)} + xy - 1)$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = e^{x(\eta-y)}$.

8.113. $u(x, y) = \frac{1}{x^3} [(xy^2 - 2x^2 + 2)e^{x(x-y^2)} + xy^2 - 2]$;

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; x, y) = [1 - (\xi - x)(\eta^2 - y^2)] e^{x(\eta^2 - y^2)}.$$

8.114. $u(x, y) = (\sqrt{x} + e^{-\frac{x}{y}}) e^y$;

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi_0}{\eta_0}} e^{-(\xi - \eta_0)}, \text{ где } \xi = \frac{x}{y}, \eta = y.$$

8.115. $u(x, y) = (x^2 + y) e^{x - \sqrt{x^2 + y}}$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{-(\xi - \xi_0) - \xi(\eta - \eta_0)}$,
 $\xi = x$, $\eta = x^2 + y$.

8.116. $u(x, y) = e^{x^2(y-1) + x^2 y^2 e^{-x^2 y(y-1)}}$;

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{\xi_0 \eta_0 - \xi \eta}, \quad \xi = x, \eta = y(x+1).$$

8.117. $u(x, y) = 1 - (x^2 - y^2)^2$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{(\xi + \eta)^2 - (\xi + \eta_0)^2}$,
 $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$.

8.118. $u(x, y) = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$;

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi + \eta}{\xi_0 + \eta_0}}, \quad \xi = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \eta = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

8.119. $u(x, y) = 1 + x^3 y^3 + x(y^3 + y^{-3})$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{\xi \eta}{\xi_0 \eta_0}$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

8.120. $u(x, y) = (e^y x) e^{-2x}$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{\xi - \eta_0}{\xi - \eta} e^{\xi - \xi_0}$, $\xi = x + e^y$, $\eta = x e^y$.

8.121. $u(x, y) = 2 \ln \frac{x}{x + \sqrt{y}}$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \frac{\xi + \eta}{\xi_0 + \eta}$, где $\xi = x + \sqrt{y}$,

$\eta = x - \sqrt{y}$. **8.122.** $u(x, y) = y e^{x^2 + 1}$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{\xi^2 - \xi_0^2}$,

$\xi = x^2 + y$, $\eta = x^2 - y$. **8.123.** $u(x, y) = 2e^{xy\sqrt{xy}-1}$;

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{-\xi_0(\eta - \eta_0)}, \quad \xi = x\sqrt{y}, \eta = \sqrt{xy}.$$

8.124. $u(x, y) = \frac{1}{x^2 y^2} e^{xy\sqrt{y}}$; $\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{\frac{\xi^2 - \xi_0^2}{\eta}}$, $\xi = xy$, $\eta = x\sqrt{y}$.

8.125. $u(x, y) = \frac{2\sqrt{x}}{3y} \left[\left(2 - \frac{2x}{y} - \frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}} \right) e^{\frac{\sqrt{y}}{x}(y\sqrt{y} - x\sqrt{x})} + 2\frac{x}{y^2} - \frac{x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}} \right]$;

$$\mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = e^{\eta_0(\xi - \xi_0)} [1 - (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)], \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{y}}, \eta = \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

$$\mathbf{8.126.} \quad u(x, y) = \ln tg \frac{x}{2} + y \sin x; \quad \mathcal{R}(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) = \sqrt{\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + \eta_0^2}}, \\ \xi = y \cos x, \eta = y \sin x.$$

$$\mathbf{8.127.} \quad u(x, t) = \frac{u_0(x-at) + u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) J_0\left(\frac{c}{a} \sqrt{(\xi-x)^2 - a^2 t^2}\right) d\xi - \\ - \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{(\xi-x)^2 - a^2 t^2}} J_1\left(\frac{c}{a} \sqrt{(\xi-x)^2 - a^2 t^2}\right) d\xi. \text{ Указание. Функцию Римана}$$

отыскивать в виде $\mathcal{R} = f(\sqrt{(\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)})$, где $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

$$\mathbf{8.128.} \quad u(x, t) = \frac{u_0(x-at) + u_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} u_1(\xi) I_0\left(\frac{c}{a} \sqrt{(\xi-x)^2 - a^2 t^2}\right) d\xi + \\ + \frac{ct}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \frac{u_0(\xi)}{\sqrt{(\xi-x)^2 - a^2 t^2}} I_1\left(\frac{c}{a} \sqrt{(\xi-x)^2 - a^2 t^2}\right) d\xi. \text{ См. указание к предыдущей}$$

задаче. **8.129.** Указание. См решение задачи 8.7. **8.130.** $u(x, y) = u_0(x - ay)$.

$$\mathbf{8.131.} \quad u(x, y) = e^y(x-1) + 1. \quad \mathbf{8.132.} \quad u(x, y) = e^{\frac{2}{3}y^2 - x^2}.$$

$$\mathbf{8.133.} \quad u(x, y) = x e^{\frac{\pi}{4} - \arctg y}. \quad \mathbf{8.134.} \quad u(x, y) = (x^2 + y^2 + y + \frac{1}{2})^2 e^{-4y} - \frac{1}{4}.$$

$$\mathbf{8.135.} \quad u(x, y) = [x^3 - 3(e^y - 1)]^{\frac{1}{3}}. \quad \mathbf{8.136.} \quad u(x, y) = \sqrt{\frac{y}{pi}} - erf x.$$

$$\mathbf{8.137.} \quad u(x, y) = sh x - \frac{y^2}{2} + \sqrt{\frac{y^4}{4} - y^2 sh x + ch^2 x}. \quad \mathbf{8.138.} \quad u(x, y) = \frac{sh x}{\sqrt{y^2 + 1}}.$$

$$\mathbf{8.139.} \quad u(x, y) = erf \frac{x}{\sqrt{y}}. \quad \mathbf{8.140.} \quad u(x, y) = y e^{-\frac{x}{y}}. \quad \mathbf{8.141.} \quad u(x, y) = \frac{x^2}{y^2} - 2 \ln y.$$

$$\mathbf{8.142.} \quad u(x, y) = x(y^2 + 3)^{\frac{3}{2}}. \quad \mathbf{8.143.} \quad u(x, y) = e^{-y^2} \sin(x - y).$$

$$\mathbf{8.144.} \quad u(x, y) = e^{-xy} Qs(x - t). \quad \mathbf{8.145.} \quad u(x, y) = e^{\frac{y^3}{3} - \frac{x^2 y^2}{2} - x^2 + 2y}.$$

$$\mathbf{8.146.} \quad u(x, y) = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 e^{-y} + \frac{y-1}{2}.$$

$$\mathbf{8.147.} \quad u(x, y) = (x - 2y)^2 e^y - 2y - x - xy - 4.$$

$$\mathbf{8.148.} \quad u(x, y) = y sh x + ch x. \quad \mathbf{8.149.} \quad u(x, y) = \frac{e^{\frac{7y}{3}}}{x^2 + e^{2y}}.$$

$$\mathbf{8.150.} \quad u(x, y) = x \sqrt{y} e^{x - \sqrt{y}}. \quad \mathbf{8.151.} \quad u(x, y) = \left(x - \frac{y^2}{2}\right)^3 e^{xy - \frac{y^3}{3}}.$$

$$\mathbf{8.152.} \quad u(x, y) = (x^2 + y^2) \left(\arctg \frac{y}{x} - \frac{\pi}{4}\right) - xy.$$

$$\mathbf{8.153.} \quad u(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2} + \arctg y. \quad \mathbf{8.154.} \quad u(x, y) = x^2 y^2 + xy + x \ln y + 1.$$

$$\mathbf{8.155.} \quad u(x, y) = \frac{(4x^2 - y^2)^2}{16}. \quad \mathbf{8.156.} \quad u(x, y) = \frac{2y}{y + x^2}.$$

$$\mathbf{8.157.} \quad u(x, y) = y - erf \frac{x}{y}. \quad \mathbf{8.158.} \quad u(x, y) = 1 + \sqrt[3]{x + y^2} - e^y.$$

$$\mathbf{8.159.} \quad u(x, y) = 1 - \frac{x^2}{2} + y. \quad \mathbf{8.160.} \quad u(x, y) = (x + y^2) e^{xy}.$$

$$\mathbf{8.161.} \quad u(x, y) = e^{x^2 y^2}. \quad \mathbf{8.162.} \quad u(x, y) = \sqrt{\sqrt{y}(x + \sqrt{y})}.$$

$$\mathbf{8.163.} \quad u(x, y) = \ln(1 + x + \sqrt{y}). \quad \mathbf{8.164.} \quad u(x, y) = \frac{x^2 + 1}{y^2 + 1}.$$

$$\mathbf{8.165.} \quad u(x, y) = \frac{2e^y}{1 + e^{2x}}. \quad \mathbf{8.166.} \quad u(x, y) = \frac{2x}{1 + e^y}. \quad \mathbf{8.167.} \quad u(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 + \ln y}}.$$

$$\mathbf{8.168.} \quad u(x, y) = 3x - 2y. \quad \mathbf{8.169.} \quad u(x, y) = \sqrt{x^2 + \sqrt{y^2 + 1}}.$$

$$\mathbf{8.170.} \quad u(x, y) = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \mathbf{8.171.} \quad u(x, y) = \frac{(1+x^2)e^{2\sqrt{y}}}{2(1+e^{2\sqrt{y}})}.$$

$$\mathbf{8.172.} \quad u(x, y) = \frac{2+x^2}{2(1+e^{x-y})}. \quad \mathbf{8.173.} \quad u(x, y) = \frac{x^2 y + 1}{x^2 + 1}.$$

$$\mathbf{8.174.} \quad u(x, y) = \frac{y(y - \sqrt{y^2 - 4x})}{2}. \quad \mathbf{8.175.} \quad u(x, y) = x\sqrt{y^2 + 16}.$$

$$\mathbf{8.176.} \quad u(x, y) = \sqrt{\frac{y}{x+1}}. \quad \mathbf{8.177.} \quad u(x, y) = \frac{6x^2 - 3y^2 + 4y^3}{6(2y+1)}.$$

$$\mathbf{8.178.} \quad u(x, y) = \frac{1-x^2+4y}{4(1+y)}. \quad \mathbf{8.179.} \quad u(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$\mathbf{8.180.} \quad u(x, t) = \frac{f(t - \frac{3\sqrt{k}(C_1 x + C_2)^{\frac{1}{3}}}{C_1}) + g(t + \frac{3\sqrt{k}(C_1 x + C_2)^{\frac{1}{3}}}{C_1})}{(C_1 + C_2)^{\frac{1}{3}}}, \text{ где } f \text{ и } g -$$

произвольные дифференцируемые функции. Указание. В результате факторизации

$$\begin{aligned} & \{ \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x} \mp (\frac{\partial}{\partial x}(C_1 x + C_2))^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3} C_1 (C_1 x + C_2)^{-\frac{1}{3}} \} \times \\ & \times \{ \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x} \pm (\frac{\partial}{\partial x}(C_1 x + C_2))^{\frac{2}{3}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3} C_1 (C_1 x + C_2)^{-\frac{1}{3}} \} \sigma = 0 \end{aligned}$$

нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка распадается на два квазилинейных уравнения первого порядка; общее решение каждого из этих уравнений можно найти методом характеристик, а линейная комбинация общих решений представляет собой общее решение исходного уравнения.

$$\mathbf{8.181.} \quad 1) t_k = \frac{1}{2}; \quad 2) t_k = 1. \quad \mathbf{8.182.} \quad 1) t_k = \frac{3\sqrt{3}}{8}; \quad 2) t_k = \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

$$\mathbf{8.183.} \quad u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x \leq u_1 t, \\ \frac{u_1 l + (u_2 - u_1)x}{l + (u_2 - u_1)t}, & u_1 t \leq x \leq l + u_2 t, \\ u_2, & l + u_2 t \leq x. \end{cases} \quad t_k = \frac{l}{u_1 - u_2}.$$

8.184. Если $u_1 > u_2$, то $t_k = 0$. Если $u_1 < u_2$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x \leq u_1 t, \\ \frac{x}{t}, & u_1 t \leq x \leq l + u_2 t, \\ u_2, & u_2 t \leq x; \end{cases} \quad t_k = \infty.$$

Указание. При $u_1 < u_2$ решение можно получить предельным переходом при $l \rightarrow 0$ в решении предыдущей задачи.

На рис. 8.18 дана (x, t) -диаграмма характеристик. **8.185.** Если $f'(u) > 0$, то

$$u(x, t) = \begin{cases} u_1, & x \leq f(u_1)t, \\ f^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & f(u_1)t \leq x \leq f(u_2)t, \\ u_2, & x \leq f(u_2)t, \end{cases}$$

$f^{-1}(x)$ — обратная функция для $f(x)$. Если $f'(u) < 0$, то непрерывного

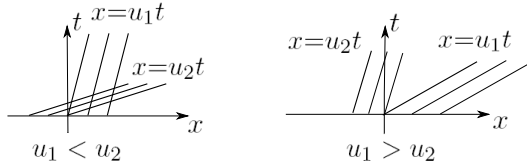


Рис. 8.18

$$8.186. \quad u(x, t) = \begin{cases} 0, & l \leq x, \\ \frac{u_0(l-x)}{l-\alpha u_0 t}, & \alpha u_0 t \leq x < l, \\ u_0, & x < \alpha u_0 t. \end{cases}$$

$$8.187. \quad \varphi'(x) < -\beta.$$

$$8.188. \quad u(x, t) = \begin{cases} 0, & l \leq x, \\ \frac{\beta u_0(l-x)e^{-\beta t}}{\beta l - u_0(1-e^{-\beta t})}, & l(1-\beta e^{-\beta t}) \leq x < l, \quad t_k = \frac{1}{\beta} \ln \frac{u_0}{u_0 - \beta k}, \\ u_0 e^{-\beta t}, & x < l(1-e^{-\beta t}), \end{cases}$$

График функции $u(x, t) = u(x, t_k)$ изображен на рис. 8.19.

$$8.189. \quad u(x, t) = \begin{cases} u_2, & u_2 t < x, \\ \frac{x}{t}, & u_1 t < x \leq u_2 t, \\ u_1, & vt < x \leq u_1 t, \end{cases}$$

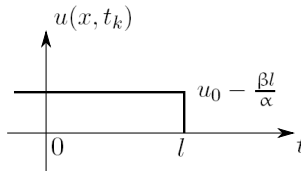


Рис. 8.19

$$8.190. \quad \begin{cases} u(x, t) = \mu(\tau), & x_k = \min\left(-\frac{1}{\mu'(\tau)}\right) = -\frac{1}{\mu'(\tau^*)}, \\ t = f'(\mu(\tau))x + \tau, & t_k = f'(\mu(\tau^*))x_k + \tau^*. \end{cases}$$

$$8.191. \quad u(x, t) = \begin{cases} 1, & (k+1)x < t, \\ \frac{1}{k}\left(\frac{t}{x} - 1\right), & x < t \leq (k+1)x, \\ 0, & t \leq x. \end{cases}$$

$$8.192. \quad u(x, t) = \begin{cases} u_2, & (ku_2 + m)t \leq x, \\ \frac{1}{k}\left(\frac{x}{t} - 1\right), & (ku_1 + m)t \leq x < (ku_2 + m)t, \\ u_1, & \forall t \leq x < (ku_1 + m)t; \end{cases}$$

решение непрерывно при любом t , если $\frac{V-m}{k} \leq u_1 < u_2$.

$$8.193. \quad u(x, t) = \begin{cases} u_1, & f(u_1)x \leq y, \\ f^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & f(u_2)x \leq y < f(u_1)x, \\ u_2, & -kx \leq y < f(u_1)x. \end{cases}$$

8.194. $\sigma(x, t) = \varphi(w(x, t))$, где $w(x, t)$ задана параметрически:

$$\begin{aligned} w(x, t) &= e^{-k(t-\tau)} \nu(t), \\ x &= \int_{\tau}^t \varphi'(\nu(\tau)) e^{-k(y-\tau)} dy; \quad t_k = \min \left\{ -\frac{1}{k} \ln \left[\frac{e^{-k\tau}}{\nu(\tau)} \Psi \left(\frac{\nu'(\tau) \varphi'(\nu(\tau))}{k\nu(\tau) + \nu'(\tau)} \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $\xi = \psi(\eta)$ — обратная функция для $\eta = \varphi'(\xi)$. Обозначения те же, что и в задаче 1.6. Указание. Задачу решать в полуплоскости, продолжив функцию $\mu(\tau)$ нулем на отрицательные значения t ; при таком продолжении начальное условие будет выполнено. Семейство характеристик определяется системой уравнений $\frac{dx}{dt} = \varphi'(w)$, $\frac{dw}{dt} = -kw$, $x(\tau) = 0$. Для определения момента времени t_k в интеграле для x сделать замену переменной по формуле $z = \nu(t) \exp(-k(y - \tau))$.

8.195. Функция $g(\xi, \tau)$ определяется параметрически:

$$\begin{aligned} g(\xi, \tau) &= \mu(\tau)_0, \quad \xi_k = \min \left(-\frac{1}{2B\mu'(\tau)}, \right. \\ \tau &= 2B\mu(\tau_0)\xi + \tau_0; \quad \tau_k = \tau^* - \frac{\mu(\tau^{ast})}{\mu'(\tau^{ast})}, \end{aligned}$$

$x_k = -\frac{1}{C} \ln \left(1 + \frac{C}{2B\mu'(\tau^{ast})} \right)$, $t_k = \tau^* - \frac{\mu(\tau^{ast})}{\mu'(\tau^{ast})} + \frac{C}{C} \ln \left(1 + \frac{C}{2B\mu'(\tau^{ast})} \right)$, где τ^* — точка минимума функции $-1/(2B\mu'(\tau))$. Указание. Задачу для определения функции $g(\xi, \tau)$ решать в полосе $(0; 1/C)$, продолжив функцию $\mu(\tau)$ нулем для $\tau < \frac{C}{2B} \ln(1 - \xi C)$; при таком продолжении выполняется условие при $t = 0$. Для определения характеристик получается задача Коши: $\frac{d\tau}{d\xi} = \mu(\tau_0)$, $\tau(0) = \tau_0$. Обозначения те же, что и в задаче 1.7.

8.196. $u(x, t) = \int_0^x u(\xi, t) d\xi + \mu(t)$, деформация определяется параметрически: $\varepsilon(x, t) = \nu(\tau)$, $t = x \sqrt{\frac{\rho}{b'(\nu(\tau))}}$, функция $\nu(t)$ задана неявно посредством уравнения $\mu'(t) + g'(\nu(\tau)) = \frac{1}{\rho} \int_0^t F(\tau) d\tau$. Указание. Уравнение для функции $u(x, t)$ не является квазилинейным, поэтому следует отыскивать деформацию $\varepsilon(x, t)$, для которой получается задача для квазилинейного уравнения:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sqrt{\frac{b'(t)}{\rho}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon(x, 0) = 0, \quad \varepsilon(0, t) = \nu(t).$$

$$8.197. \quad 1) \begin{cases} u_t + au_x + v_t + av_x = 0, \\ u_t - au_x - (v_t - av_x) = 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} r_{1t} + ar_{1x} = 0, & r_1 = u + v, \\ r_{2t} - ar_{2x} = 0, & r_2 = u - v. \end{cases}$$

$$8.199. \quad v = \frac{r+s}{2}, \quad c = \frac{\gamma-1}{4}(r-s), \quad \rho = \left[\frac{(\gamma-1)(r-s)}{4k} \right]^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad P = \frac{k^2}{\gamma} \left[\frac{(\gamma-1)(r-s)}{4k} \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}.$$

8.200. Решение. 2. Пусть $s = s_0$, тогда $v = (r + s_0)/2$ и $v_x = r_x/2$. При движении элемента газа по соответствующей траектории изменение плотности в зависимости от времени

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho_t + v\rho_x = \rho_t + (\rho v)_x - \rho v_x - \rho v_x = -\rho s_x/2.$$

3. Если $r = r_0$, то первое уравнение системы (8.29) удовлетворяется тождественно, а из второго следует, что характеристики — прямые линии. Пусть φ — угол наклона характеристики к оси $0x$, тогда

$$\frac{\partial}{\partial x} tg \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\beta r_0 + \alpha s} = -\frac{\alpha}{(\beta r_0 + \alpha s)^2}.$$

Следовательно, характеристики образуют расходящийся пучок при $s_x > 0$ и сходящийся пучок при $s_x < 0$. В последнем случае градиент функции $s(x, t)$ (значит, и всех гидродинамических величин) в некоторый момент $t_k > 0$ становится неограниченным (пример 8.10).

8.201. Характеристическая форма системы

$$h_1^k \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + h_2^k \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \lambda_k \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0,$$

или

$$h_1^k \left(\frac{dv_x}{dx} \right)_k + h_2^k \left(\frac{dv_y}{dx} \right)_k = 0, \quad (8.100)$$

$h_1^k = \lambda_k(v_x^2 - c^2)$, $h_2^k v_y^2 - c^2$, $k = 1, 2$, $\lambda_{1,2} = \frac{v_x v_y \pm c \sqrt{v^2 - c^2}}{v_x^2 - c^2}$. Решение. 3. Пусть θ и $\psi = \theta + \varphi$ — углы, образуемые линией тока и характеристикой с положительным направлением оси $0x$ (рис. 8.20). Тогда

$$tg \varphi = tg(\psi - \theta) = \frac{tg \psi - tg \theta}{1 + tg \psi tg \theta} = \frac{\lambda_{1,2} - v_y/v_x}{1 + \lambda_{1,2} v_y/v_x} \pm \frac{c}{\sqrt{v^2 - c^2}}.$$

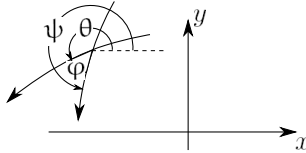


Рис. 8.20

Следовательно, $\sin \varphi = \pm c/v$. 4. Из соотношений (8.77), (8.76) вытекает, что дифференциалы dv_x , dv_y , $d\varphi$, $d\theta$ удовлетворяют уравнениям

$$dv_x = \cos \theta dv - v \sin \theta d\theta,$$

$$dv_y = \sin \theta dv + v \cos \theta d\theta,$$

$$dc = \sin \varphi dv + v \cos \varphi d\varphi, \quad dc = -\frac{(\gamma-1)v}{2c} dv.$$

Два последние соотношения устанавливают зависимость между dv и $d\varphi$:

$$dv = -v \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^2 \varphi + \frac{\gamma-1}{2}}. \quad (8.101)$$

Если ввести dv_x и dv_y в систему (8.100), то она примет форму

$$(h_2^k \sin \theta + h_1^k \cos \theta) \left(\frac{dv}{dx} \right)_k + (h_2^k \cos \theta - h_1^k \sin \theta) v \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

Следующий шаг — подстановка в полученные уравнения величин

$$h_1^{1,2} = tg(\theta \pm \varphi) \cos(\theta + \varphi) \cos(\theta - \varphi), \quad h_2^{1,2} = \sin(\theta + \varphi) \sin(\theta - \varphi),$$

что дает

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_k \mp v tg \varphi \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_k = 0, \quad k = 1, 2.$$

После исключения величины dv из найденных соотношений с помощью (8.101) получается система уравнений

$$\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \frac{\gamma-1}{2}} \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_k \pm \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_k = 0,$$

или

$$\left(\frac{dF}{dx}\right)_k \pm \left(\frac{d\theta}{dx}\right)_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

где

$$F(\varphi) = \int \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi + \frac{\gamma-1}{2}} d\varphi.$$

$$\mathbf{8.202.} \quad \begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial t} + \frac{3r_1+r_2}{4} \frac{\partial r_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} + \frac{r_1+3r_2}{4} \frac{\partial r_2}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad r_{1,2} = u \pm 2\sqrt{gh}.$$

$$\mathbf{8.203.} \quad \begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial t} + \frac{r_1+r_2+2}{2} \frac{\partial r_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial r_2}{\partial t} + \frac{r_2+r_2-2}{2} \frac{\partial r_2}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad r_{1,2} = v \pm \ln n.$$

8.204. Указание к п.3. Если $H = H(E)$, то линейная относительно производных $\frac{\partial E}{\partial t}$, $\frac{\partial E}{\partial x}$ система

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{dH}{dE} \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \\ \frac{dH}{dE} \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

совместна при условии (необходимом и достаточном) равенства нулю ее определителя $(\frac{dH}{dE})^2 - \varepsilon(E) = 0$. Для E получается квазилинейное уравнение $\frac{\partial E}{\partial t} \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(E)}} \frac{\partial E}{\partial x} = 0$.

$$\mathbf{8.206.} \quad u = 2x - 6t, \quad v = x - t + 1.$$

$$\mathbf{8.207.} \quad u = -2xt + 13t^2, \quad v = x^2 - 4xt - 4t^2.$$

$$\mathbf{8.208.} \quad u = 2x^2 - 16xt + 32t^2 + x - 19t, \quad v = -13x^2 + 104xt + 208t^2 + x - 10t.$$

$$\mathbf{8.209.} \quad u = -x + 120t, \quad v = 19x - 264t.$$

$$\mathbf{8.210.} \quad u(x, t) = x - 6t, \quad v(x, t) = -\frac{2}{3}(47t + 4x + 20).$$

$$\mathbf{8.211.} \quad u = 3x - 32t, \quad v = 5x - 46t. \quad \mathbf{8.212.} \quad u = e^{-t^2} sh x, \quad v = e^{-t^2} ch x.$$

$$\mathbf{8.213.} \quad u = 3x^2 - t^2, \quad v = 7x^2 - 11t^2.$$

$$\mathbf{8.214.} \quad u = \frac{x}{7} \left(4 + \frac{3}{2}t\right) + 4(2 - t), \quad v = \frac{x}{7}(20 - 3t) + 20(2 - t).$$

$$\mathbf{8.215.} \quad u = x - t^3 + 2, \quad \mathbf{8.216.} \quad u = \frac{x}{t} \left(3 + \frac{x}{t}\right) + (x - t^2 + 1)(1 - x + t^2), \\ v = x - t^3. \quad v = 2\frac{x}{t} \left(3 + \frac{x}{t}\right) - 3(x - t^2 + 1)(1 - x + t^2).$$

$$\mathbf{8.217.} \quad u = x^2 + t^2 + x^2 t^2 - 1, \quad \mathbf{8.218.} \quad u = 2x^2 + 2t^2 - 9xt - 2, \\ v = x^2 + t^2 - x^2 t^2 + 1. \quad v = 3(x - t)^2.$$

$$\mathbf{8.219.} \quad u = 2ch^2 x + (2sh t + 1)sh t, \quad v = (1 - 4cht)ch x.$$

$$\mathbf{8.220.} \quad u = ch(x+t)ch(x-t) + sh(x-t) - shx - cht, \quad v = shx + chx - sh(x+t).$$

$$\mathbf{8.221.} \quad u = sh^2(x^3 - t^3), \quad v = ch^2(x^3 - t^3).$$

$$8.222. \quad u = ch^2x + (sh t + 2)sh t, \quad v = ch x ch t - sh x.$$

$$8.223. \quad u = (x + 1)ch t - t sh t, \quad v = (x + 1)sh t ch t.$$

$$8.224. \quad u = \frac{6}{7}x^2(1 - e^{-7t}) + 2xe^{-2t}, \quad v = e^{-2t} - \frac{1}{7}x(4 + 3e^{-7t}).$$

Указание. Для инвариантов Римана $r_1 = u - 2xv$, $r_2 = u + 3xv$ получаются задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial r_2}{\partial t} + 5x \frac{\partial r_2}{\partial x} &= 3r_2 - 6x^2, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, & & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ r_1(x, 0) &= 2x^2, & r_2(x, 0) &= 5x - 3x^2. \end{aligned}$$

$$8.225. \quad u = x^2 - t^2, \quad v = 2(x - x^2 - 3t).$$

Указание. Для инвариантов Римана $r_1 = 3u - tv$, $r_2 = 2u + v$ получаются задачи:

$$\begin{aligned} (2t + 3) \frac{\partial r_1}{\partial t} - 2r_1 &= -3r_2, & \frac{\partial r_2}{\partial t} + (2t + 3) \frac{\partial r_2}{\partial x} &= 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, & & -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ r_1(x, 0) &= 3x^2, & r_2(x, 0) &= 2x. \end{aligned}$$

$$8.226. \quad u = 3x - 32t, \quad v = 5x - 46t.$$

$$8.227. \quad u = 2x^2 + 2t^2 - 9xt - 2, \quad v = 3(x - t)^2.$$

$$8.228. \quad u = \frac{xt(t+2)}{t+1} - x^2, \quad v = \frac{(t-x+1)t^2}{t+1}.$$

$$8.229. \quad u = \frac{x^4 - 5(x^2 + 1)t^2}{x^2 + t^2}, \quad v = \frac{(x^2 + 5(t^2 + 1))x^2}{x^2 + t^2}. \quad 8.230. \quad u = 1, \quad v = (x - t)^3.$$

$$8.231. \quad u = \frac{2x+t+3}{3(t+1)}, \quad v = \frac{(t-x)^2}{9(t+1)^2}. \quad 8.232. \quad u = \frac{1-x+t}{4(t+1)(t+2)}, \quad v = \frac{(3+4t)x-t-1}{2(t+1)(2t+1)}.$$

$$8.233. \quad u = \cos^2(x - \frac{t}{4}), \quad v = \sin^2(x - \frac{t}{4}).$$

$$8.234. \quad u = e^{\frac{x(x-3t)}{1+2t}}, \quad v = \frac{x(x-t+1)}{1+2t}. \quad 8.235. \quad u(xt) = \frac{2}{3} \frac{x-3}{2t+1}, \quad v(x, t) = \frac{2}{3} \frac{x+3}{2t+1}.$$

$$8.236. \quad u(xt) = \frac{x+1}{t^2+1}, \quad v(x, t) = \frac{x^2}{t^2+1}.$$

Указание. Задача на собственные значения для матрицы A

$$(h_1 \ h_2) \begin{pmatrix} t(u+v) - \lambda & t(u-v) \\ t(u-v) & t(u+v) - \lambda \end{pmatrix}$$

имеет два собственных значения $\lambda_1 = 2tu$ и $\lambda_2 = 2tv$ и соответствующие им собственные векторы $h^1 = (1 \ 1)$ и $h^2 = (1 \ -1)$. Инварианты Римана $r_1 = u + v$ и $r_2 = u - v$ являются решением задачи Коши для гиперболической системы уравнений

$$\begin{aligned} r_{1t} + t(r_1 + r_2)r_{1x} &= 0, \\ r_{2t} + (r_1 - r_2)r_{2x} &= 0, \\ r_1(x, 0) &= 2x + 1, \quad r_2(x, 0) = 1. \end{aligned}$$

$$8.237. \quad u = \frac{4(xt^2 + 2x + t)}{t^4 + 4}, \quad v = \frac{2(4x + t^2 + 2)}{t^4 + 4}. \quad 8.238. \quad u = \frac{3x + xt + t + 2}{(t+1)^2}, \quad v = \frac{x - xt - t}{(t+1)^2}.$$

$$8.239. \quad u = \frac{4xt + 6x + 8t + 2 + (2x-1)\sin t}{2(t+1)(2+\sin t)}, \quad v = \frac{4xt - 2x + 8t + 2 - (2x-1)\sin t}{2(t+1)(2+\sin t)}.$$

8.240. Указание. Разрешить систему относительно u_t и v_t :

$$\begin{aligned} u_t + (2u + v)u_x + (u + 2v)v_x &= 0, \\ v_t + (u + 2v)u_x + (2u + v)v_x &= 0. \end{aligned}$$

Собственные значения и (левые) собственные векторы матрицы системы

соответственно равны

$$\lambda_1 = 4(u+v), \quad h^1 = (1 \ 1), \quad \lambda_2 = u-v, \quad h^2 = (1 \ -1).$$

Инварианты Римана $r_1 = u+v$, $r_2 = u-v$ являются решением задачи Коши

$$\begin{aligned} r_{1t} + 3r_1 r_{1x} &= 0, \quad r_{2t} + r_2 r_{2x} = 0, \\ r_1(x, 0) &= 3x + 5, \quad r_2(x, 0) = x - 1. \end{aligned}$$

8.241. $u(x, t) = \frac{x}{1+2t}$, $v(x, t) = \frac{x-6t-3}{1+2t}$. Указание. Разрешить систему относительно u_t и v_t и ввести инварианты Римана $r_1 = u+v$, $r_2 = u-v$, задача Коши для которых имеет вид:

$$\begin{aligned} r_{1t} + (r_1 + r_2)r_{1x} &= 0, \\ r_{2t} + (r_1 - r_2)r_{2x} &= 0, \\ r_1(x, 0) &= 2x - 3, \quad r_2(x, 0) = 3. \end{aligned}$$

8.242. $u(x, t) = \frac{x(2+\ln t)}{t(1+\ln t)}$, $v(x, t) = \frac{x \ln t}{t(1+\ln t)}$. **8.243.** $u = \frac{2x+t+6}{2+t}$, $v = \frac{2(x+2t)}{2+t}$.

8.244. $u = \frac{x(\ln t + t + 1)}{t(\ln t + 1)}$, $v = \frac{x(t - \ln t - 1)}{t(\ln t + 1)}$. **8.245.** $u = \frac{2x+4xt+xt^2+4t}{1+t)(2+t^2)}$, $v = \frac{(1+x)}{2+t^2}$.

8.246. $u(x, t) = \frac{2(2x-3t)}{1+t^2}$, $v(x, t) = \frac{5x-9t}{1+t^2}$.

8.247. $u(x, t) = (3x+t+2)e^{-t}$, $v(x, t) = (3x-t+1)e^{-t}$.

8.248. $u(x, t) = \frac{4x-2\cos t+5}{8(1+t)}$, $v(x, t) = \frac{4x+2\cos t-1}{8(1+t)}$.

8.249. $u(x, t) = \frac{3x-t}{2(2\cosh t-1)}$, $v(x, t) = \frac{x-3t}{2(2\cosh t-1)}$.

8.250. $v(x, t) = \begin{cases} 0, & c_0 t \leq x, \\ \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), & -\frac{2c_0 t}{\gamma-1} \leq x \leq c_0 t. \end{cases}$

8.251. $v(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq c_0 t \leq x, \\ -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} at + c_0 - f(x, t) \right), & -\frac{at^2}{2} \leq x \leq c_0 t, \quad 0 \leq t \leq t_k, \\ -\frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} at + c_0 - f(x, t) \right), & \frac{2c_0^2}{a(\gamma-1)^2} - \frac{2c_0 t}{\gamma-1} \leq x \leq c_0 t, \quad t_k \leq t, \end{cases}$

где $f(x, t) = \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2} at + c_0\right)^2 - 2\gamma a(c_0 t - x)}$; $t_k = \frac{2c_0}{a(\gamma-1)}$, $v_k = -\frac{2c_0}{\gamma-1}$.
График скорости дан на рис 8.21.

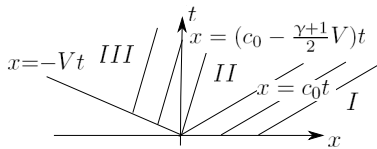


Рис. 8.21

Указание. Для определения скорости исключить t_0 из уравнений (8.82). Для вычисления t_k воспользоваться постоянством $s(x, t)$, т.е. $v - \frac{2c}{\gamma-1} = -\frac{2c_0}{\gamma-1}$, откуда $-v \leq \frac{2c_0}{\gamma-1}$, следовательно, максимальная скорость газа $2c_0/(\gamma-1)$.

8.252. Если $V < v_k$ где v_k — максимальная скорость газа, то

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & c_0 t \leq x, \\ \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), & (c_0 - \frac{\gamma+1}{2} t) \leq x \leq c_0 t, \\ -V, & -Vt \leq (c_0 - \frac{\gamma+1}{2} t). \end{cases} \quad (8.102)$$

Если $V \geq v_k$, то

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & c_0 t \leq x, \\ \frac{2}{\gamma+1} \left(\frac{x}{t} - c_0 \right), & -\frac{2c_0 t}{\gamma-1} \leq x \leq c_0 t. \end{cases}$$

Указание. Если $V < v_k$, то в областях I или III (рис ??) решение дается формулами (8.82). В области II уравнение характеристики $x = (\alpha r + \beta s_0)t$, где r принимает значения от $-2V - s_0$ до s_0 , следовательно,

$$r = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x}{t} - \beta s_0 \right), \quad -2V - s_0 \leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{x}{t} - \beta s_0 \right) \leq -s_0$$

(см. также задачу 8.192). При $V \geq v_k$ решение получается заменой V на v_k в формулах (8.102).

8.253.

$$v(x, t) = \begin{cases} 0, & c_0 t \leq x, \\ \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\gamma+1}{2} at - c_0 + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2} at - c_0 \right)^2 + 2\gamma a(c_0 t - x)} \right), & \frac{at}{2} \leq x \leq c_0 t; \end{cases}$$

ударная волна возникает на переднем фронте $x_k = c_0 t_k$ в момент времени $t_k = \frac{2c_0}{a(\gamma+1)}$. Указание. Значение t_k — корень уравнения $\frac{\partial x}{\partial v}|_{v=0} = 0$.

8.254. Ударная волна образуется между поршнем и передним фронтом в сечении $x_k = 2c_0 \frac{4\gamma+1}{3(\gamma+1)} \sqrt{\frac{2c_0}{a(3\gamma+1)}}$ в момент времени $t_k = \frac{1}{\gamma+1} \sqrt{\frac{2c_0(3\gamma+1)}{a}}$.

Указание. Условия возникновения ударной волны: $\frac{\partial x}{\partial v} = 0$, $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = 0$.

8.255. Решение. В r -волне Римана второй инвариант сохраняет постоянное значение; в данном случае $s = v - \frac{2c}{\gamma-1} \equiv -\frac{2c_0}{\gamma-1}$, откуда следует, что $c = c_0 + \frac{(\gamma-1)v}{2}$. Подстановка найденного выражения для c в первое уравнения системы (8.73) преобразует его к виду (8.83).

$$\begin{aligned} \mathbf{8.256.} \quad & v(x, t) = 0, & c_0 t \leq x, \\ & \begin{cases} v(x, t) = \mu(t_0), \\ x = (c_0 + \frac{\gamma+1}{2} \mu(t_0)) (t - t_0), \end{cases} & x \leq c_0 t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8.257.} \quad & x_k = t_k = 0, & 0 \leq n < 1, \\ & x_k = \frac{2c_0^2}{k(\gamma+1)}, \quad t_k = \frac{2c_0}{k(\gamma+1)}, & n = 1, \\ & \begin{cases} x_k = \frac{4c_0 n}{n^2-1} \left[\frac{2c_0(n-1)}{k(\gamma+1)(n+1)} \right]^{\frac{1}{n}}, \\ t_k = \left[\frac{c_0}{k(\gamma+1)} \right]^{\frac{1}{n}} \left(\frac{2c_0(n-1)}{k(\gamma+1)(n+1)} \right)^{\frac{n-1}{n}}, \end{cases} & n > 1. \end{aligned}$$

8.258. Указание. Переход к независимым переменным r и s осуществляется на базе гидродинамической системы, записанной в инвариантах (8.74).

На Γ_r — характеристике, уравнение которой $dx = (\alpha r + \beta s) dt$, инвариант Римана r сохраняет постоянное значение, поэтому вдоль Γ_r характеристики имеют место соотношения

$$dx(r, s) = x_r dr + x_s ds = x_s ds, \quad dt(r, s) = t_r dr + t_s ds = t_s ds.$$

Уравнение характеристики принимает форму: $x_s = (\alpha r + \beta s) t_s$. Аналогично преобразуется уравнение Γ_s — характеристики. Таким образом, функции $x(r, s)$ и $t(r, s)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= (\alpha r + \beta s) \frac{\partial t}{\partial s}, \\ \frac{\partial x}{\partial r} &= (\alpha s + \beta r) \frac{\partial t}{\partial r}. \end{aligned}$$

Если из этой системы исключить (посредством дифференцирования) $x(r, s)$, то для $t(r, s)$ получится уравнение Дарбу-Эйлера (задача 8.9 п.1):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r \partial s} - \frac{k}{r-s} \left(\frac{\partial t}{\partial r} - \frac{\partial t}{\partial s} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8.259.} \quad h(x, t) &= H(x_0), \quad u(x, t) = 2(\sqrt{gH(x_0)} - \sqrt{gh_0}), \\ x &= (3\sqrt{gH(x_0)} - 2\sqrt{gh_0})t + x_0, \quad t_k = -\frac{2}{3}\sqrt{H(x_k)/g}/H'(x_0), \end{aligned}$$

где x_k — точка, в которой $\sqrt{H(x)}/|H'(x)|$ имеет наибольшее значение.

$$\mathbf{8.260.} \quad h(x, t) = \begin{cases} h_0, & x \leq -\sqrt{gh_0}t, \\ \frac{1}{9g}(2\sqrt{gh_0} - \frac{x}{t})^2, & -\sqrt{gh_0}t \leq x \leq 2\sqrt{gh_0}t, \\ 0, & 2\sqrt{gh_0}t \leq x. \end{cases}$$

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x \leq -\sqrt{gh_0}t, \\ \frac{2}{3}(\sqrt{gh_0} + \frac{x}{t}), & -\sqrt{gh_0}t \leq x \leq 2\sqrt{gh_0}t, \end{cases}$$

$$u(0, t) = \frac{4}{9}gh_0, \quad h(0, t) = \frac{2}{3}\sqrt{gh_0}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8.261.} \quad \text{1 а)} \quad \theta(x, y) &= 0, \quad \varphi(x, y) = \varphi_0 \arcsin \frac{c_0}{v_0}, & x \operatorname{tg} \varphi_0 \leq y, \\ \theta(x, y) &= \theta_S, \quad \varphi(x, y) = \varphi_S, \\ y &= f(x_0) + (x - x_0) \operatorname{tg}(\theta_S + \varphi_S), & f(x) \leq y \leq x \operatorname{tg} \varphi_0, \\ \theta_S &= f', \\ F(\varphi_S) &= F(\varphi_0) + \theta_S, \end{aligned}$$

символ S указывает, что значение величины вычислено на поверхности S .

$$P_S = \begin{cases} P_0, & x \leq 0, \\ P_0 \left(\frac{2+(\gamma-1)\operatorname{cosec}^2 \varphi_0}{2+(\gamma-1)\operatorname{cosec}^2 \varphi_S} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, & 0 \leq x. \end{cases} \quad (8.103)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{1 б)} \quad \theta(x, y) &= 0, \quad \varphi(x, y) = \varphi_0, & x \operatorname{tg} \varphi_0 \leq y, \\ \theta(x, y) + \varphi(x, y) &= \arctg \frac{x}{y}, \\ F(\varphi) - \theta &= F(\varphi_0), & x \operatorname{tg}(\theta_S + \varphi_S) \leq y \leq x \operatorname{tg} \varphi_0, \\ \theta(x, y) &= \theta_1 = -\arctg k, \\ F(\varphi_1) &= F(\varphi_0) + \theta_1, & -kx \leq y \leq x \operatorname{tg}(\theta_1 + \varphi_1). \end{aligned}$$

Давление выражается формулой (8.103) при $\varphi_S = \varphi_1$.

Решение. 1 а) из уравнения $y' = tg(\theta - \varphi)$ характеристики Γ_2 (см.(8.78)) следует, что Γ_2 начинается в области, где поток однороден (рис. 8.13). На Γ_2 инвариант $r_2(x, y)$ сохраняет постоянное значение

$$r_2(x, y) = F(\varphi) - \theta = F(\varphi_0). \quad (8.104)$$

Так как $F(\varphi_0)$ от y не зависит, то $r_2(x, y) \equiv r_{20} = F(\varphi_0)$. Система (8.78), в которой второе уравнение удовлетворяется тождественно, определяет задачу для $r_1(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \lambda_1(r_1, r_{20}) \frac{\partial r_1}{\partial y}, \\ -\infty < x < \infty, \quad f(x) < y, \\ r_1(x, f(x)) = F(\varphi_0) - 2\theta_S, \\ tg \theta_S = f'. \end{aligned}$$

Поскольку инвариант $r_1(x, y)$ имеет постоянное значение на характеристике Γ_1 , то Γ_1 — прямая линия $y = (x - x_0) tg(\theta_S - \varphi_S) + f(x_0)$, где θ_S дано соотношением (8.104)

$$F(\varphi_S) = F(\varphi_0) + \theta_S. \quad (8.105)$$

Итак, $r_1(x, y) = F(\varphi_0) + 2\theta_S$, $y = (x - x_0) tg(\theta_S - \varphi_S) + f(x_0)$, $-\infty < x_0 < \infty$. Теперь нужно применить формулы $\theta(x, y) = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)$, $F(\varphi) = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Выражение для давления есть следствие двух формул:

$$c^2 = c_0^2 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

которая получается из (1.161) в результате исключения ρ с помощью уравнения адиабаты $P/P_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$, и формулы

$$\frac{c^2}{2} \operatorname{cosec}^2 \varphi + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{c_0^2}{2} \operatorname{cosec}^2 \varphi_0 + \frac{c_0^2}{\gamma-1},$$

вытекающей из (8.76) и $\varphi = \arcsin \frac{c}{v}$.

Указание к п.2. Функция φ_S , заданная выражением (8.105), монотонно зависит от θ_S : $\frac{d\varphi_S}{d\theta_S} \frac{2 \sin^2 \varphi_S}{\gamma + \cos 2\varphi_S} > 0$. **8.262.** Да. Указание. См. задачу 8.202.

8.263. $u(x, t) = \begin{cases} u_0, & lt_k, \\ 0, & Ut < x, \end{cases} \quad U = \frac{\alpha u_0}{2}$. Указание. Записать закон сохранения числа машин в форме (8.85).

8.264. $u(x, t) = \begin{cases} u_2, & 0 < x < Ut, \\ 0, & Ut < x, \end{cases} \quad U = \frac{q(u_2) - q(u_1)}{u_2 - u_1}$.

Указание. Смешанную задачу свести к задаче Коши с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_2, & x < 0, \\ u_1, & 0 < x. \end{cases}$$

8.265. Указания. 1. Исключить v_1 и v_2 из условий (8.86). 2. Энтропия идеального газа $S = c_V \ln(P/\rho^\gamma)$. При движении ударной волны газ перемещается из области 1 в область 2, что приводит к возрастанию энтропии,

т.е. $S_2 - S_1 > 0$. Неравенство $\rho_2 > \rho_1$ вытекает из положительности производной $\partial(S_2 - S_1)/\partial z$, а неравенство $P_2 > P_1$ — из (8.87). 4. Использовать соотношения

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{2(1 - M_2^2)}{(\gamma + 1)M_2} = \frac{2(M_1^2 - 1)}{2 + (\gamma - 1)M_1^2},$$

которые следуют из условий (8.87), где $M = \frac{v}{c}$ — число Маха.

8.266.

$$x = Ut, \quad U = \frac{\gamma + 1}{4}V + \sqrt{c_1^2 + \left(\frac{\gamma + 1}{4}V\right)^2},$$

$$P(x, t) = \begin{cases} P_1 \left(1 + \frac{\gamma(\gamma + 1)V^2}{4c_1^2} + \frac{\gamma V}{c_1} \sqrt{1 + \left(\frac{(\gamma + 1)V}{4c_1}\right)^2}\right), & 0 < x < Ut, \\ P_2, & Ut < x. \end{cases}$$

Указание. Скорость газа между поршнем и ударной волной равна скорости поршня. **8.267.** Указания. 1. Плотность потоков массы ρu и импульса $P + \rho u^2$ (см. пример 8.15) проинтегрировать по z от 0 до h . 2. Энергия

$$w = \int_0^h \left(\frac{\rho u^2}{2} + \rho g z \right) dz = \frac{\rho u^2 h}{2} + \frac{\rho g h^2}{2};$$

преобразование производной w_t с помощью уравнений (8.79) дает

$$q_w = \rho u \left(\frac{u^2 h}{2} + g h^2 \right).$$

3. Перемещение жидкости из области 1 в область 2 сопровождается потерей энергии. 4. Из условий (8.88) следует, что

$$v_1^2 = \frac{gh_2}{2h_1}(h_1 + h_2), \quad v_2^2 = \frac{gh_1}{2h_2}(h_1 + h_2).$$

Глава 9

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Применение линейных уравнений для моделирования физических явлений возможно лишь при условии малости физических параметров. В реальных процессах эти условия не выполняются, поэтому многие явления (например, ударная волна в газе, нелинейные волны на поверхности воды, распространение лазерного излучения и др.) не укладываются в рамки линейной теории. Для решения прикладных задач необходимо разрабатывать более сложные модели, включающие нелинейные эффекты. Среди нелинейных уравнений, встречающихся в математической физике, следует выделить уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (9.1)$$

модифицированное уравнение КдФ (мКдФ)

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0, \quad (9.2)$$

нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$iu_t + u_{xx} + 2u|u|^2 = 0, \quad (9.3)$$

уравнение *sin*-Гордон (СГ)

$$u_{xt} = \sin u. \quad (9.4)$$

Решить задачу математической физики — значит найти решение уравнения при дополнительных условиях (начальных, граничных). Такое решение можно извлечь из общего решения уравнения, однако найти общее решение нелинейного уравнения удастся лишь в редких случаях.

В 1967 г. был открыт метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза, известный как метод обратной задачи рассеяния (МОЗР). Это открытие послужило началом интенсивного изучения нелинейных уравнений. МОЗР был распространен на уравнения МКдФ, СГ, НУШ и другие уравнения.

Этот метод не является универсальным, поэтому для исследования нелинейных эффектов в физических процессах и для изучения свойств уравнений используются частные решения (т.е. решения уравнений без каких-либо условий), называемые точными решениями. Особый интерес как с практической, так и с теоретической точки зрения представляют точные решения приведенных выше нелинейных уравнений, называемые солитонами. Солитон — это уединенная нелинейная волна, распространяющаяся без изменения формы с постоянной скоростью; при взаимодействии солитонов их форма и скорость не изменяются (упругое взаимодействие). Наряду с МОЗР были разработаны другие методы построения солитонных решений различных нелинейных уравнений. Изложение теории солитонов имеется в книгах [1],[16],[22],[24],[48],[?].

В последнем параграфе этой главы рассмотрены некоторые из наиболее простых методов отыскания точных решений нелинейных уравнений. Задачи для демонстрации методов взяты из

справочников [55],[54], по нелинейным уравнениям математической физики. Более полное представление о методах решения нелинейных уравнений дают монографии [?],[37],[38],[56]. **Литература к главе:** [1], [37], [38], [56], [48].

9.1. Метод обратной задачи рассеяния

Пример 9.1. В теории рассеяния применяются решения Йоста уравнения Шредингера (задача 6.317). Каждое из решений Йоста существует и единственно. Эти свойства устанавливаются с помощью интегральных уравнений (6.48). Для доказательства вводится новая функция $\chi^+(x, k) = f^+(x, k) \exp(-ikx)$, удовлетворяющая уравнению (оно получается подстановкой $f^+ = \chi \exp(ikx)$ в (6.48))

$$\chi^+(x, k) = 1 + \int_x^\infty \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik} u(\xi) \chi^+(\xi, k) d\xi, \quad (9.5)$$

или в операторной форме

$$\chi^+ = 1 + \mathcal{K} \chi^+.$$

Оператор $\mathcal{K}$ определен на множестве $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ функций $v(x, k)$, непрерывных и ограниченных на промежутке $\overline{H} = \{x | h \leq x\}$ при каждом $k \in \{k | \operatorname{Im} k \geq 0\}$ и при любом h . Последовательность функций сходится в смысле (8.28), где $\|v\| = \max_{\overline{H}} |v|$.

Если $\xi \geq x$, $\operatorname{Im} k \geq 0$, то

$$|K(\xi, x, k)| = \left| \frac{e^{2ik(\xi-x)} - 1}{2ik(\xi-x)} \right| (\xi-x) |u(\xi)| \leq M(\xi-x) |u(\xi)|, \quad (9.6)$$

где $K(\xi, x, k)$ — ядро оператора $\mathcal{K}$. Оператор $\mathcal{K}$ отображает $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$ в $\mathcal{M}_{\mathcal{K}}$. Действительно, ограниченность несобственного интеграла $w = \mathcal{K}v$ вытекает из оценки (9.6):

$$\begin{aligned} |w| &\leq \int_x^\infty |K(\xi, x, k)| \cdot |v(\xi, k)| d\xi \leq \|v\| \int_x^\infty (\xi-x) |u(\xi)| d\xi \leq \\ &\leq M \|v\| U(x) \leq MU(h) \|v\|, \end{aligned}$$

где $U(x)$ определена выражением (8.26). Для доказательства непрерывности интеграла $\mathcal{K}v$ его следует представить в виде суммы $w_1 + w_2$ интегралов в пределах от x до h и от h до ∞ соответственно; функция $w_1(x)$ непрерывна, а непрерывность $w_2(x)$ проверяется непосредственно: при $\Delta x \rightarrow 0$

$$|\Delta w_2| \leq \|v\| \left| \frac{e^{-2ik\Delta x} - 1}{2ik\Delta x} \right| |\Delta x| \int_h^\infty |u(\xi)| d\xi \rightarrow 0.$$

Дальнейшее доказательство проводится методом, изложенным в примере 8.7. Исследование сходимости ряда Неймана $\sum_{m=0}^\infty \mathcal{K}^m 1$ основано на оценке

$$|\mathcal{K}^m 1| \leq \frac{M^m U^m(x)}{m!}, \quad m \in \mathbf{N}, \quad (9.7)$$

которая устанавливается так же, как и оценка (8.31). Из неравенства (9.7) следует, что

$$|\chi^+(x, k)| \leq e^{MU(x)}. \quad (9.8)$$

9.1. Показать, что при вещественном k

$$\overline{f^\pm(x, -k)} = f^\pm(x, k). \quad (9.9)$$

9.2. Доказать, что решения Йоста $f^\pm(x, k)$ как функции k аналитичны в полуплоскости $\text{Im } k > 0$ и непрерывны в замкнутой полуплоскости $\text{Im } k \geq 0$.

9.3. Получить более точную, по сравнению с (9.8), оценку функций $\chi^\pm(x, k)$ при $\text{Im } k \geq 0$:

$$|\chi^\pm| \leq e^{MU_1^\pm(x)} \begin{cases} 1 & 0 \leq \pm x, \\ 1 \mp MU_0^\pm(x) (1 + MU_1^\pm(x)) & \pm x < 0, \end{cases} \quad (9.10)$$

где функции χ^+ соответствует верхний знак, а функции χ^- — нижний,

$$U_j^\pm(x) = \pm \int_x^{\pm\infty} |\xi|^j |u(\xi)| d\xi, \quad j = 0, 1.$$

9.4. Установить асимптотические оценки для решений Йоста:

$$\begin{aligned} f^{\pm}(x, k)e^{\mp ikx} &= 1 + o(1), \\ f_x^{\pm}(x, k)e^{\mp ikx} &= \pm ik + o(1), \end{aligned} \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad \mathbf{Im} k \geq 0, \quad (9.11)$$

в которых верхнему знаку соответствует $x \rightarrow +\infty$, а нижнему — $x \rightarrow -\infty$;

$$f^{\pm}(x, k)e^{\mp ikx} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \mathbf{Im} k \geq 0, \quad x \in R. \quad (9.12)$$

Эти оценки являются равномерными по k и x в указанных областях.

9.5. При условии $\mathbf{Im} k \geq 0$ вычислить вронскианы

$$1. W[f^+(x, k), f^+(x, -k)], \quad 2. W[f^-(x, k), f^-(x, -k)].$$

Пример 9.2. Если $\mathbf{Im} k \geq 0$, $k \neq 0$, то пара функций $f^+(x, k)$ и $f^+(x, -k)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Шредингера (задача 9.5), поэтому

$$f^-(x, k) = a(k)f^+(x, -k) + b(k)f^+(x, k). \quad (9.13)$$

Коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ можно найти, используя асимптотику (9.13). Действительно, при $x \rightarrow +\infty$

$$f^-(x, k) = a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx} + o(1).$$

С другой стороны, соотношение (9.13), преобразованное к виду

$$\begin{aligned} f^-(x, k) &= e^{-ikx} - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) f^-(\xi, k) e^{ik\xi} d\xi e^{-ikx} + \\ &+ \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) f^-(\xi, k) e^{-ik\xi} d\xi e^{ikx} + \\ &+ \frac{1}{k} \int_x^{\infty} u(\xi) f^-(\xi, k) \sin k(\xi - x) d\xi, \end{aligned}$$

представляет собой асимптотику $f_-(x, k)$ при $x \rightarrow +\infty$ (последнее слагаемое есть $o(1)$) Следовательно,

$$a(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) e^{ik\xi} f_-(\xi, k) d\xi,$$

$$b(k) = \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) e^{-ik\xi} f_-(\xi, k) d\xi.$$

Сходимость интегралов гарантируется оценкой (9.10).

В задачах рассеяния вводятся коэффициенты отражения $R(k)=b(k)/a(k)$ и прохождения $T(k)=1/a(k)$ плоской волны при взаимодействии с потенциалом $u(x)$. Функция $\psi(x, k)=\frac{f_-(x, k)}{a(k)}$ удовлетворяет соотношениям

$$\psi(x, k) = \begin{cases} T(k)e^{-ikx} + o(1), & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-ikx} + R(k)e^{ikx} + o(1), & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

При вещественном k сумма во второй строке представляет собой суперпозицию падающей из $+\infty$ плоской волны e^{-ikx} и отраженной волны, выражение в первой строке описывает прошедшую волну.

9.6. Доказать, что функция $a(k)$ является аналитической в полуплоскости $\mathbf{Im} k > 0$ и непрерывна в замкнутой полуплоскости $\{k : \mathbf{Im} k \geq 0, k \neq 0\}$, а функция $b(k) \in C(\mathbf{Im} k = 0, k \neq 0)$.

9.7. При $k \neq 0$ выразить коэффициенты $a(k)$ и $b(k)$ через решения Йоста в виде

$$a(k) = \frac{1}{2ik} W[f^-(x, k), f^+(x, k)], \quad \mathbf{Im} k \geq 0, \quad (9.14)$$

$$b(k) = -\frac{1}{2ik} W[f^-(x, k), f^+(x, -k)], \quad \mathbf{Im} k = 0. \quad (9.15)$$

9.8. При вещественном k установить формулы:

$$\overline{a(k)} = a(-k), \quad \overline{b(k)} = b(-k), \quad (9.16)$$

$$|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2. \quad (9.17)$$

9.9. Получить асимптотические формулы:

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \mathbf{Im} k \geq 0, \quad (9.18)$$

$$b(k) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \mathbf{Im} k = 0. \quad (9.19)$$

9.10. Доказать, что $a(k)$ не имеет нулей.

Пример 9.3. Свойства собственных функций и собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для уравнения Шредингера

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\psi &\equiv -\psi'' + u(x)\psi = \lambda\psi, \\ \psi &\in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} = \{\psi : \psi \in C^2(R) \cap L_2(R)\}, \end{aligned} \quad (9.20)$$

где $u(x)$ удовлетворяет условиям (6.47).

Пусть $\lambda_n \neq 0$ — собственное значение, а $\psi_n(x)$ — соответствующая собственная функция оператора $\mathcal{L} : \mathcal{L}\psi_n = \lambda_n\psi_n$, $\psi_n \neq 0$. Поскольку $\psi_n = \mathcal{L}\psi_n / \lambda_n \in L_2(R)$, то при $x \rightarrow \infty$ существует конечный предел интеграла

$$\begin{aligned} \int_{-x}^x (\overline{\psi}_n \mathcal{L}\psi_n + \psi_n \mathcal{L}\overline{\psi}_n) d\xi &= \\ &= -(\overline{\psi}'_n \psi_n + \psi'_n \overline{\psi}_n) \Big|_{-x}^x + 2 \int_{-x}^x (u|\psi_n|^2 + |\psi'_n|^2) d\xi = \\ &= -\frac{d}{dx} (|\psi_n(x)|^2 + |\psi_n(-x)|^2) + 2 \int_{-x}^x (u|\psi_n|^2 + |\psi'_n|^2) d\xi. \end{aligned}$$

Так как интеграл в правой части имеет предел (конечный или нет), то существует предел подстановки. Этот предел равен нулю (иначе $\psi_n \notin L_2(R)$), следовательно, $\psi'_n \in L_2(R)$. Располагая этими свойствами собственных функций, нетрудно показать, что собственные значения оператора $\mathcal{L}$ вещественны:

$$\begin{aligned} \lambda_n(\psi_n, \psi_n) &= (\mathcal{L}\psi_n, \psi_n) = -\psi'_n \overline{\psi}_n \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \int_{-\infty}^{inf ty} (u|\psi_n|^2 + |\psi'_n|^2) d\xi = \int_{-\infty}^{inf ty} (u|\psi_n|^2 + |\psi'_n|^2) d\xi. \end{aligned}$$

Неотрицательные λ не могут быть собственными значениями оператора $\mathcal{L}$. Действительно, если $\lambda = k_n^2 > 0$, то соответствующее решение, являясь линейной комбинацией $f^+(x, k)$, $f^-(x, k)$, имеет при $x \rightarrow +\infty$ асимптотику (см.(9.11))

$$C_1 e^{ik_n x} + C_2 e^{-ik_n x} + o(1)$$

и, следовательно, не принадлежит $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Такой же вывод справедлив и для $\lambda=0$, ибо в этом случае одно из решений ведет себя при $x \rightarrow +\infty$ как $1 + o(1)$, а другое — как $x + o(x)$.

Пусть $\lambda_n = -\beta_n^2$, $\beta_n > 0$. Если в качестве фундаментальной системы решений взять $f^-(x, i\beta_n)$, $f^-(x, -i\beta_n)$, то при $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= A_n f^-(x, i\beta_n) + B_n f^-(x, -i\beta_n) = \\ &= A_n \left(e^{\beta_n x} + o(e^{\beta_n x}) \right) + B_n \left(e^{-\beta_n x} + o(e^{-\beta_n x}) \right). \end{aligned}$$

Из условия $\psi_n \in L_2(R)$ следует, что $B_n = 0$; другую константу можно выбрать произвольно, например, $A_n = 1$. Аналогичная ситуация возникает при выборе фундаментальной системы $f^+(x, i\beta_n)$, $f^+(x, -i\beta_n)$. В этом случае остается функция $f^+(x, i\beta_n)$. Таким образом,

$$\psi_n = f^-(x, i\beta_n) = b_n f^+(x, i\beta_n) = \begin{cases} e^{\beta_n x} + o(e^{\beta_n x}), & x \rightarrow -\infty, \\ e^{-\beta_n x} + o(e^{-\beta_n x}), & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Так как оператор $\mathcal{L}$ веществен, то собственные функции можно выбрать вещественными, тогда b_n — вещественное число.

9.11. Доказать, что между нулями функции $a(k)$, $\text{Im } k \geq 0$, и собственными значениями задачи (9.20) имеется взаимно однозначное соответствие.

9.12. Доказать, что нули функции $a(k)$, $\text{Im } k \geq 0$, простые.

9.13. Пусть $\psi_n(x) = f^-(x, i\beta_n) = b_n f^+(x, i\beta_n)$ функция, построенная в примере 9.3, $d_n = \|\psi_n\|$. Доказать, что

$$d_n^2 = i b_n a'(i\beta_n). \quad (9.21)$$

9.14. Доказать, что 1) все собственные значения задачи (9.20) простые; 2) число собственных значений конечно.

9.15. Пусть $\Lambda_n = \{i\beta_1, i\beta_2, \dots, i\beta_n\}$, $\beta_j > 0$ — множество нулей $a(k)$. Доказать, что функция $R(k) \in C(\mathbf{Im} k = 0)$, а $T(k)$ — мероморфная в полуплоскости $\mathbf{Im} k > 0$ функция с простыми полюсами $i\beta_j$, $j=1, 2, \dots, n$, непрерывная в области $\{k : \mathbf{Im} k \geq 0\} \setminus \Lambda_n$.

9.16. Доказать, что при вещественном k

$$\overline{T(-k)} = T(k), \quad \overline{R(-k)} = R(k), \quad (9.22)$$

$$|T(k)|^2 + |R(k)|^2 = 1. \quad (9.23)$$

9.17. Получить асимптотические формулы

$$T(k) = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \mathbf{Im} k \geq 0, \quad (9.24)$$

$$R(k) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \mathbf{Im} k = 0. \quad (9.25)$$

9.18. Даны операторы

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x),$$

где функция $u(x)$ удовлетворяет условиям (6.47), и линейный оператор Ω с областью определения $\mathcal{M}_\Omega$, удовлетворяющий условию $\mathcal{L}\Omega f = \Omega\mathcal{L}_0 f$.

1. Доказать, что оператор Ω преобразует решение φ уравнения $\mathcal{L}_0\varphi = k^2\varphi$ в решение $\psi = \Omega\varphi$ уравнения $\mathcal{L}\psi = k^2\psi$.

2. Пусть $\mathcal{E}(\overline{\Delta})$, где $\overline{\Delta} = \{x, y : h \leq x \leq y\}$, — множество функций $K(x, y)$, удовлетворяющих условиям:

если $y \rightarrow \infty$, то при любом h функция $K(x, y) \rightarrow 0$ равномерно по x на промежутке $\overline{H} = [h, \infty)$,

интегралы

$$\int_x^\infty \left| \frac{\partial^m K(x, y)}{\partial y^m} \right| dy, \quad m=1, 2$$

сходятся на $\overline{H}$, а интегралы

$$\int_x^\infty \left| \frac{\partial^m K(x, y)}{\partial x^m} \right| dy, \quad m=0, 1, 2,$$

равномерно сходятся на $\overline{H}$. Доказать, что существует единственная функция $K(x, y) \in \mathcal{E}(\overline{\Delta})$, такая, что

$$(\Omega f)(x) = f(x) + \int_x^\infty K(x, y) f(y) dy, \quad (9.26)$$

где $f \in C^2(R)$, $\forall x \in \overline{H} : |f^{(m)}(x)| \leq M$, $m = 0, 1, 2$.

Пример 9.4. Прямая задача рассеяния для уравнения Шредингера

$$-\psi'' + u(x)\psi = k^2\psi, \quad -\infty < x < \infty, \quad (9.27)$$

где потенциал $u(x)$ удовлетворяет условиям (6.47), заключается в определении коэффициентов прохождения и отражения, а также собственных значений и собственных функций.

Пусть $\psi_n(x) = f^-(x, i\beta_n) = b_n f^+(x, i\beta_n)$ — собственная функция из примера 9.3, $c_n^2 = b_n^2/d_n^2$ (см. (9.21)). Элементы множества

$$s = \{R(k), \beta_1, \beta_2 \dots \beta_N, c_1^2, c_2^2 \dots c_N^2\}$$

называются данными рассеяния. Прямая задача рассеяния является частью МОЗР; говоря о ее решении, имеют в виду построение множества s .

Пусть $u(x) = -U_0\delta(x)$, $U_0 > 0$, тогда решение уравнения (9.21)

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-ikx}, & x < 0, \\ ae^{-ikx} + be^{ikx}, & x > 0. \end{cases}$$

Из условий в нуле $\psi(+0)=\psi(-0)$, $\psi'(+0)-\psi'(0)=-U_0\psi(+0)$ следует, что $a+b=1$, $-ika+ikb+ik=-U_0$, откуда

$$a(k) = 1 - \frac{iU_0}{2k}, \quad b(k) = \frac{iU_0}{2k}.$$

Уравнение $a(k)=0$ имеет мнимый корень $k_1=iU_0/2$, которому соответствуют $\beta_1=U_0/2$, $a'(i\beta_1)=-2i/U_0$, $b_1=b(i\beta_1)=1$, следовательно,

$$s = \left\{ R(k) = \frac{iU_0}{2k - iU_0}, \beta_1 = \frac{U_0}{2}, c_1^2 = \frac{U_0}{2} \right\}.$$

9.19. Решить задачу рассеяния для уравнения Шредингера (9.27) с потенциалом $U_0\delta(x)$, $U_0>0$.

9.20. Найти данные рассеяния для уравнения (9.27) на потенциале

$$u(x) = -U_0\eta(l - |x|), \quad U_0 > 0. \quad (9.28)$$

9.21. Решить задачу рассеяния для уравнения (9.27) с потенциалом $u(x) = -U_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x}{l}$.

9.22. Потенциал $u(x)$ в уравнении (9.27) называется безотражательным, если $R(k)=0$. Будут ли безотражательными потенциалы, рассмотренные в примере 9.4 и в задачах 9.19, 9.20?

9.23. Найти условие, при котором потенциал из задачи 9.21 будет безотражательным.

9.24. Найти данные рассеяния на потенциале

$$u(x) = -\frac{1}{l^2} N(N+1) \operatorname{sech}^2 \frac{x}{l},$$

где N — целое положительное число.

Пример 9.5. Обратная задача рассеяния для уравнения Шредингера (9.27) состоит в восстановлении потенциала $u(x)$ по данным рассеяния. В качестве элементов множества s можно взять любую функцию $R(k) \in C(-\infty < k < \infty)$, удовлетворяющую условиям (9.25) и $|R(k)| \leq 1$ (в силу (9.23)), и $2N$ произвольных положительных величин $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, c_1^2, c_2^2, \dots, c_N^2$. Процедура восстановления потенциала связана с решением линейного интегрального уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко (ГЛМ). Вывод этого уравнения основан на соотношении (9.13), записанном в виде

$$T(k)f^-(x, k) = f^+(x, -k) + R(k)f^+(x, k), \quad (9.29)$$

и преобразовании (9.26)

$$f^+(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, z)e^{ikz}dz. \quad (9.30)$$

В результате вычитания e^{-ikx} из обеих частей (9.29), умножения на e^{iky} и интегрирования по k получается уравнение

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^\infty [T(k)f^-(x, k) - e^{-ikx}] e^{iky} dk = \\ & = \int_{-\infty}^\infty \left\{ [f^+(x, -k) - e^{-ikx}] e^{iky} + R(k)f^+(x, k)e^{iky} dk \right\}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Вычисление интеграла в левой части (9.31) осуществляется на комплексной плоскости. Поскольку

$$T(k)f^-(x, k)e^{ikx} - 1 = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{Im } k \geq 0,$$

что следует из (9.24) и (9.12), то при $y > x$ применима лемма Жордана к контуру $C_r = \{k : |k| = r, 0 \leq \arg k \leq \pi\}$. Следовательно, интеграл существует (хотя бы в смысле главного значения) и ра-

вен

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{f^-(x, i\beta_n)}{a'(i\beta_n)} e^{-\beta_n y} &= 2\pi i \sum_{n=1}^N \frac{b_n f^+(x, i\beta_n)}{a'(i\beta_n)} e^{-\beta_n y} = \\ &= -2\pi \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-\beta_n(x+y)} - 2\pi \int_x^\infty K(x, z) \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-\beta_n(x+z)} dz. \end{aligned}$$

Здесь использовано выражение (9.30) для $f^+(x, k)$ и соотношение (9.21), на основании которого

$$-\frac{ib_n}{a'(i\beta_n)} = \frac{b_n^2}{d_n^2} = c_n^2.$$

Интеграл от первого слагаемого в правой части (9.31) после подстановки функции $f^+(x, k)$ в форме (9.30) превращается в

$$\int_{-\infty}^\infty e^{iky} dk \int_x^\infty K(x, z) e^{-ikz} dz.$$

Полученное выражение есть результат последовательного применения прямого и обратного преобразований Фурье функции $2\pi K(x, y)\eta(y-x)$. Теперь можно заключить, что существует интеграл от второго слагаемого в правой части (9.31)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{iky} \left[e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, z) e^{ikz} dz \right] dk = \\ = \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ik(x+y)} dk + \int_x^\infty K(x, z) dz \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ik(y+z)} dk. \end{aligned}$$

Законность изменения порядка интегрирования в интеграле

$$\int_{-\infty}^\infty dk \int_x^\infty \Phi(z, k) dz, \quad \Phi(z, k) = R(k) K(x, z) e^{ik(y+z)}$$

обусловлена интегрируемостью $|\Phi(z, k)|$ по z и равномерной сходимостью интегралов

$$\int_x^\infty \Phi(z, k) dz, \quad \int_{-\infty}^\infty \Phi(z, k) dk,$$

первого по $k \in (-\infty, \infty)$, второго по $z \in [x, \infty)$; эти свойства следуют из (9.25) и свойств ядра $K(x, z)$ (см. задачу 9.18). Введением функции

$$F(x) = \sum_{n=1}^N c_n^2 e^{-\beta_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(k) e^{ikx} dk$$

достигается компактная запись результата преобразования уравнения (9.29):

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, z) F(x + z) dz = 0, \quad y > x. \quad (9.32)$$

Это и есть уравнение ГЛМ. Оно представляет собой сингулярное интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода относительно неизвестной функции $K(x, y)$. Потенциал $u(x)$ рассчитывается по формуле (см.(9.137))

$$u(x) = -2 \frac{dK(x, x)}{dx}. \quad (9.33)$$

9.25. Показать, что интегральное уравнение ГЛМ (9.32) восстанавливает δ -функциональные потенциалы по данным рассеяния, полученным 1) в примере 9.4; 2) в задаче 9.19.

9.26. Восстановить потенциал $u(x)$, если

$$s = \{R(k) = 0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N, c_1^2, c_2^2, \dots, c_N^2\},$$

где $\beta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, N$.

Пример 9.6. Метод обратной задачи рассеяния. Существует класс нелинейных уравнений, для которых задача Коши

$$u_t = \Phi(u, u_x, u_{x^2}, \dots, u_{x^n}), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \quad (9.34)$$

$$u(x, t)|_{t=0} = u_0(x) \quad (9.35)$$

сводится к нескольким линейным. Для проведения подобной редукции требуется построить два вспомогательных оператора. Один из них — изоспектральный (спектр не зависит от t) оператор Шредингера

$$\mathcal{L}(t) = -D^2 - u(x, t), \quad (9.36)$$

где $u(x, t)$ — решение задачи (9.34), (9.35). Условием изоспектральности оператора $\mathcal{L}(t)$ является унитарная эквивалентность $\mathcal{L}(t)$ и $\mathcal{L}(0)$:

$$U^*(t)\mathcal{L}(t)U(t) = \mathcal{L}(0), \quad (9.37)$$

где $U(t)$ — унитарный оператор, $U^*(t)$ — сопряженный оператор. В самом деле, если такой оператор $U(t)$ существует, то уравнение $\mathcal{L}(0)\psi(x, 0) = \lambda\psi(x, 0)$ после умножения обеих частей слева на $U(t)$ и применения свойства (9.37) преобразуется в уравнение $\mathcal{L}(t)\psi(x, t) = \lambda\psi(x, t)$, где $\psi(x, t) = U(t)\psi(x, 0)$ с тем же значением λ . Отсюда вытекает существование второго оператора $\mathcal{A}$ со свойствами: $\mathcal{A}$ — антисимметричный оператор, коммутатор $[\mathcal{L}, \mathcal{A}] = \mathcal{L}\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{L}$ является оператором умножения,

$$\mathcal{L}_t + [\mathcal{L}, \mathcal{A}] = 0, \quad (9.38)$$

$$\psi_t(x, t) = \mathcal{A}\psi(x, t). \quad (9.39)$$

Действительно, пусть $\mathcal{A} = U_t U^*$, тогда

$$\mathcal{A} + \mathcal{A}^* = U_t U^* + (U_t U^*)^* = U_t U^* + U U_t^* = \frac{d}{dt} U U^* = \frac{dI}{dt} = 0,$$

т.е. $\mathcal{A} = -\mathcal{A}^*$ (антисимметричность). Так как $\mathcal{A} = U_t U^*$, то $U_t = \mathcal{A}U$ и $U_t^* = -U^* \mathcal{A}$; подстановка U_t и U_t^* в тождество

$$U_t^* \mathcal{L}(t) U + U^* \mathcal{L}_t(t) U + U^* \mathcal{L}(t) U_t = 0,$$

полученное дифференцированием (9.37) по t , приводит к соотношению $U^*(-\mathcal{A}\mathcal{L} + \mathcal{L}_t + \mathcal{L}\mathcal{A}) = 0$, эквивалентному (9.38). Сравнение

$\mathcal{L}_t = -u_t$ (результат дифференцирования оператора (9.36) по t) и уравнения (9.37) показывает, что

$$u_t = [\mathcal{L}, \mathcal{A}], \quad (9.40)$$

т.е. $[\mathcal{L}, \mathcal{A}]$ — оператор умножения на функцию u_t . Наконец, из свойства $\psi(x, t) = U\psi(x, 0)$ следует, что

$$\psi_t(x, t) = U_t\psi(x, t) = \mathcal{A}U\psi(x, 0) = \mathcal{A}\psi(x, t).$$

Если уравнения (9.40) и (9.34) эквивалентны, то пара $(\mathcal{L} - \mathcal{A})$ операторов называется парой Лакса для уравнения (9.34).

Применение МОЗР для построения решения задачи Коши (9.34), (9.35) состоит из трех этапов.

1. Решение прямой задачи рассеяния для уравнения Шредингера (9.27) с потенциалом (9.35), который определяет данные рассеяния $s(0)$ при $t=0$: $u(x, 0) \rightarrow s(0)$.

2. Решение задачи Коши для уравнения (9.35) относительно t при большом фиксированном значении $|x|$; на этом этапе определяется зависимость данных рассеяния от t : $s(0) \rightarrow s(t)$.

3. Решение обратной задачи рассеяния, которая состоит в построении $u(x, t)$ по данным рассеяния при фиксированном t : $s(t) \rightarrow u(x, t)$.

Таким образом, для практической реализации МОЗР нужно располагать парой Лакса $(\mathcal{L} - \mathcal{A})$. Конструкция оператора $\mathcal{L}$ известна. Оператор $\mathcal{A}$ в некоторых случаях можно отыскивать в виде

$$\mathcal{A} = -\alpha_m \left(D^{2m+1} + \sum_{j=1}^m (b_j D^{2j-1} + D^{2j-1} b_j) \right), \quad (9.41)$$

где α_m — постоянная величина, b_j — неизвестные функции от u и производных u по x , выбираемые так, чтобы коммутатор $[\mathcal{L}, \mathcal{A}]$ был оператором умножения

9.27. Построить пару Лакса для уравнения $u_t + u_x = 0$.

9.28. Показать, что пара Лакса для уравнения КдФ (9.1) состоит из операторов $\mathcal{L} = -D^2 - u$ и

$$\mathcal{A} = -4D^3 - 3uD - 3Du. \quad (9.42)$$

9.29. Найти пару Лакса $(\mathcal{L} - \mathcal{A})$, где $\mathcal{L} = -D^2 - u$, а оператор $\mathcal{A}$ определен выражением (9.41) при $m=2$, $\alpha_2=16$; показать, что уравнение (9.40) имеет вид

$$u_t + 30u^2u_x + 20u_xu_{xx} + 10uu_{xxx} + u_{xxxx} = 0. \quad (9.43)$$

9.30. Определить зависимость от t данных рассеяния для потенциала $u(x, t)$, удовлетворяющего уравнению КдФ (9.1).

9.31. Найти зависимость данных рассеяния от t для потенциала $u(x, t)$, удовлетворяющего уравнению (9.43).

9.32. Получить решение задачи Коши для уравнения КдФ (9.1), если $u(x, 0) = \frac{2}{T} \operatorname{sech}^2 \frac{x}{T}$. Убедиться в том, что решение, называемое солитон, представляет собой уединенную волну неизменной формы, движущуюся вдоль $0x$ с постоянной скоростью. Как зависит скорость v_0 солитона от его амплитуды u_0 ?

9.33. Решить задачу Коши для уравнения (9.43) с начальным условием $u(x, 0) = 2\operatorname{sech}^2 x$.

9.34. Решение $u(x, t)$ задачи Коши с начальной функцией $u(x, 0)$, которой соответствуют данные рассеяния

$$s(0) = \{R(r) = 0, \beta_j, c_j^2, j = 1, 2, \dots, N\}, \quad 0 < \beta_1 < \dots < \beta_N,$$

называется N -солитонным. Построить односолитонное решение 1) уравнения КдФ (9.1); 2) уравнения (9.43).

9.35. В приближении мелкой воды движение свободной поверхности жидкости описывается уравнением КдФ (1.106). 1. Определить форму и скорость солитона заданной амплитуды ζ_0 . 2. При каком условии начальное возмущение $\zeta(x, 0) = \zeta_0 \operatorname{sech}^2 \frac{x}{l}$ поверхности представляет собой суперпозицию (нелинейную) N солитонов?

9.36. Построить двухсолитонное решение уравнения КдФ (9.1). Показать, что оно состоит из двух солитонов, перемещающихся вдоль оси $0x$ с различными скоростями, и в результате взаимодействия солитонов их форма и скорость не изменяются, а происходит лишь сдвиг фаз каждого из них, при этом суммарный сдвиг фаз равен нулю.

9.37. Найти N -солитонное решение уравнения КдФ (9.1) и показать, что 1) при $t \rightarrow -\infty$ оно представляет собой N солитонов, расположенных вдоль оси $0x$ в порядке убывания скоростей, а при $t \rightarrow +\infty$ — в обратном порядке; 2) взаимодействие солитонов не влияет на их форму и скорость. Найти сдвиг фазы солитона с номером k , $1 \leq k \leq N$.

Пример 9.7. Уравнение Шредингера $\Psi'' - q(x)\Psi + k^2\Psi = 0$ сводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно функций $\psi_1 = \alpha\Psi' + \beta\Psi$, $\psi_2 = \gamma\Psi$:

$$\begin{cases} \psi_1' - \frac{\alpha}{\gamma}(q - k^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2})\psi_2 = \frac{\beta}{\alpha}\psi_1, \\ \frac{\gamma}{\alpha}\psi_1 - \psi_2' = \frac{\beta}{\alpha}\psi_2. \end{cases}$$

При $\gamma = \alpha$, $\beta = ik\alpha$ система принимает вид

$$i \begin{pmatrix} D & -q \\ 1 & -D \end{pmatrix} \psi = k\psi, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Для расширения области применимости МОЗР используется система

$$\mathcal{L}\psi = k\psi, \tag{9.44}$$

в которой

$$\mathcal{L} = i \begin{pmatrix} D & -q \\ r & -D \end{pmatrix}, \quad (9.45)$$

а потенциалы q и r принадлежат множеству функций

$$f \in C^2(R), \quad |f^{(m)}| \leq M e^{-2\beta_0|x|}, \quad \beta_0 > 0, \quad m = 0, 1, 2. \quad (9.46)$$

Для формализации преобразований будут употребляться матрицы

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ A = \Sigma \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ r & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, уравнение (9.44) можно представить в виде

$$\Lambda D\psi + B\psi + ik\psi = 0. \quad (9.47)$$

Пусть $\varphi(x, k)$ и $\psi(x, k)$ — решения матричного уравнения (9.44). Определитель Вронского

$$W[\varphi, \psi] = \begin{vmatrix} \varphi_1 \psi_1 \\ \varphi_2 \psi_2 \end{vmatrix} = (\psi_2 - \psi_1) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \\ = (\psi_1 \psi_2) A \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \psi^\tau A \varphi$$

не зависит от x . Действительно, если в уравнение (9.47) подставить φ и ψ , умножить слева полученные тождества, первое — на $\psi^\tau \Sigma$, второе — на $\varphi^\tau \Sigma$ и вычесть одно из другого, то разность будет равна

$$\psi^\tau \Sigma \Lambda \varphi_x - \varphi^\tau \Sigma \Lambda \psi_x \psi^\tau A \varphi_x - \varphi^\tau A \psi_x = \\ = \psi^\tau A \varphi_x + \psi_x^\tau A \varphi \frac{d}{dx} \psi^\tau A \varphi = \frac{d}{dx} W[\varphi, \psi] = 0,$$

следовательно, $W[\varphi, \psi] = C(k)$.

9.38. Матрице $P(x) = (P_{ij}(x))$ ставится в соответствие функция $\|P\| = \sum_{ij} |P_{ij}|$; получить оценки

$$\|PQ\| \leq \|P\| \cdot \|Q\|, \quad \left\| \int P dx \right\| \leq \left| \int \|P\| dx \right|. \quad (9.48)$$

9.39. В задаче 6.318 определены решения Йоста уравнения (9.44). Показать, что для этих решений справедливы оценки:

$$\begin{aligned} \left\| f^{\pm} e^{\mp ikx} \right\| &\leq \begin{cases} M_1, & 0 \leq \beta, \\ 1 + M_2 e^{\pm 2\beta x}, & -\beta_0 < \beta < 0, \end{cases} \\ \left\| \tilde{f}^{\pm} e^{\pm ikx} \right\| &\leq \begin{cases} 1 + M_2 e^{\mp 2\beta x}, & 0 < \beta < \beta_0, \\ M_1, & \beta \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.49)$$

где M_1, M_2 — положительные константы, $\beta = \text{Im } k$.

9.40. Доказать, что 1) каждое из уравнений (6.51) имеет единственное решение, непрерывно дифференцируемое по переменной x в R ; 2) решения f^+ и f^- как функции k аналитичны в полуплоскости $\text{Im } k > -\beta_0$, а $\tilde{f}^+$ и $\tilde{f}^-$ — в полуплоскости $\text{Im } k < \beta_0$; все решения уравнения (6.51) удовлетворяют уравнению (9.44).

9.41. Получить следующие асимптотические представления решений Йоста: если $-\beta_0 < \text{Im } k$, то

$$\begin{aligned} e^{-ikx} f^+(x, k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \\ e^{ikx} f^-(x, k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = o(1), \quad x \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (9.50)$$

если $\text{Im } k < \beta_0$, то

$$\begin{aligned} e^{ikx} \tilde{f}^+(x, k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \\ e^{-ikx} \tilde{f}^-(x, k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = o(1), \quad x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

9.42. Вычислить определители $W[f^+, \tilde{f}^+]$, $W[f^-, \tilde{f}^-]$ при условии, что $k \in \{k : -\beta_0 < \text{Im } k < \beta_0\}$.

9.43. Доказать, что при $k \rightarrow \infty$ справедливы равномерные по x оценки

$$\begin{aligned} e^{-ikx} f^+(x, k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right), \\ e^{ikx} f^-(x, k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right), \\ e^{ikx} \tilde{f}^+(x, k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right), \\ e^{-ikx} \tilde{f}^-(x, k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + O\left(\frac{1}{k}\right), \end{aligned} \quad \begin{aligned} &-\beta_0 < \text{Im } k, \\ &\text{Im } k < \beta_0. \end{aligned}$$

9.44. Установить существование неособой матрицы S

$$S = \begin{pmatrix} b(k) & \tilde{a}(k) \\ a(k) & \tilde{b}(k) \end{pmatrix}, \quad (9.51)$$

называемой матрицей рассеяния, со свойствами:

1) $(f^- \tilde{f}^-) = (f^+ \tilde{f}^+) S$, т.е.

$$\begin{aligned} f^-(x, k) &= a(k) \tilde{f}^+(x, k) + b(k) f^+(x, k), \\ \tilde{f}^-(x, k) &= \tilde{b}(k) \tilde{f}^+(x, k) + \tilde{a}(k) f^+(x, k); \end{aligned} \quad (9.52)$$

2) $-\det S = a\tilde{a} - b\tilde{b} = 1$;

3) выполняются предельные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1^- f_2^-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{f}_1^- \tilde{f}_2^- = \tilde{a}\tilde{b}. \quad (9.53)$$

9.45. Заданы векторы-столбцы $p_j(x)$, $j=1, 2$, компоненты которых $r_j(x)$, $q_j(x)$, принадлежат множеству функций (9.46). Установить следующие соотношения между потенциалами r_j , q_j и элементами матриц рассеяния S_j , $j=1, 2$:

$$\begin{aligned} a_1 b_2 + a_2 b_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (p_1 + p_2)^\tau h d\xi, \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Lambda(p_2 - p_1))^\tau h d\xi, \end{aligned} \quad (9.54)$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_1\tilde{a}_2 + \tilde{b}_2\tilde{a}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (p_1 + p_2)^{\tau} \tilde{h} d\xi, \\ \tilde{b}_1\tilde{a}_2 - \tilde{b}_2\tilde{a}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} (\Lambda(p_2 - p_1))^{\tau} \tilde{h} d\xi,\end{aligned}\quad (9.55)$$

где

$$h = \begin{pmatrix} f_1^- g_1^- \\ f_2^- g_2^- \end{pmatrix}, \quad \tilde{h} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1^- \tilde{g}_1^- \\ \tilde{f}_2^- \tilde{g}_2^- \end{pmatrix},$$

столбцы f и g — решения Йоста уравнений (9.44) $\mathcal{L}_j \psi = k\psi$ для $j=1$ и $j=2$ соответственно, матрица Λ определена в примере 9.7.

9.46. Вывести формулы

$$\begin{aligned}W[f^-, f^+] &= a(k), & -\beta_0 < \mathbf{Im} k, \\ W[\tilde{f}^+, \tilde{f}^-] &= \tilde{a}(k), & \mathbf{Im} k < \beta_0, \\ W[\tilde{f}^+, f^-] &= b(k), & -\beta_0 < \mathbf{Im} k < \beta_0 \\ W[f^-, f^+] &= \tilde{b}(k),\end{aligned}$$

и доказать, что функции $a(k)$, $\tilde{a}(k)$, $b(k)$, $\tilde{b}(k)$ аналитичны в указанных областях.

9.47. Доказать, что функции $a(k)$, $\tilde{a}(k)$, $b(k)$, $\tilde{b}(k)$ обладают следующими свойствами:

1) они выражаются через потенциалы и решения Йоста посредством интегральных соотношений

$$\begin{aligned}a(k) &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) f_2^-(\xi, k) e^{ik\xi} d\xi, & \mathbf{Im} k > \beta_0 \\ \tilde{a}(k) &= 1 + \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) \tilde{f}_1^-(\xi, k) e^{-ik\xi} d\xi, & \mathbf{Im} k < \beta_0 \\ b(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} r(\xi) f_1^-(\xi, k) e^{-ik\xi} d\xi, \\ \tilde{b}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(\xi) \tilde{f}_2^-(\xi, k) e^{ik\xi} d\xi; & -\beta_0 < \mathbf{Im} k < \beta_0;\end{aligned}$$

2) при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}a(k) &= 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), & -\beta_0 < \mathbf{Im} k, \\ \tilde{a}(k) &= 1 + O\left(\frac{1}{k}\right), & \mathbf{Im} k < \beta_0, \\ b(k) &= O\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ \tilde{b}(k) &= O\left(\frac{1}{k^2}\right), & -\beta_0 < \mathbf{Im} k < \beta_0;\end{aligned}$$

3) функции $a(k)$ и $\tilde{a}(k)$ имеют конечное число нулей в полуплоскостях $\mathbf{Im} k \geq 0$ и $\mathbf{Im} k \leq 0$ соответственно.

Пример 9.8. Прямая задача рассеяния для уравнения (9.43) состоит в определении функций $T(k)=1/a(k)$, $\tilde{T}(k)=1/\tilde{a}(k)$ и функций $R(k)=b(k)/a(k)$, $\tilde{R}(k)=\tilde{b}(k)/\tilde{a}(k)$ (коэффициенты прохождения и отражения соответственно), а также собственных значений и собственных функций оператора $\mathcal{L}$ (9.45):

$$\mathcal{L}\psi = k\psi, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$(\psi \psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi \tau \bar{\psi} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) d\xi < \infty.$$

Пусть $k_j = \alpha_j + i\beta_j$, $j = \overline{1, N}$ — нули функции $a(k)$, расположенные в полуплоскости $\text{Im } k > 0$, а числа $\tilde{k}_j = \tilde{\alpha}_j + i\tilde{\beta}_j$, $j = 1, 2, \dots, \tilde{N}$ — нули $\tilde{a}(k)$, лежащие в полуплоскости $\text{Im } k < 0$. Множество этих нулей и множество собственных значений совпадают. В самом деле, если $\tilde{k}_m = \tilde{\alpha}_m + i\tilde{\beta}_m$, $\tilde{\beta}_m < 0$ — собственное значение оператора $\mathcal{L}$, то соответствующая собственная функция $\psi_m^-(x, \tilde{k}_m) = \tilde{a}_m \tilde{f}^-(x, \tilde{k}_m) + \tilde{c}_m \tilde{f}^-(x, \tilde{k}_m)$ принадлежит $L_2(R)$, если $\tilde{c}_m = 0$ (это вытекает из формул (9.50)). Таким образом, при $\tilde{a}_m = 1$ собственная функция $\psi_m^-(x, \tilde{k}_m) = \tilde{f}^-(x, \tilde{k}_m)$. С другой стороны, функция $\psi_m^-(x, \tilde{k}_m) = \tilde{b}_m \tilde{f}^+(x, \tilde{k}_m) + \tilde{d}_m \tilde{f}^+(x, \tilde{k}_m)$ принадлежит $L_2(R)$, если $\tilde{d}_m = 0$. Итак, $\psi_m^-(x, \tilde{k}_m) = \tilde{f}^-(x, \tilde{k}_m) = \tilde{b}_m \tilde{f}^+(x, \tilde{k}_m)$, откуда следует, что вронсиан $W[\tilde{f}^-(x, \tilde{k}_m), \tilde{f}^+(x, \tilde{k}_m)] = \tilde{a}(\tilde{k}_m) = 0$ (задача 9.42). Обратно, если $\tilde{a}(\tilde{k}_m) = 0$, то $\tilde{f}^+(x, \tilde{k}_m)$ и $\tilde{f}^-(x, \tilde{k}_m)$ линейно зависимы, поэтому $\tilde{b}_m \tilde{f}^+(x, \tilde{k}_m) = \tilde{f}^-(x, \tilde{k}_m) = \psi_m^-(x, \tilde{k}_m)$ принадлежит $L_2(R)$, т.е. $\psi_m^-(x, \tilde{k}_m)$ — собственная функция, $\tilde{k}_m$ — собственное значение. Для $k_m = \alpha_m + i\beta_m$, $\beta_m > 0$, применимы такие же рассуждения. В этом случае собственной функцией является функция $\psi_m^+(x, k_m) = \tilde{f}^-(x, k_m) = \tilde{b}_m \tilde{f}^+(x, k_m)$. Так как вещественные k не являются собственными значениями, то доказательство завершено.

9.48. Если между потенциалами $r(x)$ и $q(x)$, входящих в оператор $\mathcal{L}$ (9.45), имеется зависимость, то число данных рассеяния уменьшается. Доказать, что

1) если $r = -\bar{q}$, то $\tilde{a}(k) = \overline{a(\bar{k})}$, $\tilde{b}(k) = -\overline{b(\bar{k})}$
 $\tilde{N} = N$, $\tilde{k}_j = \bar{k}_j$, $\tilde{b}_j = -\bar{b}_j$, $j = 1, 2, \dots, N$;

2) если $r = -q$, то $\tilde{a}(k) = a(-k)$, $\tilde{b}(k) = -b(-k)$,
 $\tilde{N} = N$, $\tilde{k}_j = -k_j$, $\tilde{b}_j = -b_j$, $j = 1, 2, \dots, N$;

3) если $r = -q$, $\bar{q} = q$, то свойства, приведенные в п.1. и п.2.,
 пополняются следующими: $\overline{c(k)} = c(-k)$, где $c(k)$ — любой из че-
 тырех коэффициентов $a(k)$ и т.д., нули k_j , $\tilde{k}_j$ расположены сим-
 метрично мнимой оси или на ней, если $\operatorname{Re} k_j = 0$, то числа b_j ве-
 щественные, если $k_{1,2} = \pm \alpha + i\beta$, то $b_1 = \bar{b}_2$.

9.49. Пусть $\mathcal{E}(\bar{\Delta})$, где $\bar{\Delta} = \{x, y : -\infty < x \leq y < \infty\}$, — множество
 функций

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix},$$

обладающих свойствами:

при любом $h \in R$ функция $F(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$ равномерно
 на $\bar{H} = [h; \infty)$,

интегралы

$$\int_x^\infty \left\| \frac{\partial^m F(x, y)}{\partial x^m} \right\| dy, \quad m = 0, 1$$

сходятся равномерно на $\bar{H}$,

при любом $x \in \bar{H}$ сходится интеграл

$$\int_x^\infty \left\| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right\| dy.$$

Доказать, что существует единственная пара функций

$$K(x, y) = \begin{pmatrix} K_1(x, y) \\ K_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad \tilde{K}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{K}_1(x, y) \\ \tilde{K}_2(x, y) \end{pmatrix}$$

из $\mathcal{E}(\bar{\Delta})$, таких, что

$$\begin{aligned} f^+(x, k) &= e^{ikx} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_x^\infty K(x, y) e^{iky} dy, \\ \tilde{f}^+(x, k) &= e^{-ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_x^\infty \tilde{K}(x, y) e^{-iky} dy, \end{aligned} \tag{9.56}$$

$$K_1(x, x) = -\frac{1}{2}q(x), \quad \tilde{K}_2(x) = -\frac{1}{2}r(x). \quad (9.57)$$

Пример 9.9. Обратная задача рассеяния для системы уравнений (9.44) заключается в восстановлении потенциалов $q(x)$ и $r(x)$ по данным рассеяния s . Преобразование от s к q и r осуществляется с помощью интегральных уравнений ГЛМ. Их вывод будет сделан в предположении, что нули функций $a(k)$ и $\tilde{a}(k)$ простые и не лежат на вещественной оси. В этом случае данными рассеяния являются

$$R(k), \quad k_m \quad (Im \, k_m > 0), \quad c_m = -\frac{ib_m}{a'(k_m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N,$$

$$\tilde{R}(k), \quad \tilde{k}_m \quad (Im \, \tilde{k}_m < 0), \quad \tilde{c}_m = \frac{i\tilde{b}_m}{\tilde{a}'(\tilde{k}_m)}, \quad m = 1, 2, \dots, \tilde{N}.$$

Исходным пунктом вывода служат разложения (9.52). Если в первое разложение подставить f^+ и $\tilde{f}^+$ в форме (9.56) и записать результат в виде

$$T(k)f^-(x, k) - e^{-ikx} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_x^\infty \tilde{K}(x, z)e^{-ikz}dz +$$

$$+ R(k)e^{ikx} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + R(k) \int_x^\infty K(x, z)e^{ikz}dz,$$

то после умножения на e^{iky} и интегрирования по k получится уравнение

$$\int_{-\infty}^\infty e^{ik(y-x)} \left[T(k)f^-(x, k)e^{ikx} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] dk =$$

$$= \int_{-\infty}^\infty e^{iky} dk \int_0^\infty \tilde{K}(x, z)e^{-ikz} dz + \int_{-\infty}^\infty R(k)e^{ik(y+x)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dk +$$

$$+ \int_{-\infty}^\infty R(k)e^{iky} dk \int_x^\infty K(x, z)e^{ikz} dz.$$

Это уравнение после преобразований, аналогичных проделанным в примере 9.5, принимает форму одного из уравнений ГЛМ:

при $x < y$

$$K(\tilde{x}, y) + F(x + y) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_x^\infty K(x, z) F(z + y) dz = 0, \quad (9.58)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k) e^{ikx} dk + \sum_{j=1}^N c_j e^{ik_j x}.$$

Подобным же образом осуществляется вывод второго уравнения ГЛМ:

при $x < y$

$$K(x, y) + \tilde{F}(x + y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_x^\infty \tilde{K}(x, z) \tilde{F}(z + y) dz = 0, \quad (9.59)$$

где

$$\tilde{F}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{R}(k) e^{-ikx} dk + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \tilde{c}_j e^{-i\tilde{k}_j x}.$$

Чтобы определить потенциалы $q(x)$ и $r(x)$, нужно найти решения K и $\tilde{K}$ системы интегральных уравнений ГЛМ (9.58), (9.59) и воспользоваться формулами (9.57).

Распространение полученных результатов на случай кратных нулей функций $a(k)$, $\tilde{a}(k)$ достигается посредством предельного перехода.

9.50. Показать, что

1) если $r = -\bar{q}$, то $\tilde{K} = A^\tau \bar{K}$, $\tilde{R}(k) = -\overline{R(k)}$, $\tilde{N} = N$, $\tilde{c}_j = \bar{c}_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, $\tilde{F} = -\bar{F}$;

2) если $r = -q$, то $\tilde{K} = A^\tau K$, $\tilde{R}(k) = -R(-k)$, $\tilde{N} = N$, $\tilde{c}_j = -c_j$, $j = 1, 2, \dots, N$, $\tilde{F} = -F$;

3) если $r = -q$ и $\bar{q} = q$, то к соотношениям п.2 добавляются $\bar{K} = K$ и $\bar{F} = F$. Матрица A определена в примере 9.7.

9.51. Написать систему уравнений ГЛМ в следующих случаях:

1) $r = -\bar{q}$; 2) $r = -q$; 3) $r = -q$, $\bar{q} = q$.

9.52. Решить обратную задачу рассеяния для уравнения (9.44), если $R(k)=0$ и 1. $r=-\bar{q}$; 2. $r=-q$, $\bar{q}=q$.

Пример 9.10. МОЗР применим для решения задачи Коши вида

$$\begin{aligned} q_t &= \Phi_1((q), (r)), \\ r_t &= \Phi_2((q), (r)), \end{aligned} \quad (9.60)$$

$$q(x, 0) = q_0(x), \quad r(x, 0) = r_0(x), \quad (9.61)$$

где (q) и (R) — наборы функций и их частных производных по переменной x .

Реализация МОЗР основан на построении пары Лакса $(\mathcal{L}-\mathcal{A})$ (см. пример 9.6). Система (9.60) включает ряд актуальных нелинейных уравнений математической физики, для которых оператор $\mathcal{L}$ имеет структуру (9.45). Для этого оператора ставится спектральная задача

$$\mathcal{L}\psi = k\psi. \quad (9.62)$$

Линейный оператор $\mathcal{A}$, зависящий от (q) и (r) , определяет эволюцию во времени собственных функций оператора $\mathcal{L}$

$$\psi_t = \mathcal{A}\psi \quad (9.63)$$

и удовлетворяет уравнению Лакса

$$\mathcal{L}_t = [\mathcal{A}, \mathcal{L}], \quad (9.64)$$

которое должно быть эквивалентно системе (9.60). Условия (9.63), (9.64) обеспечивают изоспектральность оператора $\mathcal{L}$. Действительно, если тождество (9.62) продифференцировать по t

$$\mathcal{L}_t\psi + \mathcal{L}\psi_t = k_t\psi + k\psi_t,$$

подставить $\mathcal{L}_t = [\mathcal{A}, \mathcal{L}]$, $k\psi_t = k\mathcal{A}\psi = \mathcal{A}k\psi = \mathcal{A}\mathcal{L}\psi$, то получится соотношение $[\mathcal{A}, \mathcal{L}]\psi = k_t\psi + [\mathcal{A}, \mathcal{L}]\psi$, откуда $k_t = 0$.

Решение задачи Коши (9.60), (9.61) осуществляется по следующей схеме.

1. Прямая задача рассеяния: $q(x, 0), r(x, 0) \longrightarrow s(0)$ (решение уравнения (9.62)).

2. Эволюция во времени данных рассеяния: $s(0) \longrightarrow s(t)$ (решение уравнения (9.63)).

3. Обратная задача рассеяния: $s(t) \longrightarrow r(x, t)$ (решение системы уравнений ГЛМ (9.53), (9.54)).

Оператор $\mathcal{A}$, удовлетворяющий уравнению (9.64), представляется собой матрицу (2×2) . Для решения уравнений мКдФ, СГ и НУШ достаточно ограничиться матрицей вида

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} U & V \\ W & -U \end{pmatrix}. \quad (9.65)$$

Операторное равенство (9.64) $\mathcal{A}\mathcal{L}\psi - \mathcal{L}\mathcal{A}\psi = \mathcal{L}_t\psi$ можно преобразовать к виду

$$([\Lambda(ikI + B), \mathcal{A}] + \mathcal{A}_x + \Lambda B_t)\psi = 0, \quad (9.66)$$

если учесть, что (см. (9.47))

$$\mathcal{L}\psi = k\psi, \quad \mathcal{L} = iD\Lambda + iB, \quad \psi_x = -\Lambda B\psi - ik\Lambda\psi.$$

Достаточным условием обращения в нуль левой части уравнения (9.66) является равенство нулю коэффициентов при ψ_1 и ψ_2 :

$$\begin{cases} U_x + rV - qW = 0, \\ V_x + 2qU + 2ikV - q_t = 0, \\ W_x - 2rU - 2ikW - r_t = 0. \end{cases} \quad (9.67)$$

Если считать k независимым параметром, принимающим произвольные значения (как большие, так и малые), то можно отыскивать частные решения системы (9.67) в виде разложений по степеням k (как положительным, так и отрицательным). Пусть

$$\begin{aligned} U &= U_0 + U_1k + U_2k^2, \\ V &= V_0 + V_1k + V_2k^2, \\ W &= W_0 + W_1k + W_2k^2. \end{aligned} \quad (9.68)$$

Величины $U_0, \dots, W_2$ определяются из условия равенства нулю коэффициентов при степенях k в тождествах, которые получаются подстановкой разложений (9.68) в систему (9.67). Коэффициент при k^3 обратится в нуль, если $V_2 = W_2 = 0$. Коэффициент при k^2 окажется равным нулю, если $U_{2x}=0$, т.е. $U_2=c_2$, $V_1=iqc_2$, $W_1=irc_2$. Из равенства нулю коэффициента при k вытекает, что $U_{1x}=0$, откуда $U_1=c_1$, $V_0=-\frac{1}{2}c_2q_x+ic_1q$, $W_0=\frac{1}{2}c_2r_x+ic_1r$. Свободный член будет аннулирован при условии $U_{0x}=\frac{1}{2}c_2(qr)_x$, т.е. $U_0=\frac{1}{2}c_2qr+c_0$,

$$\begin{aligned} q_t + \frac{1}{2}c_2q_{xx} - ic_1q_x - c_2q^2r - 2c_0q &= 0, \\ r_t - \frac{1}{2}c_2r_{xx} - ic_1r_x + c_2qr^2 + 2c_0r &= 0. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Уравнения (9.69) представляют собой одну из реализаций системы (9.60). В частном случае $r=\pm\bar{q}$ система (9.69) совместна при условиях $\bar{c}_i=-c_i$, $i=0, 1, 2$. Если $c_0=c_1=0$, $c_2=-2i$, то получается нелинейное уравнение Шредингера

$$iq_t + q_{xx} \pm 2q|q|^2 = 0,$$

которому соответствует оператор $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \pm i|q|^2 - 2ik^2 & iq_x + 2qk \\ \pm i\bar{q}_x \mp 2\bar{q}k & \mp i|q|^2 + 2ik^2 \end{pmatrix}.$$

В отличие от пары Лакса для уравнения КдФ в данном случае $\mathcal{L}$ и $\mathcal{A}$ — матричные операторы, оператор $\mathcal{L}$ в общем случае не эрмитов, оператор $\mathcal{A}$ — не антисимметричный, не дифференциальный, может зависеть от k .

9.53. Построить пару Лакса для 1) модифицированного уравнения мКдФ $q_t \pm 6qq^2 + q_{xxx} = 0$; 2) СГ (9.4).

9.54. Определить зависимость от переменной t данных рассеяния спектральной задачи (9.62) в тех случаях, когда система эволюционных уравнений (9.64) сводится к 1) уравнению мКдФ (9.2); 2) НУШ (9.3); 3) уравнению СГ (9.4) при дополнительном условии $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \pmod{2\pi}$.

9.55. Построить односолитонное решение НУШ (9.3); определить скорость v_0 и амплитуду u_0 солитона.

9.56. Найти односолитонное решение уравнения мКдФ (9.2); каковы скорость v_0 и амплитуда u_0 солитона?

9.57. Найти решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения мКдФ (9.2), если потенциалу $u(x, 0)$ соответствуют данные рассеяния

$$s(0) = \{R(k, 0) = 0, i\beta_1, i\beta_2, c_1(0), c_2(0)\}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2,$$

где $i\beta_{1,2}$ — простые нули функции $a(k)$. Доказать, что решение состоит из двух солитонов, взаимодействующих друг с другом упругим образом. Определить сдвиг фаз солитонов в результате взаимодействия.

9.58. Найти решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения мКдФ (9.2), если потенциалу $u(x, 0)$ соответствуют данные рассеяния

$$s(0) = \{R(k, 0) = 0, k_1, k_2, c_1(0), c_2(0)\},$$

где $k_1 = \alpha + i\beta$ — простой нуль функции $a(k)$, $\alpha > 0, \beta > 0$. Показать, что $u(x, t)$ — осциллирующая функция с солитонной огибающей (бризер). Найти фазовую скорость бризера и скорость солитонной огибающей.

9.59. Найти решение уравнения СГ (9.4), соответствующее данным рассеяния

$$s(0) = \{R(k, 0) = 0, i\beta, c(0)\}, \quad \beta > 0,$$

где $i\beta$ — простой нуль функции $a(k)$, если

$$\begin{aligned} 1) \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 2\pi, \\ 2) \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 2\pi, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0. \end{aligned}$$

Убедиться в том, что при фиксированном t функция $u(x, t)$ в первом случае монотонно возрастает (кинк), во втором — монотонно убывает (антикинк), в обоих случаях u_x представляет собой уединенную волну (солитон).

9.60. Построить решение $u(x, t)$ уравнения СГ (9.4), соответствующее данным рассеяния

$$s(0) = \{R(k, 0) = 0, i\beta_1, i\beta_2, c_1(0), c_2(0)\}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2,$$

где $i\beta_{1,2}$ — простые нули функции $a(k)$, при дополнительном условии $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$. Доказать, что решение представляет собой суперпозицию (нелинейную) двух кинков, которые взаимодействуют друг с другом упругим образом.

9.61. Записать решение задачи 9.60 при условии $4\beta_1\beta_2=1$ в переменных $\xi=x+t$, $\tau=x-t$; рассмотреть кратный нуль $\beta_1=\beta_2=\frac{1}{2}$.

9.62. Найти решение уравнения СГ (9.4) при дополнительном условии $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$, соответствующее данным рассеяния

$$s(0) = \{R(k, 0) = 0, k_1, k_2, c_1(0), c_2(0)\}, \quad k_1 = \alpha + i\beta,$$

где k_1 — простой нуль функции $a(k)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Показать, что решение представляет собой пульсирующий солитон (бризер). Записать решение в переменных $\xi=x+t$, $\tau=x-t$ и рассмотреть случай $|k_1|=1/2$.

9.63. Доказать, что уравнения $u_t - 6u^2u_x + u_{xxx} = 0$ (МКдФ) и $iu_t + u_{xx} - 2u|u|^2 = 0$ (НУШ) не имеют солитонных решений.

9.2. Метод преобразований Бэклунда

Пример 9.11. Пусть $D(u)$ и $E(u)$ — дифференциальные уравнения с частными производными,

$$B_j((u), (v), (k)) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (9.70)$$

— соотношения, в которых (u) , (v) наборы функций и их производных, (k) — набор параметров. Соотношения (9.70) называются преобразованиями Бэклунда (ПБ), если

1°. они отображают $D(u)=0$ в $E(v)=0$ (т.е., если u — решение уравнения $D(u)=0$, то v — решение уравнения $E(v)=0$) и наоборот;

2°. при условии $D(u)=0$ ($E(v)=0$) из них можно найти решение уравнения $E(v)=0$ ($D(u)=0$).

ПБ, связывающие решения одного и того же уравнения, называются автопреобразованиями Бэклунда (АПБ).

Уравнения мКдФ, СГ и НУШ — частные случаи системы (9.60). Возможен единый подход к построению АПБ для этой группы уравнений, суть которого заключается в установлении соответствия между решениями $p_1=(r_1, q_1)^\tau$ и $p_2=(r_2, q_2)^\tau$ системы (9.60) и данными рассеяния для уравнения (9.44) $\mathcal{L}_j\psi=k\psi$ с потенциалами $q_j, r_j, j=1, 2$. Плодотворность подобного метода объясняется следующим фактом: если спектр оператора $\mathcal{L}_2$ отличается от спектра оператора $\mathcal{L}_1$ конечным числом собственных значений, что достаточно просто задать в терминах данных рассеяния, то решение p_2 получается из решения p_1 добавлением солитонных решений.

Отправной точкой построения АПБ служат равенства (9.54) и (9.55). Здесь удобно ввести билинейную форму

$$(p, h) = \int_{-\infty}^{\infty} p^\tau(\xi, t) h(\xi, t, k) d\xi \quad (9.71)$$

и переписать указанные равенства, придав им форму:

$$\begin{aligned} a_1 a_2 (R_2 + R_1) &= (p_2 + p_1, h), \\ a_1 a_2 (R_2 - R_1) &= (\Lambda(p_2 - p_1), h), \\ \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 (\tilde{R}_2 + \tilde{R}_1) &= (p_2 + p_1, \tilde{h}), \\ \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 (\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1) &= -(\Lambda(p_2 + p_1), \tilde{h}). \end{aligned} \quad (9.72)$$

В последующих преобразованиях используется матричный ин-тегро-дифференциальный оператор. Он возникает, если произведение $f_1^- g_2^-, f_2^- g_1^-$ в форме (9.142) (см. решение задачи 9.45) внести в правую часть (9.140) и употребить матричную запись

$$\mathcal{Z}h = kh, \quad (9.73)$$

в которой

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} -D + \int_{-\infty}^x d\xi q^\tau(x, t) r(\xi, t) & \int_{-\infty}^x d\xi q^\tau(x, t) \Sigma q(\xi, t) \\ -\int_{-\infty}^x d\xi r^\tau(x, t) \Sigma r(\xi, t) & D - \int_{-\infty}^x d\xi r^\tau(x, t) q(\xi, t) \end{pmatrix},$$

где $q^\tau = (q_1, q_2)$, $r^\tau = (r_1, r_2)$, матрица Σ определена в примере 9.7. Сопряженный оператор $\mathcal{Z}^*$ вводится посредством билинейной формы (9.71)

$$(\mathcal{Z}^* p, h) = (p, \mathcal{Z} h) \quad (9.74)$$

и представляет собой матрицу

$$\mathcal{Z}^* = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} D + \int_x^\infty d\xi r^\tau(x, t) q(\xi, t) & -\int_x^\infty d\xi r^\tau(x, t) \Sigma r(\xi, t) \\ \int_x^\infty d\xi q^\tau(x, t) \Sigma q(\xi, t) & -D - \int_x^\infty d\xi q^\tau(x, t) r(\xi, t) \end{pmatrix}.$$

Техника его построения сводится к интегрированию по частям. Так как $\mathcal{Z}$ можно представить суммой матриц, в каждой из которых лишь один элемент отличен от нуля, то достаточно рассмотреть частный случай оператора

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} q_1(x, t) \int_{-\infty}^x d\xi r_1(\xi, t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построение $\mathcal{Z}^*$ состоит в преобразовании билинейной формы

$$\begin{aligned}
 (p, \mathcal{Z}h) &= \int_{-\infty}^{\infty} p^\tau \mathcal{Z}h d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} p_1 \mathcal{Z}_{11} h_1 d\xi = \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} p_1(\xi, t) q_1(\xi, t) d\xi \int_{-\infty}^{\xi} r_1(s, t) h_1(s, t, k) ds = \\
 &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{\infty} p_1(\eta, t) q_1(\eta, t) d\eta \right) d\xi \int_{-\infty}^{\xi} r_1(s, t) h_1(s, t, k) ds = \\
 &= -\frac{1}{2i} \int_{\xi}^{\infty} p_1(\eta, t) q_1(\eta, t) d\eta \int_{-\infty}^{\xi} r_1(s, t) h_1(s, t, k) ds \Bigg|_{\xi=-\infty}^{\xi=\infty} + \\
 &+ \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} r_1(\xi, t) h_1(\xi, t, k) d\xi \int_{\xi}^{\infty} p_1(\eta, t) q_1(\eta, t) d\eta = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1 \mathcal{Z}_{11}^* p_1 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{Z}^* p)^\tau h d\xi = (\mathcal{Z}^* p, h).
 \end{aligned}$$

Пусть $\omega(k)$ — произвольный многочлен. Исходя из соотношений (9.72), можно составить комбинации

$$\begin{aligned}
 a_1 a_2 [R_2 - R_1 + \omega(k)(R_2 + R_1)] &= \\
 &(\Lambda(p_2 - p_1), h) + (p_2 + p_1, \omega(k)h), \\
 -\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 [\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 - \omega(k)(\tilde{R}_2 + \tilde{R}_1)] &= \\
 &(\Lambda(p_2 - p_1), \tilde{h}) + (p_2 + p_1, \omega(k)\tilde{h}).
 \end{aligned}$$

Теперь вступают в действие формулы (9.73) и (9.74), с помощью

которых последние два выражения преобразуются к виду

$$a_1 a_2 [R_2 - R_1 + \omega(k)(R_2 + R_1)] + \\ = (\Lambda(p_2 - p_1) + \omega(\mathcal{Z}^*)(p_2 + p_1), h), \quad (9.75)$$

$$-\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 [\tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 - \omega(k)(\tilde{R}_2 + \tilde{R}_1)] + \\ \left(\Lambda(p_2 - p_1) + \omega(\mathcal{Z}^*)(p_2 + p_1, \tilde{h}) \right). \quad (9.76)$$

Такая форма записи подсказывает достаточные условия, при которых соотношения (9.75) (9.76) удовлетворяются тождественно по k при любом многочлене $\omega(k)$:

$$\Lambda(p_2 - p_1) + \omega(\mathcal{Z}^*)(p_1 + p_2) = 0, \quad (9.77)$$

$$R_2 - R_1 + \omega(k)(R_2 + R_1) = 0, \\ \tilde{R}_2 - \tilde{R}_1 - \omega(k)(\tilde{R}_2 + \tilde{R}_1) = 0,$$

или

$$R_2 = \frac{1 - \omega(k)}{1 + \omega(k)} R_1, \quad \tilde{R}_2 = \frac{1 + \omega(k)}{1 - \omega(k)} \tilde{R}_1. \quad (9.78)$$

Соотношение (9.77) имеет структуру (9.70). Из-за отсутствия производных по t из него нельзя определить однозначно одну из функций, задавшись другой. Чтобы иметь полную систему АПБ, нужно построить еще одно соотношение типа (9.70), содержащее производные по t . Для решения этой задачи привлекается система (9.60).

Наиболее простая форма АПБ (9.77) соответствует линейной функции $\omega(k) = \alpha k + \beta$. Если распорядиться коэффициентами α и β так, чтобы

$$\frac{\omega - 1}{\omega + 1} = \frac{k - \tilde{k}_1}{k - k_1}, \quad \text{т.е.,} \quad \omega = \frac{2k - (k_1 + \tilde{k}_1)}{\tilde{k}_1 - k_1},$$

где $\text{Im } k_1 > 0$, $\text{Im } \tilde{k}_1 < 0$, k_1 и $\tilde{k}_1$ не являются ни полюсами, ни нулями функций $R_{1,2}$ и $\tilde{R}_{1,2}$ соответственно, то

$$R_2 = -\frac{k - \tilde{k}_1}{k - k_1} R_1, \quad \tilde{R}_2 = -\frac{k - k_1}{k - \tilde{k}_1} \tilde{R}_1. \quad (9.79)$$

Следовательно, спектр оператора $\mathcal{L}_2$ будет отличаться от спектра оператора $\mathcal{L}_1$ двумя дополнительными собственными значениями k_1 и $\tilde{k}_1$. Итак, выбор линейной функции $\omega(k)$ фиксирует АПБ (9.77):

$$(q_1 + q_2)_x + (q_1 - q_2) \int_x^\infty (q_1 r_1 - q_2 r_2) d\xi + \\ + 2i(k_1 q_1 + \tilde{k}_1 q_2) = 0, \quad (9.80)$$

$$(r_1 + r_2)_x + (r_1 - r_2) \int_x^\infty (q_1 r_1 - q_2 r_2) d\xi - \\ - 2i(\tilde{k}_1 r_1 + k_1 r_2) = 0. \quad (9.81)$$

9.64. Доказать коммутативность АПБ (9.80), (9.81): если к решению p_0 системы (9.60) последовательно применить АПБ с параметрами k_1 , $\tilde{k}_1$ и k_2 , $\tilde{k}_2$, то результат не зависит от порядка преобразований (рис.9.1)¹.

9.65. Показать, что при $r = -q$, $\bar{q} = q$ АПБ (9.80), (9.81) преобразуются к виду

$$(w_1 + w_2)_x = 2ik \sin(w_1 - w_2), \quad (9.82)$$

где

$$w_i = \int_x^\infty q_i d\xi, \quad i = 1, 2$$

— потенциальные функции решений.

¹ Диаграмма из [48]

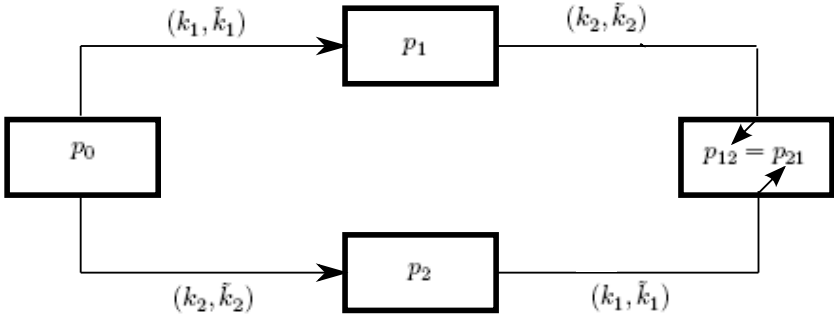


Рис. 9.1

9.66. При $r=-q$, $\bar{q}=q$ установить формулу, выражающую принцип нелинейной суперпозиции,

$$(k_2 - k_1) \operatorname{tg} \frac{w - w_0}{2} = (k_1 + k_2) \operatorname{tg} \frac{w_1 - w_2}{2}, \quad (9.83)$$

где w_0 , w_1 , w_2 , w — потенциальные функции решений (см. задачу 9.65), связанных между собой АПБ по схеме, изображенной на рис 9.1.

9.67. Построить АПБ для уравнения мКдФ (9.2) в следующей форме:

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2)_x - 2ik \sin(w_1 - w_2) &= 0, \\ (w_1 - w_2)_t + 2(w_{1x}^3 - w_{2x}^3) + (w_1 - w_2)_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (9.84)$$

9.68. Найти односолитонное решение уравнения мКдФ (9.2), исходя из АПБ (9.84).

9.69. Используя принцип нелинейной суперпозиции (9.83), решить задачи 9.57, 9.58.

9.70. Показать, что АПБ для уравнения СГ (9.4) могут быть представлены в форме

$$\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)_x = 2ik \sin \frac{u_1 - u_2}{2}, \quad (9.85)$$

$$\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)_t = \frac{1}{2ik} \sin \frac{u_1 + u_2}{2}. \quad (9.86)$$

9.71. Решить задачу 9.59, применяя АПБ (9.85), (9.86).

9.72. Применяя принцип нелинейной суперпозиции (9.83), решить задачи 9.60, 9.62.

9.73. Построить решение $u(x, t)$ уравнения СГ (9.4), соответствующее собственному значению $k=i\beta$ кратности 2, при условии $\lim_{|x|\rightarrow\infty} u(x, t)=0$.

9.74. Построить АПБ для уравнения $u_{xx} + u_{yy} = \sin u$ и найти однокинковое решение, удовлетворяющее условиям $u(\infty, y)=2\pi$, $u(-\infty, y)=0$.

9.75. Найти регулярное и сингулярное односолитонные решения НУШ (9.3), применяя АПБ для этого уравнения.

9.76. Построить АПБ, связывающие два решения u_1 и u_2 уравнения КдФ (9.1), в форме

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2)_x - (w_1 - w_2)^2 + k^2 &= 0, \\ (w_1 - w_2)_t - 6(w_{1x}^2 - w_{2x}^2) + (w_1 - w_2)_{xxx} &= 0, \end{aligned} \quad (9.87)$$

где $u_i = -2w_{ix}$, $i=1, 2$.

9.77. Применяя АПБ (9.87), построить регулярное и сингулярное односолитонные решения уравнения КдФ.

9.78. Доказать коммутативность АПБ для уравнения КдФ: если решение u_0 преобразовать последовательным применением АПБ с параметрами k_1 и k_2 , то результирующее решение не зависит от порядка преобразований (рис.9.2)².

²Диаграмма из [48]

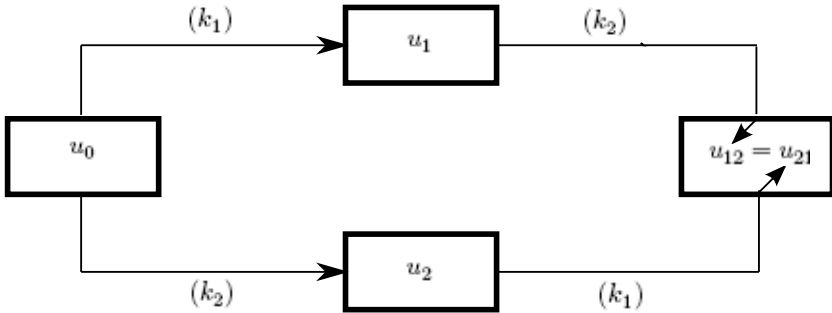


Рис. 9.2

9.79. Пусть u_0, u_1, u_2, u — решения уравнения КдФ, связанные между собой АПБ по схеме, изображенной на рис. ???. Доказать, что потенциальная функция w (см. задачу 9.65) выражается через остальные по формуле (принцип нелинейной суперпозиции)

$$(w - w_0)(w_2 - w_1) = k_2^2 - k_1^2. \quad (9.88)$$

9.80. Найти двухсолитонное решение уравнения КдФ (9.1), применяя нелинейный принцип суперпозиции (9.40).

9.81. Построить односолитонное решение (регулярное и сингулярное) уравнения (9.43), применяя АПБ для этого уравнения.

9.82. Известно, что $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — решения уравнений КдФ (9.1) и мКдФ $v_t + 6\sigma v_2 v_x + v_{xxx} = 0$, где $\sigma = \pm 1$. 1. Показать, что при определенных α и β имеется зависимость $u = \alpha v^2 + \beta v_x$ (преобразование Миуры). 2. Построить ПБ, связывающие решения u и v уравнений КдФ и мКдФ. 3. Найти решение уравнения мКдФ, если $u=0$.

9.83. Подстановка Коула-Хопфа $u = -2\nu v_x / v$ преобразует решение уравнения Бюргерса $u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0$, $\nu > 0$ в решение уравнения теплопроводности $v_t = \nu v_{xx}$. Доказать это утверждение и построить ПБ, связывающие решения приведенных уравнений.

9.84. Решить задачу Коши для уравнения Бюргерса:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x - \nu u_{xx} &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < t, \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned}$$

9.85. Доказать, что соотношения

$$v_x = u_x + \frac{2k}{\alpha} e^{\frac{\alpha}{2}(u+v)}, \quad (9.89)$$

$$v_t = -u_t - \frac{1}{k} e^{\frac{\alpha}{2}(u-v)}, \quad (9.90)$$

где k — произвольный параметр, являются ПБ для уравнения Лиувилля

$$u_{xt} = e^{\alpha u} \quad (9.91)$$

и волнового уравнения $u_{xt}=0$.

9.86. Применяя ПБ (9.89), (9.90), найти общее решение уравнения Лиувилля (9.91).

9.3. Метод Хироты

Пример 9.12. В методе Хироты ([69]) используется линейный дифференциальный оператор, действующий на упорядоченную пару функций $a(x, t)$ и $b(x, t)$ по правилу

$$\begin{aligned} D_x^m D_t^n a \cdot b &= \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n a(x, t) b(x', t') \Big|_{x'=x, t'=t}. \end{aligned} \quad (9.92)$$

Оператор (9.92) обладает следующими свойствами:

$$D_x^m a \cdot 1 = \frac{\partial t^m a}{\partial t x^m}, \quad (9.93)$$

$$D_x^m a \cdot b = (-1)^m D_x^m b \cdot a, \quad (9.94)$$

$$D_x^{2m+1} a \cdot a = 0, \quad (9.95)$$

$$D_x^m a \cdot b = D_x^{m-1} (a_x \cdot b - a \cdot b_x), \quad (9.96)$$

$$D_x^{2m} a \cdot a = 2 D_x^{2m-1} a_x \cdot a,$$

$$D_x D_t a \cdot a = 2 D_x a_t \cdot a = 2 D_t a_x \cdot a, \quad (9.97)$$

$$D_x^m e^{k_1 x} \cdot e^{k_2 x} = (k_1 - k_2)^m e^{(k_1 + k_2)x}.$$

Все эти свойства являются непосредственным следствием определения и доказываются по единой схеме.

Доказательство свойства (9.93).

$$D_x^m a \cdot 1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m a(x, t) \Big|_{x'=x} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m a(x, t) = \frac{\partial^m a}{\partial x^m}.$$

Доказательство свойства (9.94).

$$\begin{aligned} D_x^m f_1 \cdot f_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m f_1(x) f_2(x') \Big|_{x'=x} = \\ &= \sum_{s=0}^m C_m^s (-1)^{m-s} f_1^{(s)}(x) f_2^{(m-s)}(x) = \\ &= \sum_{s=0}^m C_m^s (-1)^{m-s} k_1^s k_2^{m-s} f_1(x) f_2(x) = (k_1 - k_2)^m f_1(x) f_2(x). \end{aligned}$$

Доказательство свойства (9.97). Пусть $f_j = \exp(k_j x)$, где

$j=1, 2$, тогда

$$\begin{aligned}
 D_x^m f_1 \cdot f_2 &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m f_1(x) f_2(x') \Big|_{x'=x} = \\
 &= \sum_{s=0}^m C_m^s (-1)^{m-s} f_1^{(s)}(x) f_2^{(m-s)}(x) = \\
 &= \sum_{s=0}^m C_m^s (-1)^{m-s} k_1^s k_2^{m-s} f_1(x) f_2(x) = (k_1 - k_2)^m f_1(x) f_2(x).
 \end{aligned}$$

Для доказательства этого свойства можно применить также метод математической индукции.

9.87. Задан многочлен $P(\alpha, \beta)$ относительно α и β ; показать, что

$$\begin{aligned}
 P(D_x, D_t) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} &= P(k_1 - k_2, \omega_1 - \omega_2) e^{\eta_1 + \eta_2} = \\
 &= \frac{P(k_1 - k_2, \omega_1 - \omega_2)}{P(k_1 + k_2, \omega_1 + \omega_2)} e^{\eta_1 + \eta_2 \cdot 1}, \quad (9.98)
 \end{aligned}$$

где $\eta_j = k_j x + \omega_j t + \delta_j$, $j = 1, 2$.

9.88. Дан многочлен

$$P(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1^4. \quad (9.99)$$

Установить тождества

$$P(D_x, D_t) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = -P(D_x, D_t) e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12} \cdot 1}, \quad (9.100)$$

$$\begin{aligned}
 p_{123} P(D_x, D_t) e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \cdot e^{\eta_3} &= \\
 &= -P(D_x, D_t) e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + A_{12} + A_{23} + A_{31} \cdot 1}, \quad (9.101)
 \end{aligned}$$

где

$$\eta_i = k_i x - k_i^3 t + \delta_i, \quad A_{ij} = 2 \ln \left| \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \right|, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$p_{123} a_{123} = (a_{123} + a_{231} + a_{312})$ — оператор циклической перестановки и суммирования.

9.89. Разложение функции $a(x)$ в ряд Тэйлора можно записать в виде (см.(9.93))

$$a(x + \varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{(m)}(x)\varepsilon^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} D_x^m a \cdot 1 e^{\varepsilon D_x} a \cdot 1.$$

В связи с этим вводится (по определению) оператор

$$e^{\varepsilon D_x} a \cdot b = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^m}{m!} D_x^m a \cdot b. \quad (9.102)$$

Показать, что

$$e^{\varepsilon D_x} a \cdot b = a(x + \varepsilon) b(x - \varepsilon). \quad (9.103)$$

9.90. Пусть $D_j = \varepsilon_j D_x + \delta_j D_t$, $j=1, 2, 3$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \delta_3$ — константы. Установить тождество

$$\begin{aligned} & e^{D_1} (e^{D_2} a \cdot b) \cdot (e^{D_3} c \cdot d) = \\ & = e^{\frac{1}{2}(D_2 - D_3)} \left(e^{\frac{1}{2}(D_2 + D_3) + D_1} a \cdot d \right) \left(e^{\frac{1}{2}(D_2 + D_3) - D_1} c \cdot b \right), \end{aligned} \quad (9.104)$$

которое называется формулой обмена (b и d меняются местами с a и c).

9.91. Пусть

$$D_z = \varepsilon D_x + \delta D_t, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial t}{\partial t x} + \delta \frac{\partial}{\partial t}, \quad (9.105)$$

где ε и δ — константы. Доказать, что

$$e^{\gamma \frac{\partial}{\partial z}} \frac{G}{F} = \frac{e^{\gamma D_z} G \cdot F}{(ch \gamma D_z) F \cdot F}, \quad (9.106)$$

где $\exp(\gamma \frac{\partial}{\partial z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\gamma^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial z^m}$.

9.92. Для преобразования нелинейных уравнений применяются формулы, связывающие операторы $\frac{\partial}{\partial x}$ и D_x . Доказать, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{b} = \frac{1}{b^2} D_x a \cdot b, \quad (9.107)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{a}{b} = \frac{1}{b^2} D_x^2 a \cdot b - \frac{a}{b^3} D_x^2 b \cdot b, \quad (9.108)$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{a}{b} = \frac{1}{b^2} D_x^3 a \cdot b - \frac{3}{b^4} (D_x a \cdot b) (D_x^2 b \cdot b), \quad (9.109)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{a}{b} = & \frac{1}{b^2} D_x^4 a \cdot b - \frac{6}{b^4} (D_x^2 a \cdot b) (D_x^2 b \cdot b) + \\ & + \frac{6a}{b^5} (D_x^2 b \cdot b)^2 - \frac{a}{b^3} D_x^4 b \cdot b. \end{aligned} \quad (9.110)$$

9.93. Разложение обеих частей формулы обмена (9.104) в степенные ряды по $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \delta_3$ и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях позволяет получать различные операторные тождества. Доказать, что

$$\begin{aligned} (D_x^2 a \cdot b) c d - a b (D_x^2 c \cdot d) = \\ = D_x [(D_x a \cdot d) \cdot c b + a d \cdot (D_x c \cdot b)], \end{aligned} \quad (9.111)$$

$$(D_x D_t f \cdot f) g g - f f (D_x D_t g \cdot g) = 2 D_x (D_t f \cdot g) \cdot f g, \quad (9.112)$$

$$(D_x D_t f \cdot g) g g - f g (D_x D_t g \cdot g) = D_x (D_t f \cdot g) \cdot g g, \quad (9.113)$$

$$\begin{aligned} (D_x^4 f \cdot f) g g - f f (D_x^4 g \cdot g) = \\ = 2 D_x [(D_x^3 f \cdot g) \cdot f g - 3 (D_x^2 f \cdot g) \cdot (D_x f \cdot g)]. \end{aligned} \quad (9.114)$$

9.94. Свойство (9.103) при $x = n \in Z, \varepsilon = s \in Z$, записанное в виде

$$e^{s D_n} a_n \cdot b_n = a_{n+s} b_{n-s}, \quad (9.115)$$

где введены обозначения $a_n = a(n), b_n = b(n)$, является определением оператора $\exp(s D_n)$, действующего на функции a_n, b_n целочисленного аргумента. Доказать, что

$$\begin{aligned} e^{\pm D_n} a_n \cdot 1 &= a_{n \pm 1}, & e^{\pm D_n} 1 \cdot a_n &= a_{n \mp 1}, \\ c h D_n a_n \cdot b_n &= \frac{1}{2} (a_{n+1} b_{n-1} + a_{n-1} b_{n+1}). \end{aligned}$$

9.95. Для оператора, определенного в предыдущей задаче, получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} sh^2\left(\frac{1}{2}D_n\right)a_n \cdot a_n &= \frac{1}{2}(a_{n-1}a_{n+1} - a_n^2), \\ sh^2\left(\frac{1}{2}D_n\right)e^{k_1 n} \cdot e^{k_2 n} &= sh^2 \frac{k_1 - k_2}{2} e^{(k_1 + k_2)n} = \\ &= \frac{sh^2 \frac{k_1 - k_2}{2}}{sh^2 \frac{k_1 + k_2}{2}} sh^2\left(\frac{1}{2}D_n\right)e^{(k_1 + k_2)n} \cdot 1. \end{aligned} \quad (9.116)$$

Пример 9.13. Метод Хироты состоит в преобразовании нелинейного дифференциального уравнения к системе билинейных уравнений, для решения которых используется метод теории возмущений (решения отыскиваются в форме степенных рядов по некоторому параметру).

Для решения уравнения СГ (9.4) применяется замена

$$u = 4 \arctg \frac{G}{F} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

рационализирующая $\sin u$. С помощью свойства (9.107) оператора D уравнение СГ преобразуется к виду

$$D_x(D_t G \cdot F) \cdot (F^2 + G^2) = FG(F^2 - G^2).$$

Свойство (9.113) позволяет перестроить последнее уравнение, придав ему форму

$$(F^2 - G^2)(D_x D_t F \cdot G - FG) - FGD_x D_t (F \cdot F - G \cdot G) = 0. \quad (9.117)$$

В силу произвольности F и G их можно связать дополнительным условием. Если потребовать обращения в нуль второго слагаемого в уравнении (9.117), то оно сведется к системе билинейных уравнений

$$\begin{aligned} D_x D_t (F \cdot F - G \cdot G) &= 0, \\ D_x D_t F \cdot G - FG &= 0. \end{aligned} \quad (9.118)$$

Пусть

$$\begin{aligned} F &= 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots, \\ G &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \varepsilon^3 g_3 + \dots \end{aligned} \quad (9.119)$$

Первое разложение имеет место в предположении, что $f_0 \neq 0$. Фиксация $f_0 = 1$ несущественна, так как $u(x, t)$ выражается через отношение G и F . Выбор $g_0 = 0$ непринципиален: результаты не изменятся, если предположить, что $g_0 \neq 0$. После подстановки рядов (9.119) в уравнения (9.118) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε получается бесконечная система

$$\begin{aligned} D_x D_t g_1 \cdot 1 &= g_1, \\ D_x D_t 1 \cdot f_1 &= 0, \\ D_x D_t (g_2 \cdot 1 + g_1 \cdot f_1) &= g_2 + g_1 f_1, \\ D_x D_t (2 \cdot f_2 + f_1 \cdot f_1 - g_1 \cdot g_1) &= 0, \\ D_x D_t (g_3 \cdot 1 + g_2 \cdot f_1 + g_1 \cdot f_2) &= g_3 + g_2 f_1 + g_1 f_2, \\ D_x D_t (1 \cdot f_3 + f_2 \cdot f_1 - g_2 \cdot g_1) &= 0 \end{aligned} \quad (9.120)$$

и т.д.

Первое уравнение системы обладает экспоненциальным решением $g_1 = \exp(\beta x + \frac{t}{\beta} + \delta)$, подстановка которого в остальные уравнения системы превращает их при $f_{m-1} = g_m = 0$, $m \geq 2$, в тождества. Таким образом,

$$u(x, t) = \pm 4 \operatorname{arctg} e^{\beta x + \frac{t}{\beta} + \delta} + 2\pi n$$

(параметр ε включен в δ). При $\varepsilon > 0$, $n=0$ функция $u(x, t)$ представляет собой либо кинк ($\beta > 0$), либо антикинк ($\beta < 0$) (см. задачу 9.59).

9.96. Применяя метод Хироты, построить двухкинковое решение уравнения СГ (9.4).

9.97. Получить одно- и двухсолитонные решения уравнения мКдФ (9.2) с помощью метода Хироты.

9.98. Построить односолитонное решение НУШ (9.3), используя метод Хироты.

9.99. Уравнение $u_{xt} - u + \alpha u^3 = 0$, $\alpha > 0$ имеет решение в виде уединенной волны

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \frac{1}{ch(kx + \frac{t}{k} + \delta)}.$$

Получить это решение.

9.100. Методом Хироты построить одно- и двухсолитонное решения уравнения КдФ (9.1).

9.101. Показать, что N -солитонное решение уравнения КдФ в билинейной форме (см. (9.164))

$$(D_x D_t + D_x^4) F \cdot F = 0 \quad (9.121)$$

имеет вид

$$F_N = \sum_{\mu=0,1} \exp \left(\sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j}^N \mu_i \mu_j A_{ij} \right), \quad (9.122)$$

где $N = 0, 1, 2, \dots$, величины η_i и A_{ij} определены в условии задачи 9.88, $\sum_{i=1}^0 \sum_{i < j}^0 = \sum_{i < j}^1 = 0$, а внешнее суммирование осуществляется по всем возможным комбинациям из

$$\mu_1 = 0, 1; \mu_2 = 0, 1; \dots; \mu_N = 0, 1.$$

Пример 9.14. Вывод АПБ в билинейной форме для уравнения КдФ. Функция F_N , заданная выражением (9.122), определяет N -солитонное решение уравнения КдФ и удовлетворяет уравнению (9.121), т.е. уравнению

$$(D_x D_t + D_x^4) F_N \cdot F_N = 0.$$

Из этого уравнения и уравнения для F_{N+1}

$$(D_x D_t + D_x^4) F_{N+1} \cdot F_{N+1} = 0;$$

посредством умножения первого на F_{N+1}^2 , второго на F_N^2 и почленного вычитания получается тождество

$$\begin{aligned} & [(D_x D_t + D_x^4) F_N \cdot F_N] F_{N+1} F_{N+1} - \\ & - [(D_x D_t + D_x^4) F_{N+1} \cdot F_{N+1}] F_N F_N = 0. \end{aligned}$$

В результате применения формул (9.112) и (9.114) при $f = F_N$ и $g = F_{N+1}$ тождество преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 2D_x \{ & [(D_t + D_x^3) F_N \cdot F_{N+1}] \cdot F_N F_{N+1} - \\ & - 3(D_x^2 F_N \cdot F_{N+1}) \cdot (D_x F_N \cdot F_{N+1}) \} = 0 \end{aligned}$$

и выполняется при следующих условиях, имеющих билинейную форму:

$$D_x^2 F_N \cdot F_{N+1} = \lambda_{N+1} F_N F_{N+1}, \quad (9.123)$$

$$(D_t + 3\lambda_{N+1} D_x + D_x^3) F_N \cdot F_{N+1} = 0, \quad (9.124)$$

где λ_{N+1} — произвольный параметр.

Соотношения (9.123) и (9.124), связывающие два решения уравнения КдФ в билинейной форме (9.121), являются АПБ для этого уравнения. Если решение F_N известно, то АПБ представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений относительно F_{N+1} .

9.102. Найти одно- и двухсолитонные решения уравнения КдФ в билинейной форме (9.121), используя АПБ для этого уравнения.

9.103. Показать, что N -солитонное решение уравнения КдФ в билинейной форме (9.121), удовлетворяющее АПБ (9.123), (9.124), имеет вид

$$F_N = \sum_{\varepsilon=\pm 1} \prod_{1 \leq i \leq j}^N \left(\frac{\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j}{k_i^2 - k_j^2} \right) \frac{\exp \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \eta_i \right)}{\prod_{i=1}^N \varepsilon_i k_i}, \quad (9.125)$$

где $\eta_i = k_i x - k_i^3 t + \delta_i$, $\prod_{i=1}^0 = \prod_{i < j}^0 = \prod_{i < j}^1 = 1$, $\sum_{i=1}^0 = 0$, а внешнее суммирование осуществляется по всем возможным комбинациям из $\varepsilon_1 = -1, 1$; $\varepsilon_2 = -1, 1$; $\dots$; $\varepsilon_N = -1, 1$.

9.104. Два решения $F_N^{(1)}$ и $F_N^{(2)}$ уравнения (9.121) называются эквивалентными, $F_N^{(1)} \sim F_N^{(2)}$, если они определяют одно и то же решение уравнения КдФ (9.1).

1. Доказать эквивалентность $e^{ax+b} F_N \sim F_N$, где a и b не зависят от x .

2. Записать решения F_1 и F_2 , определенные выражением (9.125), и доказать, что они эквивалентны решениям (9.167), (9.168).

3. Показать, что решения (9.122) и (9.125) эквивалентны.

9.105. Установить принцип нелинейной суперпозиции

$$D_x F_{N+1} \cdot F_{N-1} = \frac{1}{2} F_N \tilde{F}_N, \quad (9.126)$$

где $F_N = F_N(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_N)$ — решение уравнения (9.121), имеющего вид (9.125), $\tilde{F}_N = F_N(k_1, k_2, \dots, k_{N-1}, k_{N+1})$ получается заменой в F_N последнего аргумента k_N на k_{N+1} .

9.106. Найти решение F_2 уравнения КдФ в билинейной форме (9.121), используя принцип нелинейной суперпозиции (9.126), где F_0 и F_1 заданы выражением (9.125); показать, что F_2 также имеет вид (9.125).

9.107. Среди частных решений уравнения (9.121) имеются полиномы, каждый из которых порождает рациональное решение $u(x, t)$ уравнения КдФ (9.1). Пусть $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ — полиномиальные решения, расположенные в порядке возрастания степеней полиномов, а Φ_0 — полином наименьшей степени. Найти функции Φ_0, Φ_1, Φ_2 и соответствующие им решения $u_0(x, t)$, $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ (последнее — при условии $u_2(0, t) = 0$).

9.108. Полиномиальные решения Φ_N уравнения (9.121) получаются из выражения (9.125) при $K = (k_1, k_2, \dots, k_N) \rightarrow 0$; найти Φ_0, Φ_1, Φ_2 .

9.109. Пусть $F_N(x, t, K)$, где $K = (k_1, k_2, \dots, k_N)$ — решение уравнения (9.121) в форме (9.125); доказать, что

$$\lim_{K \rightarrow 0} F_N(x, t, K) = \Phi_N(x, t), \quad (9.127)$$

где Φ_N — полином степени $\frac{1}{2}N(N+1)$, обладающий свойством

$$\Phi(\alpha x, \alpha^3 t) = \alpha^{\frac{N(N+1)}{2}} \Phi_N(x, t).$$

9.110. Для полиномиальных решений (9.127) установить рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} D_x \Phi_{N+1} \cdot \Phi_{N-1} &= \frac{1}{2} \Phi_N^2, \\ (D_t + D_x^3) \Phi_{N+1} \cdot \Phi_N &= 0 \end{aligned}$$

и показать, что

$$\Phi_N(x, t) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{N(N+1)}{6} \right]} a_{N-s} x^{\frac{N(N+1)}{2} - 3st^s}, \quad a_N > 0. \quad (9.128)$$

9.111. Для построения рациональных решений уравнения КдФ (9.1) можно использовать полином $\Theta_N = \frac{1}{a_N} F_N \sim F_N$ (см. задачу 9.104). Вывести рекуррентные формулы

$$\begin{aligned} D_x \Theta_{N+1} \cdot \Theta_{N-1} &= (2N+1) \Theta_N^2, \\ (D_t + D_x^3) \Theta_{N+1} \cdot \Theta_N &= 0 \end{aligned}$$

и найти $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$.

9.112. Уравнение Буссинеска

$$u_{tt} - u_{xx} - 3(u^2)_{xx} - u_{xxx} = 0$$

модулирует распространение длинных волн на мелкой воде.

1. Найти одно- и двухсолитонные решения этого уравнения.
2. Построить рациональное решение, исходя из односолитонного решения.

9.113. Уравнение Кадомцева-Петвиашвили (двухмерное уравнение КдФ) имеет вид

$$(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + \sigma u_{yy} = 0, \quad \sigma = \pm 1.$$

1. Построить одно- и двухсолитонное решение этого уравнения.
2. Найти рациональное решение, используя односолитонное решение.

9.114. С точки зрения метода Хироты уравнения КдФ, Буссинеска, Кадомцева-Петвиашвили (задачи 9.100, 9.112, 9.113 соответственно) обладают общим свойством: функции F и G связаны соотношением $G = 2F_x$, так что решение

$$u = 2(\ln F)_{xx}. \quad (9.129)$$

К этому типу относятся

- 1) уравнение, моделирующее движение волн на мелкой воде

$$u_t - u_{xxt} - 3uu_t + 3u_x \int_x^\infty u_t d\xi + u_x = 0;$$

- 2) уравнение КдФ более высокого порядка

$$u_t + 45u^2u_{xx} + 15(u_xu_{xx} + uu_{xxx}) + u_{xxxxx} = 0;$$

применяя подстановку (9.129), найти односолитонное решение каждого из уравнений.

9.115. Показать, что по цепочке Тоды, движение которой описывается уравнениями (задача 1.106)

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \ln(1 + u_n) = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}, \quad (9.130)$$

может распространяться уединенная волна (солитон) сжатия или разрежения как в положительном, так и в отрицательном направлениях оси $0x$. Определить скорость v и ширину h волны. Как зависят v и h от амплитуды волны?

9.4. Другие методы построения точных решений

Пример 9.15. Метод разделения переменных. Некоторые нелинейные уравнения с неизвестной функцией $u(x, t)$ имеют решение в виде суммы произведений функций, каждая из которых зависит от одной переменной, т.е.

$$u(x, y) = \sum_{j=1}^{j=n} f_j(x)g_j(y) \quad (9.131)$$

Уравнение

$$u_t = au_{xx} + bu_x^2$$

имеет решение вида (9.131), а именно $u(x, t) = \varphi(t) + \psi(x)$. Действительно, подстановка $u(x, t)$ в уравнение превращает его в тождество $\varphi'(t) = af'' + bf'^2$, правая и левая части которого зависят от разных переменных. Это возможно, если каждая часть равна константе:

$$\varphi'(t) = \lambda, \quad af'' + bf'^2 = \lambda.$$

Отсюда $\varphi(t) = \lambda t + C_1$, а уравнение для $f(x)$ заменой $f' = v(f)$ сводится к уравнению первого порядка

$$v'v + \frac{b}{a}v'^2 - \frac{\lambda}{a} = 0.$$

Для функции $w(f) = v^2(f)$ получается линейное уравнение

$$w' + \frac{2b}{a}w - \frac{2\lambda}{a} = 0,$$

общее решение которого

$$w(f) = Ce^{-\frac{2b}{a}f} + \frac{\lambda}{b}.$$

Таким образом, $f'(x) = \pm \sqrt{Ce^{-\frac{2b}{a}f} + \frac{\lambda}{b}}$, откуда

$$\int \frac{e^{\frac{b}{a}f} df}{\sqrt{Ce^{-\frac{2b}{a}f} + \frac{\lambda}{b}}} = \pm x + C_2.$$

Надо учесть все случаи : 1. $C > 0, \lambda = 0$; 2. $C = 0, \frac{\lambda}{b} > 0$; 3. $C > 0, \frac{\lambda}{b} > 0$; 4. $C > 0, \frac{\lambda}{b} < 0$; 5. $C < 0, \frac{\lambda}{b} > 0$. В третьем случае интеграл берется с помощью замены $\sqrt{\frac{\lambda}{b}} \exp \frac{bf}{a} = \xi \sqrt{c}$:

$$\frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + 1}} = \frac{a}{b} \sqrt{\frac{b}{\lambda}} \operatorname{arcsch} \xi.$$

Итак, $\xi = \pm sh(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} x + B)$ откуда

$$f(x) = \frac{a}{b} \ln \left(\sqrt{\frac{bc}{\lambda}} (\pm sh(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} x + B)) \right) = \frac{a}{b} \ln \left| sh(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} x + B) \right| + C_1.$$

В результате $u(x, t) = \lambda t + \frac{a}{b} \ln \left| sh(\frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda}{b}} x + B) \right| + C_1$.

После введения произвольной постоянной $A = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{\lambda}{b}}$ решение принимает форму

$$u(x, t) = \frac{a^2 A^2}{b} t + \frac{a}{b} \ln |sh(At + B)| + C.$$

В оставшихся случаях решение получается аналогично (см. задачу 9.116.).

9.116. Найти решения уравнения из примера 9.15 в других случаях.

Найти какие-либо точные решения в виде суммы функций, каждая из которых зависит от одного аргумента, уравнений 9.117 – 9.142.

9.117. $u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu_x + p$.

$$9.118. \quad u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu_x + pt.$$

$$9.119. \quad u_t = au_{xx} + bu_x^2 + c.$$

$$9.120. \quad u_t = a \exp\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right).$$

$$9.121. \quad u_t = ae^{\sigma u_{xx}} u_{xx}.$$

$$9.122. \quad e^{\sigma u}(au_{xx} + bu_x^2).$$

$$9.123. \quad u_t = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.124. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + be^{\sigma u}.$$

$$9.125. \quad u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + ae^u + b.$$

$$9.126. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b.$$

$$9.127. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(x^{n+2} e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + be^{\sigma u} + bx^n e^{\sigma u}.$$

$$9.128. \quad u_{tt} = au_{xx} + bu_x^2 + ct^n.$$

$$9.129. \quad u_{tt} = a^2 u_{xx} + bu_x^2 + cu + kt \sin \omega t.$$

$$9.130. \quad u_{tt} = a \frac{\partial}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x}.$$

$$9.131. \quad u_{tt} = a \frac{\partial}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x} bu + .$$

$$9.132. \quad u_{tt} = ae^{\sigma u} u_{xx}.$$

$$9.133. \quad u_{tt} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.134. \quad u_{tt} = \sin u_x u_{xx}.$$

$$9.135. \quad u_{tt} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

$$9.136. \quad u_{xy}^2 = a(x^2 + 1)e^{\alpha x} u_{xx} u_{yy} + bxe^{-\alpha^2 y^2}.$$

$$9.137. \quad u_{xx} u_{yy} = f(x)e^{\sigma u}.$$

$$9.138. \quad u_{xy}^2 = f(x)u_{xx}u_{yy} + g(x)y^k.$$

$$9.139. u_{xy}^2 = f(x)u_{xx}u_{yy} + g(x)e^{\sigma y}.$$

$$9.140. u_{xy}^2 = f_1(x)g_1(y)u_{xx}u_{yy} + f_2(x)g_2(y).$$

$$9.141. u_{xx} + ae^{\sigma u}u_{yy} = 0.$$

$$9.142. u_{xx} + a\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\sigma u}\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Пример 9.16. Метод разделения переменных. Уравнение

$$u_{tt} = au_{xx} + bu \ln u + cu$$

имеет решение вида (9.131), а именно, $u(x, t) = \varphi(t)f(x)$. Результатом подстановки $u(x, t)$ в уравнение и деления на $\varphi(t)f(x)$ будет тождество

$$\frac{\varphi''}{\varphi} - b \ln \varphi - c = a \frac{f''}{f} + b \ln f.$$

Тождественное равенство двух функций, зависящих от разных переменных, возможно, если каждая из функций равна некоторой константе λ . Таким образом, задача сводится к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi'' - b\varphi \ln \varphi - (c + \lambda)\varphi &= 0, \\ f'' + \frac{b}{a}f \ln f - \frac{\lambda}{a}f &= 0, \end{aligned}$$

одинаковой структуры. В результате замены $\varphi(t) = e^{\psi(t)}$ получается уравнение

$$\psi'' + \psi'^2 - b\psi - (c + \lambda) = 0,$$

одно из решений которого — $\psi(t) = At^2 + Bt + C$. При подстановке $\psi(t)$ в уравнение оно становится тождеством, если

$$A = \frac{b}{4}, \quad C = \frac{1}{2} + \frac{1}{b}(B^2 - (c + \lambda)),$$

так что

$$\psi(t) = \frac{b}{4}\left(t + \frac{2B}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{c + \lambda}{b}.$$

В итоге

$$u(x, t) = \frac{b}{4} \left(t + \frac{2B}{b} \right)^2 - \frac{b}{4a} \left(x - \frac{2aB}{b} \right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{b-c}{b}.$$

Если $\varphi < 0$, $f < 0$, то $\ln \varphi f = \ln(-\varphi) + \ln(-f)$, и получается тот же результат.

Найти какие-либо точные решения (в форме произведения) уравнений 9.143 – 9.172.

9.143. $u_t = au_x u_{xx}.$

9.144. $u_t = f(x)uu_{xx}$, где 1) $f(x) = x^n$; 2) $f(x) = e^{\alpha x}.$

9.145. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} x^m u^n \frac{\partial u}{\partial x} + bu.$

9.146. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$

9.147. $u_t = ax^n uu_{xx}.$

9.148. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right).$

9.149. $u_t = ax^{n+2} u^m u_{xx} + bx^n u^{m+1}.$

9.150. $u_t = ax^n \frac{\partial}{\partial x} \left(u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right).$

9.151. $u_t = au^k u_{xx}.$

9.152. $u_t = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right).$

9.153. $u_t = au^4 u_{xx} + bu^5.$

9.154. $u_t = a[(1 - u^2)u_{xx} + uu_x^2].$

9.155. $u_t + auu_x = b \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right).$

9.156. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right).$

9.157. $u_t = ax^n \frac{\partial}{\partial x} u^m \frac{\partial u}{\partial x}$; рассмотреть случай $n = \frac{3m+4}{m+1}.$

$$9.158. \quad iu_t + u_{xx} + a|u|^{2n}u = 0, \quad \text{Im}a = 0.$$

$$9.159. \quad iu_t + u_{xx} + (a|u|^2 + b|u| + c)u = 0.$$

$$9.160. \quad iu_t + u_{xx} + ku|u|^2u = 0.$$

$$9.161. \quad iu_t + u_{xx} + (au|u|^2 + b)u = 0.$$

$$9.162. \quad u_{tt} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.163. \quad u_{tt} = u_{xx} + ae^{\beta t}u^2 + bu.$$

$$9.164. \quad u_{tt} = u_{xx} + ae^{\beta x}u^2 - bu.$$

$$9.165. \quad u_{xx} + u_{yy} = au \ln |u|.$$

$$9.166. \quad u_{xx} + u_{yy} = axu + bu \ln |u|.$$

$$9.167. \quad u_{xx} + u_{yy} + \frac{k}{x}u_x = (px^2 + q)u + bu \ln |u|.$$

$$9.168. \quad u_{xx} + u_{yy} = (ax + by + c)u + mu \ln |u|.$$

$$9.169. \quad au_{xx} + bu_{yy} + \frac{k}{x}u_x + \frac{m}{y}u_y = (px^2 + qy^2 + r)u + su \ln |u|.$$

$$9.170. \quad u_{tt} = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

$$9.171. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

$$9.172. \quad a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Пример 9.17. В решении вида (9.131) какую-либо систему функций, зависящих от одной и той же переменной, можно задать полностью или частично; остальные функции определяются из уравнения. Если число переменных больше двух, то одна из (простых) конструкций решения $u(x, y, t) = \varphi(t) + \psi(t)f(x, y)$ или $u(x, y, t) = \varphi(t) + \psi(t)f(x) + \chi(t)g(y)$ и т.п. Уравнение

$$u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu^2 + ru + s$$

допускает решение вида $u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)f(x)$. При подстановке $u(x, t)$ в уравнение оно становится тождеством, которое преобразуется к виду

$$\varphi' - c\varphi^2 - r\varphi - s = a\psi f'' + \psi^2(bf'^2 + cf^2) + (2c\varphi + r\psi - \psi')f.$$

Переменные разделятся, если правая и левая части будут равны нулю и $bf'^2 + cf^2 = 0$. В этом случае

$$\left(\frac{f'}{f}\right)^2 = \alpha^2, \quad \alpha^2 = -\frac{c}{b}, \quad \text{так что } f(x) = Ae^{\pm\alpha x}.$$

В результате из тождества следует система

$$\begin{aligned}\varphi' &= \varphi^2 + r\varphi + s, \\ \psi' &= \alpha^2 a\psi + 2c\varphi\psi + r\psi.\end{aligned}$$

Решение первого уравнения (с разделяющимися переменными) сводится к квадратурам

$$\int \frac{d\varphi}{\left(\varphi + \frac{r}{2c}\right)^2 - \frac{r^2 - 4cs}{4c^2}} = ct + B_1.$$

В зависимости от знака свободного члена в знаменателе подынтегральной функции получаются следующие результаты. Если $\frac{r^2 - 4cs}{4c^2} = p^2 > 0$, то

$$-\frac{1}{p} \operatorname{arcth} \frac{\varphi + \frac{r}{2c}}{p} = ct + B_1$$

или

$$-\frac{1}{p} \operatorname{arccth} \frac{\varphi + \frac{r}{2c}}{p} = ct + B_2.$$

Отсюда

$$\varphi(t) = -\frac{r}{2c} - p \operatorname{th}(pct + B)$$

или

$$\varphi(t) = -\frac{r}{2c} - p \operatorname{cth}(pct + B).$$

Если $-\frac{r^2-4cs}{4c^2} = q^2 > 0$, то

$$\varphi(t) = -\frac{r}{2c} + q \operatorname{tg}(qct + B).$$

Если $r^2 = 4cs$, то

$$\varphi(t) = -\frac{r}{2c} - \frac{1}{ct + B}.$$

Решение второго уравнения проводится аналогично. В итоге

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{r}{2c} - p \operatorname{th}(pct + B) + \frac{Ae^{\alpha^2 at + \alpha x}}{\operatorname{sh}^2(pct + B)}, \\ u(x, t) &= -\frac{r}{2c} - p \operatorname{cth}(pct + B) + \frac{Ae^{\alpha^2 at + \alpha x}}{\operatorname{ch}^2(pct + B)}, \\ u(x, t) &= -\frac{r}{2c} - q \operatorname{tg}(qct + B) + \frac{Ae^{\alpha^2 at + \alpha x}}{\cos^2(qct + B)}, \\ u(x, t) &= -\frac{r}{2c} - \frac{1}{ct + B} + \frac{Ae^{\alpha^2 at + \alpha x}}{(ct + B)^2} \end{aligned},$$

где $p = \sqrt{\frac{r^2-4cs}{2c}}$, $q = \sqrt{\frac{4cs-r^2}{2c}}$, $\alpha = \pm\sqrt{-\frac{b}{c}}$ — вещественные числа, A, B — произвольные постоянные.

Найти точные решения вида $u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)f(x)$ и т.п. уравнений 9.173. – 9.185.

9.173. $u_t = au_{xx} + buu_x.$

9.174. $u_t + \frac{a}{t}u + buu_x = cu_{xx}.$

9.175. $u_t = au_{xx} + buu_x + cu.$

9.176. $u_t + auu_x = b\frac{\partial}{\partial x}(u\frac{\partial u}{\partial x}).$

9.177. $u_t = auu_{xx} + bu_x^2 + cu^2 + ru + s.$

9.178. $u_t = auu_{xx} + bu^2 + cu + s.$

$$9.179. x^3(u_{xx} + au_{yy}) = cu_y^2 + bcu^2 + kxu + rx^2.$$

$$9.180. u_{xx} + au_{yy} = cu_y^2 + bcu^2 + ku + r.$$

$$9.181. u_{xx} + au_{yy} = cu_y^2 e^{\alpha x} + bcu^2 e^{\alpha x} + ku + re^{-\alpha x}.$$

$$9.182. u_t = (a + bu)(u_{xx} + u_{yy}) + cu^2 + ku + m.$$

$$9.183. u_t = au(u_{xx} + u_{yy}) - a(u_x^2 + u_y^2) - b.$$

$$9.184. u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

$$9.185. u_t = au(u_{xx} + u_{yy}) - a(u_x^2 + u_y^2).$$

Пример 9.18. Уравнение

$$u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu + s$$

допускает решение вида $u(x, t) = x^2 \varphi(t) + x \psi(t) + \chi(t)$ (см. (9.131)). Действительно, из тождества

$$x^2 \varphi' + x \psi' + 2a\varphi + b(2x\varphi + \psi)^2 + x^2 c\varphi + x c\psi + c\chi + s$$

следует система уравнений для определения функций φ, ψ, χ :

$$\varphi' = 4b\varphi^2 + c\varphi,$$

$$\psi' = 4b\varphi\psi + c\psi,$$

$$\chi' = 2a\varphi + b\psi^2 + c\chi + s$$

Первое уравнение (с разделяющимися переменными) имеет решение $\varphi(t) = \frac{c}{4b} \frac{e^{ct}}{A - e^{ct}}$. Решение второго уравнения (с разделяющимися переменными) $\psi(t) = B \frac{e^{ct}}{A - e^{ct}}$. Третье (линейное) уравнение

$$\chi' - c\chi = \frac{2ac}{4b} \frac{e^{ct}}{A - e^{ct}} + \frac{bB^2 e^{2ct}}{(A - e^{ct})^2} + s$$

имеет решение

$$\chi(t) = \frac{act e^{ct}}{2bA} - \frac{ae^{ct}}{2b} \ln |A - e^{ct}| + \frac{bB^2 e^{ct}}{c(A - e^{ct})} + s + Ce^{ct}.$$

Здесь A, B, C — произвольные постоянные.

Найти решения вида $u(x, t) = x^2\varphi(t) + x\psi(t) + \chi(t)$ уравнений 9.186. – 9.192.

$$9.186. \quad u_t = au_{xx} + bu_x^2 + c.$$

$$9.187. \quad u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu_x + s.$$

$$9.188. \quad u_t = auu_{xx} + bu_x^2 + c.$$

$$9.189. \quad u_t = auu_{xx} + bu_x + cu + s.$$

$$9.190. \quad u_t = auu_{xx} + bu_x^2 + cu_x + s.$$

$$9.191. \quad u_t = au(u_{xx} + u_{yy}) - a(u_x^2 + u_y^2) - b.$$

$$9.192. \quad u_t = \frac{\partial}{\partial x}(u \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u \frac{\partial u}{\partial y}).$$

Пример 9.19. Точные решения можно находить, применяя метод разделения переменных к уравнению, полученному из исходного посредством замены переменных. Если в уравнении

$$u_{tt} = u_{xx} + a(k^2mu - k(m+1)u^m + u^{2m-1}), \quad m \neq 1,$$

сделать замену $u = v^\alpha$, с неизвестным пока показателем α , то в результате появятся слагаемые с $v^{(m-1)\alpha+2}$ и $v^{2(m-1)\alpha+2}$. Пусть $2(m-1)\alpha+2=0$; в этом случае $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\alpha vv_{tt} + \alpha(\alpha-1)v_t^2 = \alpha vv_{xx} + \alpha(\alpha-1)v_x^2 + \alpha k^2mv^2 - \alpha k(m+1)v + a,$$

где $\alpha = \frac{1}{1-m}$, которое допускает решение вида $\varphi(t) + \psi(t)f(x)$. Переменные разделятся, если $f' = \beta f$ (см. пример 9.17), так что $v(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)e^{\beta x}$. Подстановка $v(x, t)$ в уравнение и сравнение коэффициентов при $e^{2\beta x}$ и $e^{\beta x}$ в обеих частях полученного тождества приводят к системе

$$\alpha\varphi\varphi'' + \alpha(\alpha-1)\varphi'^2 = (\alpha^2\beta^2 + ak^2m)\varphi^2,$$

$$\alpha\varphi\psi'' + \alpha\psi\varphi'' + 2\alpha(\alpha-1)\varphi'\psi' = (\alpha\beta^2 + 2ak^2m)\varphi\psi - ak(m+1)\varphi,$$

$$a\psi\psi'' + \alpha(\alpha-1)\psi'^2 = ak^2m\psi^2 - ak(m+1)\psi + a.$$

Одним из решений третьего уравнения является $\psi(t) = A$ при условии $amk^2A^2 - ak(m+1)A + a = 0$, откуда $A_1 = \frac{1}{k}$, $A_2 = \frac{1}{km}$. Второе уравнение, преобразованное к виду

$$\varphi'' - \mu\varphi = 0, \quad \mu = \beta^2 + \frac{2ak^2m}{\alpha} - \frac{ak(m+1)}{\alpha A},$$

имеет решения $\varphi_{1,2}(t) = \exp(\pm\sqrt{\mu}t)$. Необходимо выбрать μ , так, чтобы функции $\varphi_{1,2}(t)$ удовлетворяли первому уравнению:

$$(\alpha\mu + \alpha(\alpha-1)\mu) C_{1,2}^2 e^{\pm 2\sqrt{\mu}t} = (\alpha\beta^2 + \alpha(\alpha-1)\beta^2 + ak^2m) C_{1,2}^2 e^{\pm 2\sqrt{\mu}t},$$

т.е. $\mu = \beta^2 + \frac{ak^2m}{\alpha^2}$. Должно выполняться равенство

$$\beta^2 + \frac{2ak^2m}{\alpha} - \frac{ak(m+1)}{\alpha A} = \beta^2 + \frac{ak^2m}{\alpha^2},$$

откуда $km = \frac{1}{A}$. Итак, $\psi(t) = \frac{1}{km}$ и $\psi(t) = Ce^{\pm\sqrt{\beta^2 + \frac{ak^2m}{\alpha^2}}t}$ — решения системы. В итоге

$$u(x, t) = \left[\frac{1}{km} + Ce^{\beta x \pm \sqrt{\beta^2 + ak^2m(m+1)^2}t} \right]^{\frac{1}{1-m}},$$

где C и β — произвольные постоянные.

Есть решение вида $v(x, t) = f(x) + \varphi(t)g(x)$ (см. задачу 9.193).

9.193. Найти решение нелинейного уравнения из примера 9.19, полагая $v(x, t) = f(x) + \varphi(t)g(x)$.

Найти какие-либо точные решения нелинейных уравнений 9.194 – 9.202 с неизвестной функцией u методом разделения переменных, сделав сначала замену $u = v^\alpha$.

9.194. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} (u^m \frac{\partial u}{\partial x}) + bu^{m+1}.$

9.195. $u_t u_{xx} + e^{kt}(a + be^{kt})u^m.$

9.196. $u_t u_{xx} + au + be^{kt}u^m.$

$$9.197. \quad u_t = a \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right].$$

$$9.198. \quad u_t = a \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u^n \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + f(t)u.$$

$$9.199. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + bu^{1-m}.$$

$$9.200. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b \frac{1}{u^2}.$$

$$9.201. \quad u_t = \frac{a}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.202. \quad u_t = a \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right].$$

Найти точные решения уравнений 9.203 – 9.224 с неизвестной функцией u методом разделения переменных, предварительно сделав замену $v = e^{ku}$ или $u = e^{mv}$.

$$9.203. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + be^{\sigma u}.$$

$$9.204. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.205. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(x^n e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.206. \quad u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\mu x + \sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.207. \quad u_{tt} = u_{xx} + be^{\sigma u} + (at + c)e^{2\sigma u}.$$

$$9.208. \quad u_{tt} = u_{xx} + be^{\sigma u} + (ax + c)e^{2\sigma u}.$$

$$9.209. \quad u_{tt} = u_{xx} + be^{\sigma u} + (ae^{kt} + c)e^{2\sigma u}.$$

$$9.210. \quad u_{tt} = u_{xx} + be^{\sigma u} + (ae^{kx} + c)e^{2\sigma u}.$$

$$9.211. \quad u_{tt} = u_{xx} + be^{kt + \sigma u} + (ae^{2kt} + c)e^{2\sigma u}.$$

$$9.212. \quad u_{tt} = u_{xx} + be^{kx + \sigma u} + (ae^{2kx} + c)e^{2\sigma u}.$$

$$9.213. \quad u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

$$9.214. \quad u_t = a \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right].$$

$$9.215. \quad u_t = a \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial y}) \right] + f(t).$$

$$9.216. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln u + cxu.$$

$$9.217. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln u + cxtu.$$

$$9.218. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln^2 u + cu \ln u.$$

$$9.219. \quad u_t = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial u}{\partial x}) + bu \ln u.$$

$$9.220. \quad u_t = \frac{at}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \frac{\partial u}{\partial x}) + 2btu \ln u.$$

$$9.221. \quad u_t = au_{xx} + \frac{b}{x} u_x + cu \ln u + pe^{-\alpha t} u.$$

$$9.222. \quad u_t = au_{xx} + bu \ln u + ctu.$$

$$9.223. \quad u_t = u_{xx} + au \ln u.$$

$$9.224. \quad u_{xx} + u_{yy} = au \ln(bu).$$

Пример 9.20. Функция $u(x, t) = f(kx - \lambda t)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, называется решением типа бегущей волны. Если x пространственная координата, а t время, то такое решение описывает линейную волну, распространяющуюся без изменения профиля вдоль оси $0x$ со скоростью λ/k . Так как $u_x = k f'(z)$, $u_t = -\lambda f'(z)$, где $z = kx - \lambda t$, то решение типа бегущей волны существует, если $f(z)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения.

При подстановке $u(x, t) = f(z)$, $z = kx - \lambda t$ в уравнение $u_t = au_{xx} + bu^m u_x$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\lambda k f' - \lambda f' = ak^2 f'' + bk f^m f',$$

первый интеграл которого

$$-\lambda f' = \lambda + \frac{bk}{m+1} f^{m+1} + C_0.$$

Решение этого уравнения с разделяющимися переменными, записанное в виде

$$ar^2 \int \frac{df}{f(\alpha f^m + \lambda) + C_0} = -z + C, \quad \alpha = \frac{bk}{m+1},$$

определяет функцию $f(z)$ неявным образом. Если $C_0 = 0$, то подстановка $f^m(z) = h(z)$ сводит интеграл к табличному

$$\frac{ak^2}{m\lambda} \int \frac{dh}{h(\alpha h + \lambda)} = -z + C,$$

откуда

$$h(x) = \left(\frac{e^{-\varphi} - \alpha}{\lambda} \right)^{-1}, \quad \varphi = \frac{ak^2}{m\lambda}(C - z).$$

Решение данного уравнения

$$u(x, t) = \left[B e^{-\frac{m\omega}{a}(x-\omega t)} - \frac{b}{\omega(m+1)} \right]^{-\frac{1}{m}}, \quad B, \omega - \text{п.п.}$$

Найти решения уравнений 9.225 – 9.250 типа бегущей волны.

9.225. $u_t = u_{xx} + \frac{a}{u}u_x^2.$

9.226. $au_{xx} + bu_{yy} = cu^m.$

9.227. $u_t = au_{xx} + bu_x^2.$

9.228. $u_t = au^m u_{xx}.$

9.229. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right).$

9.230. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^m \frac{\partial u}{\partial x} \right) + bu^{1-m}.$

9.231. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2au + \frac{2}{9au}.$

9.232. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - 2au^4 - u^3.$

9.233. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \left(ue^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + bu^{1-m}.$

$$9.234. \frac{\partial}{\partial x}(u^m \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(u^m \frac{\partial u}{\partial y}) = au^n.$$

$$9.235. a \frac{\partial}{\partial x}(u^m \frac{\partial u}{\partial x}) + b \frac{\partial}{\partial y}(u^n \frac{\partial u}{\partial y}) = 0.$$

$$9.236. u_t = auu_{xx} + bu^2 + cu + d.$$

$$9.237. u_t = auu_{xx} - au_x^2 + cu_x + pu + q.$$

$$9.238. u_t = au_{xx} + au_x^2 + bu - bu^4.$$

$$9.239. u_t = a \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x}).$$

$$9.240. u_t = a \frac{\partial}{\partial x}(u^m \frac{\partial u}{\partial x}), \text{ где } m = -1, 1, 2.$$

$$9.241. u_t = u_{xx} + \frac{2}{9}u - 2b^2u^3.$$

$$9.242. u_t = a \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{(u+b)^2} \frac{\partial u}{\partial x}) + cu_x.$$

$$9.243. u_t = u_{xx} + uu_x.$$

$$9.244. u_t = u_{xx} - 2a^2uu_x^2.$$

$$9.245. u_t = auu_{xx} + bu_x^2 + cu^2 + pu + q.$$

$$9.246. u_{xx} + u_{yy} = au \ln u.$$

$$9.247. u_{xx} + u_{yy} = a \operatorname{sh} \beta u.$$

$$9.248. u_t = u_{xx} + au + bu^m + cu^{2m-1}.$$

$$9.249. u_t = u_{xx} + au + bu^m.$$

$$9.250. u_t = au_{xx} + u^m u_x, \text{ где } m = 2; 3.$$

$$9.251. u_t = a \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{(u^2+b^2)} \frac{\partial u}{\partial x}).$$

$$9.252. u_t = u_{xx} + a + be^{\sigma u}.$$

$$9.253. u_t = u_{xx} + a + be^{\sigma u} + ce^{2\sigma u}.$$

$$9.254. u_t = a \frac{\partial}{\partial x}(e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x}) + be^{\sigma u} + c + de^{-\sigma u}.$$

$$9.255. \quad u_t = u_{xx} - u(1-u)(a-u).$$

9.256. Доказать инвариантность уравнения из предыдущей задачи относительно преобразований 1) $U = 1 - u$, $a_1 = 1 - a$; 2) $w(z, \tau) = 1 - \frac{1}{a}u(x, t)$, $\tau = a^2t$, $z = ax^2$. Найти еще какие-нибудь точные решения уравнения, исходя из этого свойства.

$$9.257. \quad u_t = a \left[\frac{\partial}{\partial x} (e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (e^{\sigma u} \frac{\partial u}{\partial y}) + be^{\sigma u} + c + de^{-\sigma u} \right].$$

$$9.258. \quad u_t = au_{xx} + 2uu_x.$$

$$9.259. \quad u_t = u_{xx} + au(1-u).$$

$$9.260. \quad u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu_x + r.$$

$$9.261. \quad u_t = au_{xx} + bu_x^2 + cu^2 + ru + s.$$

$$9.262. \quad u_t = (a + \sigma u)(u_{xx} + u_{yy}) + ku^2 + mu + n.$$

$$9.263. \quad u_t = au(u_{xx} + u_{yy}) - a(u_x^2 + u_y^2).$$

$$9.264. \quad u_t = \frac{\partial}{\partial x} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} u \frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$9.265. \quad u_t = a \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

$$9.266. \quad u_t = au(u_{xx} + u_{yy}) - a(u_x^2 + u_y^2) - \beta.$$

$$9.267. \quad u_{xx} + u_{yy} = ae^{\sigma u}.$$

$$9.268. \quad au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz} = ke^{\sigma u}.$$

$$9.269. \quad au_{xx} + bu_{yy} + cu_{zz} = ku^m.$$

Пример 9.21. Функция

$$u(x, t) = t^\alpha U(z), \quad z = xt^\beta \quad (9.132)$$

называется автомодельным решением уравнения

$$u_t = a \frac{\partial}{\partial x} u^n \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (9.133)$$

если преобразование подобия переменных

$$t = C\tau, \quad x = C^k\xi, \quad u = C^m v \quad (9.134)$$

не меняет ни формы решения (9.132), ни формы уравнения (9.133).

В новых переменных (9.134) решение имеет вид

$$C^m U = C^\alpha \tau^\alpha = U(C^{k+\beta} x \tau^\beta)$$

и совпадает с (9.132), если $m = \alpha$, $k + \beta = 0$. Преобразованное уравнение

$$C^{m-1} v \tau = a C^{-2k+mn+m} \frac{d}{dz} v^n \frac{dv}{dz}$$

сохранит форму (9.133), если $m - 1 = -2k + mn + v$, т.е.

$$k = \frac{mn + 1}{2}, \quad m - \text{любое.}$$

Итак, решение уравнения (9.133) следует отыскивать в форме

$$u(x, t) = t^m U(z), \quad z = xt^{-k}, \quad k = \frac{mn + 1}{2};$$

переменные U и z называются автомодельными.

Так как $\frac{\partial}{\partial x} = t^{-k} \frac{d}{dz}$, то в новых переменных уравнение (9.133) запишется в виде

$$mt^{m-1} U - kt^m xt^{-k-1} U' = at^{-2k+mn+m} \frac{d}{dz} U^n \frac{dU}{dz},$$

т.е. является обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dz} U^n \frac{dU}{dz} + \frac{k}{a} z U' - \frac{m}{a} U = 0. \quad (9.135)$$

При различных значениях свободного параметра m получаются различные точные решения вида (9.132) уравнения (9.133).

Если выбрать $k = 0$, что соответствует $m = -\frac{1}{n}$, то получающееся уравнение допускает понижение порядка посредством замены $U^n U' = f(U)$:

$$f'f = -\frac{1}{na}U^{n+1}.$$

Отсюда

$$f^2 = -\frac{2}{an(n+2)}U^{n+2} + C$$

и при $C = 0$

$$f = \pm \sqrt{-\frac{2}{an(n+2)}U^{-\frac{n}{2}+1}}.$$

Следовательно,

$$U(z) = \left(\pm \frac{n}{2} \sqrt{-\frac{2}{an(n+2)}}z + C \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Таким образом, одно из решений уравнения (9.133)

$$u(x, t) = t^{-\frac{1}{n}} \left(\pm n \sqrt{-\frac{1}{2an(n+2)}}x + C \right)^{\frac{2}{n}}.$$

Уравнение имеет другие автомодельные решения (см. задачу 9.270).

Найти автомодельные решения уравнений 9.270 – 9.280.

9.270. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} u^n \frac{\partial u}{\partial x}.$

9.271. $u_t = a \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{u^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad a > 0.$

9.272. $u_t = ax^n \frac{\partial}{\partial x} u^m \frac{\partial u}{\partial x}.$

9.273. $u_t = \frac{a}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} x^n u^m \frac{\partial u}{\partial x}.$

9.274. $u_t = au_x^n u_{xx}.$

9.275. $u_{tt} = a \frac{\partial}{\partial x} u^m \frac{\partial u}{\partial x}.$

9.276. $u_{tt} = ax^n u^m u_{xx}.$

9.277. $u_{tt} = u_{xx} + (x^2 - t^2)f(u).$

9.278. $u_{tt} = a^2 \frac{\partial}{\partial x} u^m \frac{\partial u}{\partial x}.$

9.279. $u_{xy} = ru^n.$

Пример 9.22. Исходя из структуры правой части уравнения

$$u^2 = a \left[\frac{\partial}{\partial x} x^m \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} y^m \frac{\partial u}{\partial y} \right]$$

можно преобразовать его правую часть посредством замены типа $\xi = x^\alpha + y^\alpha$ или замены в более общей форме

$$\xi = h^\gamma, \quad h = A(x^\alpha + y^\alpha),$$

где коэффициент A и показатели α, γ — неизвестные числа.

Из формул дифференцирования по x

$$\frac{\partial}{\partial x} = \gamma h^{\gamma-1} h_x \frac{\partial}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \gamma h^{\gamma-1} h_x \frac{\partial}{\partial \xi} x^n \gamma h^{\gamma-1} h_x \frac{\partial}{\partial \xi} = \gamma^2 x^n h^{2\gamma-2} h_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + H \frac{\partial}{\partial \xi}$$

и из аналогичных формул дифференцирования по y следует, что коэффициент при $u_{\xi\xi}$ в преобразованном уравнении равен

$$\begin{aligned} & a(x^n \gamma^2 h^{2\gamma-2} h_x^2 + y^n \gamma^2 h^{2\gamma-2} h_y^2) = \\ & = a \gamma^2 h^{2\gamma-2} A^2 \alpha^2 (x^{n+2\alpha-2} + y^{n+2\alpha-2}) = \frac{a \gamma^2 A^2 \alpha^2 (x^{n+2\alpha-2} + y^{n+2\alpha-2})}{h^{2-2\gamma}} \end{aligned}$$

Если потребовать, чтобы $n+2\alpha-2 = \alpha$, $2-2\gamma = 1$, $Aa\gamma^2\alpha^2 = 1$, то этот коэффициент станет равным единице. Теперь коэффициент

при u_ξ вполне определен и, как показывают более длительные выкладки, равен константе. Таким образом, итогом введения новой переменной является уравнение

$$u^2 = u_{\xi\xi} + \frac{B}{\xi}u_\xi, \quad B = \frac{2+n}{2-n}.$$

В данном случае существует решение вида $u(\xi) = K\xi^p$. Подстановка $u(x, t)$ в уравнение

$$K^2 = Kp(p-1)\xi^{p-2} + KBp\xi^{p-2},$$

превращает его в тождество, если $2p = p-2$, $K = p(p-1) + pB$, откуда $u(x, y) = \frac{2a(n-1)(2-n)}{x^{2-n}+y^{2-n}}$.

Найти точные решения уравнений 9.280 – 9.291, предварительно уменьшив их размерность с помощью подходящей замены.

9.280. $u_{xx} + u_{yy} = au^n.$

9.281. $u_{xx} + u_{yy} = ae^{\sigma u}.$

9.282. $u_t = au(u_{xx} + u_{yy}) + b(u_x^2 + u_y^2).$

9.283. $u_t = au(u_{xx} + u_{yy}) - a(u_x^2 + u_y^2) + f(t);$ дать также решение для $f(t) = be^{-kt}.$

9.284. $u_t = a \left[\frac{\partial}{\partial x} ax^n \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} by^m \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} cz^p \frac{\partial u}{\partial z} \right] + ku \ln u.$

9.285. $\frac{\partial}{\partial x} ax^n \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} by^m \frac{\partial u}{\partial y} = cu^p.$

9.286. $\frac{\partial}{\partial x} ax^n \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} by^m \frac{\partial u}{\partial y} = ce^{\sigma u}.$

9.287. $ax^n u_{xx} + by^m u_{yy} = cu^p.$

9.288. $ax^n u_{xx} + by^m u_{yy} = ce^{\sigma u}.$

9.289. $\frac{\partial}{\partial x} ae^{\sigma x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} be^{\mu y} \frac{\partial u}{\partial y} = cu^m.$

9.290. $u_t = \frac{\partial}{\partial x} ae^{\sigma x} u^m \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} bu^m \frac{\partial u}{\partial y}.$

9.291. $u_t = u^k \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} be^{\sigma y} \frac{\partial u}{\partial y} \right].$

9.5. Ответы

9.3. Построение мажорантного ряда для ряда Неймана основано на неравенстве (9.6). Из оценки

$$|\mathcal{K}1| \leq \int_x^\infty |K(x, \xi, k)| d\xi \leq M \int_x^\infty (\xi - x)|u(\xi)| d\xi$$

следует, что (далее для упрощения записи значок $+$ у функции $U_j^+(x)$ опущен)

$$|\mathcal{K}1| \leq M \begin{cases} U_1(x), & 0 \leq x, \\ U_1(x) - xU_0(x), & x < 0. \end{cases}$$

Если $x \geq 0$, то

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}^2 1| &\leq \int_x^\infty |K(x, \xi, k)| \cdot |(\mathcal{K}1)(x, \xi, k)| d\xi \leq M^2 \int_x^\infty (\xi - x)|u(\xi)| U_1(\xi) d\xi \leq \\ &\leq M^2 \int_x^\infty \xi |u(\xi)| U_1(\xi) d\xi \leq M^2 \int_x^\infty \left(-\frac{\partial U_1}{\partial \xi}\right) U_1(\xi) d\xi \leq \frac{M^2 U_1^2(x)}{2!}. \end{aligned}$$

При $x < 0$

$$\begin{aligned} |\mathcal{K}^2 1| &= \left| \int_x^0 K \mathcal{K}1 d\xi + \int_0^\infty K \mathcal{K}1 d\xi \right| \leq \\ &\leq M^2 \left(\int_x^0 (\xi - x)|u(\xi)| (U_1(\xi) - \xi U_0(\xi)) d\xi + \int_0^\infty (\xi - x)|u(\xi)| U_1(\xi) d\xi \right) = \\ &= M^2 \left(\int_x^\infty (\xi - x)|u(\xi)| U_1(\xi) d\xi - \int_x^0 \xi (\xi - x)|u(\xi)| U_0(\xi) d\xi \right) \leq \\ &\leq M^2 \left(\int_x^\infty |\xi| |u(\xi)| U_1 d\xi - x \int_x^\infty |u(\xi)| U_1 d\xi - x \int_x^\infty |\xi| |u(\xi)| U_0 d\xi \right) \leq \\ &\leq M^2 \left(\frac{U_1^2(x)}{2} - 2xU_0(x)U_1(x) \right). \end{aligned}$$

При переходе к последнему звену цепочки неравенств использована монотонность $U_j(\xi) \leq U_j(x)$ при $x \leq \xi$. Далее методом математической индукции доказываются неравенства

$$|\mathcal{K}^m 1| \leq \begin{cases} \frac{M^m U_1^m(x)}{m!}, & 0 \leq x, \\ \frac{M^m U_1^m(x)}{m!} - \frac{mx}{(m-1)!} U_0(x) U_1^{m-1}(x), & x < 0. \end{cases}$$

9.5. 1) $W = -2ik$; 2) $W = 2ik$, Указание. Применить асимптотические оценки (9.11). **9.8.** Указание. Для вывода (9.16) применить формулы (9.14), (9.9), для вывода (9.17) — формулы $W[f^-(x, k), f^-(x, -k)] = 2ik$ (задача 9.5) и (9.13). **9.10.** Указание. Воспользоваться свойством (9.17). **9.11.** Решение. Пусть коэффициент $a(k_n) = 0$, где $k_n = \alpha_n + i\beta_n$, $\beta > 0$ (задача 9.10).

Так как вронскиан (9.14) равен нулю, то $f^-(x, k_n) = b_n f^+(x, k_n) = \psi_n(x)$. Асимптотическое представление (см.(9.11))

$$\psi_n(x) = \begin{cases} e^{-i(\alpha_n + i\beta_n)x} + o(e^{\beta_n x}), & x \rightarrow -\infty, \\ b_n e^{i(\alpha_n + i\beta_n)x} + o(e^{-\beta_n x}), & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

позволяет заключить, что $\psi_n(x) \in L_2(R)$, т.е. $\psi_n(x)$ — собственная функция, а k_n — собственное значение. Так как k_n^2 вещественное, то $\alpha_n = 0$. Обратно, если $k_n^2 = -\beta_n^2$ (β_n — вещественное число) — собственное значение, то собственная функция имеет вид $\psi_n(x) = f^-(x, i\beta_n) = b_n f^+(x, i\beta_n)$ (пример 9.3) и формула (9.14) дает $a(i\beta_n) = 0$.

9.12. Решение. Пусть $k_n = i\beta_n$ — нуль функции $a(k)$. Требуется доказать, что $\dot{a}(k_n) \neq 0$, где $\dot{a}(k)$ — производная по k . Исходным пунктом служит система тождеств

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 \dot{f}^+}{dx^2} + u \dot{f}^+ &= k^2 \dot{f}^+ + 2k f^+, \\ -\frac{d^2 \dot{f}^-}{dx^2} + u \dot{f}^- &= k^2 \dot{f}^-, \end{aligned}$$

первое из которых — результат дифференцирования уравнения (9.20) по k при $\lambda=k^2$, $\psi(x) = f^+(x, k)$, а второе представляет собой уравнение (9.20), в котором $\lambda = k^2$, $\psi(x) = f^-(x, k)$. Если первое тождество умножить на f^- , второе — на $\dot{f}^+$ и взять разность, то получится соотношение

$$\frac{dW[f^-, \dot{f}^+]}{dx} = -2ik f^+ \dot{f}^-.$$

Отсюда при $k = -i\beta_n$

$$W[f^-(x, i\beta_n), \dot{f}^+(x, i\beta_n)] \Big|_x^\infty = -2i\beta_n b_n \int_x^\infty (f^+(\xi, i\beta_n))^2 d\xi.$$

Аналогично

$$W[f^+(x, i\beta_n), \dot{f}^-(x, i\beta_n)] \Big|_{-\infty}^x = -2i\beta_n b_n \int_{-\infty}^x (f^+(\xi, i\beta_n))^2 d\xi.$$

Почленное сложение последних двух соотношений и преобразование левой части на основе (9.14) к виду

$$-\frac{d}{dk} W[f^-, f^+] \Big|_{k=i\beta_n} = 2ia(i\beta_n) + 2i^2 \beta_n \dot{a}(i\beta_n)$$

приводит к результату

$$\dot{a}(i\beta_n) = -ib_n \int_{-\infty}^\infty [f^+(\xi, i\beta_n)]^2 d\xi \neq 0. \quad (9.136)$$

9.13. Указание. Применить (9.136).

9.14. Указание к п.2. Используя (9.18), доказать, что $a(k)$ имеет в полуплоскости $\text{Im} k \geq 0$ конечное число нулей.

9.18. Решение п. 2. Если существует оператор Ω в форме (9.26), то

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Omega f &= -f''(x) + \frac{d}{dx} [f(x)K(x, x)] + f(x)K_x(x, x) + \\ &+ u(x)f(x) - \int_x^\infty K_{xx}(x, y)f(y)dy + u(x) \int_x^\infty K(x, y)f(y)dy, \\ \Omega\mathcal{L}_0 f &= -f''(x) + f'(x)K(x, x) - f(x)K_y(x, x) - \int_x^\infty K_{yy}(x, y)f(y)dy.\end{aligned}$$

Так как эти выражения равны, то

$$\begin{aligned}K_{xx} - K_{yy} &= u(x)K, \quad x < y, \\ \frac{dK(x, x)}{dx} &= -\frac{1}{2}u(x) \Rightarrow K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty u(\xi) d\xi, \\ \forall C: \lim_{\substack{x+y \rightarrow \infty \\ y-x=C}} K(x, y) &= 0;\end{aligned}\tag{9.137}$$

последнее условие — следствие равномерного на $\overline{H}$ стремления функции $K(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow \infty$. Полученная задача представляет собой задачу Гурса (8.23), которая имеет единственное решение (пример 8.7), принадлежащее $\mathcal{E}(\overline{\Delta})$ (задача 8.109).

9.19. $s = \left\{ R(k) = -\frac{iU_0}{2k+iU_0} \right\}$, дискретного спектра нет.

9.20. $R(k) = \frac{iU_0 e^{-2ikl} tg 2\kappa l}{2k\kappa - i(k^2 + \kappa^2) tg 2\kappa l}$, $\kappa = \sqrt{k^2 + U_0}$, $\beta_n > 0$ — корни уравнения $(\chi tg \chi l - \beta)(\beta tg \chi l + \chi) = 0$, $\chi = \sqrt{U_0 - \beta^2}$, $c_n^2 = \frac{\beta_n^2(U_0 - \beta_n^2)}{U_0(1 + \beta_n l)}$, $n = \overline{1, N}$.

9.21. $R(k) = \frac{\Gamma(ikl)\Gamma(\frac{1+\sigma}{2} - ikl)\Gamma(\frac{1-\sigma}{2} - ikl)}{\pi\Gamma(-ikl)} \cos \frac{\pi\sigma}{2}$, $n = 1, 2, \dots, N < \frac{1+\sigma}{2}$.

Указание. Последовательными замены $x = \xi l$, $2\eta = 1 + th \xi$, $\psi = [\eta(1-\eta)]^{-ikl/2} v$ сводят уравнение Шредингера к гипергеометрическому уравнению с параметрами $\alpha = \frac{1+\sigma}{2} - ikl$, $\beta = \frac{1-\sigma}{2} - ikl$, $\gamma = 1 - ikl$. Решение имеет вид

$$\psi = (1-\eta)^{-\frac{ikl}{2}} \left[A\eta^{-\frac{ikl}{2}} F(\alpha, \beta, \gamma, \eta) + B\eta^{\frac{ikl}{2}} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \eta) \right].$$

Если $x \rightarrow -\infty$, то $\eta \approx \exp(2x/l)$, поэтому $\psi = A \exp(-ikx) + B \exp(ikx)$, откуда $A = 1$, $B = 0$. Если $x \rightarrow +\infty$, то $1-\eta \approx \exp(-2x/l)$, т.е. $\eta \rightarrow 1$. Для вычисления $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ применить (1.156). **9.22.** Нет. Потенциал (9.28) не отражает те волны, для которых $2l\sqrt{k^2 + U_0} = \pi n$, $n \in \mathbf{N}$.

9.23. $l^2 U_0 = N(N+1)$, $N \in \mathbf{N}$.

9.24. $R(k) = 0$, $\beta_n = \frac{n}{l}$, $c_n^2 = \frac{(N+n)!}{l(N-n)!(n-1)!n!}$, $n = \overline{1, N}$.

9.26. $u(x) = -\frac{d^2 \ln \Delta}{dx^2}$, $\Delta = \det A$, $(A)_{ij} = \delta_{ij} + \frac{c_i c_j}{\beta_i + \beta_j} e^{-(\beta_i + \beta_j)x}$, $i, j = \overline{1, N}$. Указание. При $g_j(x) = c_j \exp(-\beta_j x)$ уравнение ГЛМ (9.32) совпадает с уравнением (4.33).

9.27. $\mathcal{A} = -D$, $\mathcal{L} = -D^2 - u$.
9.28. Решение. Пара Лакса $[\mathcal{L}, \mathcal{A}]$ состоит из операторов $\mathcal{L} = -D^2 - u$ и $\mathcal{A} = \alpha_1(D^3 + bD + Db)$, который определен формулой (9.41) при $m = 1$. Коммутатор

$$[\mathcal{L}, \mathcal{A}]\psi = \alpha_1[(4b_x - 3u_x)\psi_{xx} + (4b_{xx} - 3u_{xx})\psi_x + (b_{xxx} - u_{xxx} - 2bu_x)\psi]$$

будет оператором умножения, если $4b_x - 3u_x = 0$, откуда $b = \frac{3}{4}u + f(t)$. При $\alpha_1 = 4$ и $f(t) = 0$ уравнение (9.40) принимает форму $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, а оператор $\mathcal{A}$ имеет вид (9.42).

9.29. $\mathcal{A} = -16D^5 - 20(uD^3 + D^3u) + 5[(D^2u - 3u^2)D + D(D^2u - 3u^2)]$.

9.30. $R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3t}$, $c_n^2(t) = c_n^2(0)e^{8\beta_n^3t}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Решение. Функция $\psi(x, t)$, удовлетворяющая уравнению Шредингера $\mathcal{L}(t)\psi = k^2\psi$, где $\mathcal{L}(t)$ имеет вид (9.36), есть также решением уравнения (9.39). Пусть функция $\psi(x, t) = h(k, t)f^-(x, k, t)$, тогда согласно формулам (9.13), (9.11)

$$\psi(x, t) = \begin{cases} h(k, t)e^{-ikx}, & x \rightarrow \infty, \\ h(k, t)(a(k, t)e^{-ikx} + b(k, t)e^{ikx}), & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ уравнение (9.39), в котором оператор $\mathcal{A}$ определен выражением (9.42), переходит в $\psi_t = -4\psi_{xxx}$. Функция $\psi(x, t)$ удовлетворяет последнему уравнению при условиях

$$h_t e^{-ikx} = -4(-ik)^3 e^{-ikx}, \\ (h_t a + h a_t) e^{-ikx} + (h_t b + h b_t) e^{ikx} = -4(-ik)^3 h a e^{-ikx} - 4(ik)^3 h b e^{ikx}.$$

Отсюда $a_t = 0$, $b_t = 8ik^3b$, следовательно,

$$a(k, t) = a(k, 0), \quad b(k, t) = b(k, 0)e^{8ik^3t}, \quad R(k, t) = R(k, 0)e^{8ik^3t}.$$

В случае дискретного спектра

$$\psi_n(x, t) = \begin{cases} h(i\beta_n, t)e^{\beta_n x}, & x \rightarrow -\infty, \\ h(i\beta_n, t)b_n(t)e^{-\beta_n x}, & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Аналогичные выкладки дают:

$$b_n(t) = b_n(0)e^{8\beta_n^3t}, \quad c_n^2(t) = c_n^2(0)e^{8\beta_n^3t}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

9.31. $(k, t) = R(k, 0)e^{32i\beta_n^5t}$, $c_n^2(t) = c_n^2(0)e^{32\beta_n^5t}$, $n = 1, 2, \dots, N$.

9.32. $u(x, t) = \frac{2}{l^2 c h^2 \left(\frac{\pi}{l} - \frac{4t}{l^3}\right)}$, $v_0 = 2a_0$. Решение. Потенциалу $-u(x, 0)$ соответствуют данные рассеяния (задача 9.24)

$$s(0) = \left\{ R(k, 0) = 0, \quad \beta_1 = \frac{1}{l}, \quad c_1^2(0) = \frac{2}{l} \right\},$$

а потенциалу $u(x, t)$ — данные рассеяния (задача 9.30)

$$s(t) = \left\{ R(k, t) = 0, \beta_1 = \frac{1}{t}, c_1^2(t) = \frac{2}{t} e^{\frac{8t}{t^3}} \right\}.$$

Функция $-u(x, t)$ определяется формулой (задача 9.26)

$$-u(x, t) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det A,$$

где матрица $A = \left(1 + \exp\left(-\frac{2x}{t} + \frac{8t}{t^3}\right)\right)$.

9.33. $u(x, t) = \frac{2}{ch^2(x-16t)}.$

9.34. 1) $u(x, t) = \frac{2\beta^2}{ch^2(\beta x - 4\beta^3 t + \delta)}$; 2) $u(x, t) = \frac{2\beta^2}{ch^2(\beta x - 16\beta^5 t + \delta)}.$

9.35. 1) $\zeta(x, t) = \frac{\zeta_0}{ch^2\left[\sqrt{\frac{3\zeta_0}{4h^3}}(x-Vt)+\delta\right]}$, $V = a\left(1 + \frac{\zeta_0}{2h}\right)$, где $a = \sqrt{gh}$;

2) $\zeta_0 = \frac{2h^3}{3l^2} N(N+1)$. Указание. Сделать замену: $\xi = x - at$, $\tau = t$.

9.36.

$$u(x, t) = 2(\beta_2^2 - \beta_1^2) \frac{\beta_1^2 \operatorname{cosech}^2 \eta_2 + \beta_1^2 \operatorname{sech}^2 \eta_1}{(\beta_2 \operatorname{cth} \eta_2 - \beta_1 \operatorname{th} \eta_1)^2}, \quad (9.138)$$

$\eta_j = \beta_j x - 4\beta_j^3 t - \delta_j$, $\delta_j = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{c_j^2}{2\beta_j} \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} \right)$, $j = 1, 2$. Решение. Потенциал $u(x, t)$ восстанавливается по данным рассеяния (задача 9.30)

$$s(t) = \{R(k, t) = 0, \beta_1, \beta_2, c_1^2 e^{8\beta_1^3 t}, c_2^2 e^{8\beta_2^3 t}\}, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2,$$

с помощью формулы $u(x, t) = 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx} \right)$, в которой $\Delta = \det A$,

$$(A)_{ij} = \delta_{ij} + \frac{c_i c_j}{\beta_i + \beta_j} e^{\alpha_i + \alpha_j}, \quad \alpha_i = -\beta_i x + 4\beta_i^3 t, \quad i, j = 1, 2.$$

Пусть $p_1 = \frac{c_1^2}{2\beta_1}$, $p_2 = \frac{c_2^2}{2\beta_2}$, $p^2 = p_1 p_2 \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} \right)^2$, $p = e^{\varphi_1}$, $\sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = e^{\varphi_2}$,

$\gamma_1 = \alpha_2 + \alpha_1 + \varphi_1$, $\gamma_2 = \alpha_2 - \alpha_1 + \varphi_2$, тогда

$$\Delta = 1 + p_1 e^{2\alpha_1} + p_2 e^{2\alpha_2} + p^2 e^{2(\alpha_1 + \alpha_2)} = 2\sqrt{p_1 p_2} e^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(ch \gamma_2 + \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} ch \gamma_1 \right),$$

$$\frac{d\Delta}{dx} = -(\beta_1 + \beta_2) \Delta - 2\sqrt{p_1 p_2} e^{\alpha_1 + \alpha_2} (\beta_2 - \beta_1) (sh \gamma_1 + sh \gamma_2), \quad \delta_{1,2} = \frac{\varphi_1 \mp \varphi_2}{2},$$

$$u(x, t) = 2 \frac{d}{dx} \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} \right) = -2 \frac{d}{dx} \left[\beta_1 + \beta_2 + \frac{\beta_2^2 - \beta_1^2}{\beta_2 \operatorname{cth}(\alpha_2 + \delta_2) - \beta_1 \operatorname{th}(\alpha_1 + \delta_1)} \right].$$

Структура решения (9.137) упрощается при $t \rightarrow \pm\infty$. Пусть $t \rightarrow -\infty$. Для значений x и t , при которых $\eta_1 = C_1$, величина

$$\eta_2 = -4(\beta_2^2 - \beta_1^2)\beta_2 t + \frac{1}{\beta_1}(\delta_1\beta_2 - \delta_2\beta_1) + \frac{\beta_2}{\beta_1}C_1 \rightarrow +\infty,$$

следовательно,

$$u(x, t) = \frac{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)\beta_1^2 \operatorname{sech}^2 \eta_1}{(\beta_2 - \beta_1 \operatorname{th} \eta_1)^2} = \frac{2\beta_1^2}{ch^2(\beta_1 x - 4\beta_1^3 t - \delta_1 - \varphi)}, \quad \varphi = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Для значений x и t , при которых $\eta_2 = C_2$, величина $\eta_1 \rightarrow -\infty$, поэтому

$$u(x, t) = \frac{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)\beta_2^2 \operatorname{cosech}^2 \eta_2}{(\beta_2 \operatorname{cth} \eta_2 + \beta_1)^2} = \frac{2\beta_2^2}{ch^2(\beta_2 x - 4\beta_2^3 t - \delta_2 + \varphi)}.$$

Итак, решение состоит из двух солитонов; второй, имеющий большую скорость, находится позади первого.

Если $t \rightarrow +\infty$, то

$$u(x, t) = \frac{2\beta_1^2}{ch^2(\beta_1 x - 4\beta_1^3 t - \delta_1 - vf)} + \frac{2\beta_2^2}{ch^2(\beta_2 x - 4\beta_2^3 t - \delta_2 + vf)}.$$

Таким образом, в процессе движения двух солитонов происходит их взаимодействие, в результате которого второй солитон опережает первый, форма и скорость солитонов не изменяются, сдвиги фаз второго и первого солитонов -2φ и 2φ соответственно.

9.37. Решение. С учетом зависимости данных рассеяния от t (задача 9.30) функция $u(x, t)$ определяется формулой (задача 9.26) $u(x, t) = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \Delta$, в которой

$$\begin{aligned} \Delta &= \det(I + A) = \det(\delta_{ij} + q_{ij} e^{\alpha_i + \alpha_j}) = e^{2 \sum_{m=1}^N \alpha_m} \det(e^{-2\alpha_j} \delta_{ij} + q_{ij}), \\ q_{ij} &= \frac{c_i c_j}{\beta_i + \beta_j}, \quad \alpha_i = -\beta_i(x - 4\beta_i^2 t), \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Выражение для функции $u(x, t)$ упрощается при больших по модулю значениях t . Если $\alpha_k = C_k$, то при $t \rightarrow \pm\infty$ остальные величины

$$\alpha_j = 4\beta_j(\beta_j^2 - \beta_k^2)t + \frac{\beta_j}{\beta_k} C_k \rightarrow \begin{cases} \mp\infty, & j < k, \\ \pm\infty, & j > k. \end{cases}$$

Пусть $t \rightarrow +\infty$, тогда в диагональных элементах $\exp(-2\alpha_j) + q_{jj}$ определителя $\det(\delta_{ij} \exp(-2\alpha_i) + q_{ij})$ останется первое слагаемое при $j < k$, второе — при $j > k$, оба слагаемые при $j = k$. Если затем вынести за знак определителя множители $\exp(-2\alpha_1), \exp(-2\alpha_2), \dots, \exp(-2\alpha_{k-1})$, то в строках с номерами $i = 1, 2, \dots, k-1$ главными членами будут единицы, расположенные на главной диагонали (остальные элементы с увеличением t стремятся к нулю). Поэтому

$$\Delta = e^{2 \sum_{m=k+1}^N \alpha_m} D_{k+1} + e^{2 \sum_{m=k}^N \alpha_m} D_k,$$

где

$$D_k = \prod_{i=k}^N c_i^2 \cdot \det B, \quad (B)_{ij} = \frac{1}{\beta_i + \beta_j}, \quad i, j = k, k+1, \dots, N.$$

Для вычисления $\det B$ удобно привлечь более общий определитель G с элементами $1/(\beta_i + x_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Такой определитель равен отношению многочленов степеней $n-1$ и n относительно β_j, x_j и обращается в нуль при $\beta_i = \beta_k$ или $x_j = x_m$, где $1 \leq k, m \leq n$. Поэтому

$$\det G = C_n \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n (\beta_i - \beta_j)(x_i - x_j)}{\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (\beta_i + x_j)}.$$

При $x_k = \beta_k$

$$\det G = \frac{C_n}{2^n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i+1}^n \left(\frac{\beta_i - \beta_j}{\beta_i + \beta_j} \right)^2.$$

Для определения постоянной C_n нужно умножить обе части последнего равенства на произведение $2^n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n$ и перейти к пределу при $\beta_j \rightarrow \infty$, $j = 2, 3, \dots, n$. В результате $C_n = 1$,

$$D_k = \frac{c_k^2 c_{k+1}^2 \dots c_N^2}{2^{N-k+1} \beta_k \beta_{k+1} \dots \beta_N} \prod_{i=k}^{N-1} \prod_{j=i+1}^N \left(\frac{\beta_i - \beta_j}{\beta_i + \beta_j} \right)^2.$$

Так как

$$\frac{d\Delta}{dx} = -2 \left(\sigma_{k+1} e^{2 \sum_{m=k+1}^N \alpha_m} D_{k+1} + \sigma_k e^{2 \sum_{m=k}^N \alpha_m} D_k \right), \quad \sigma_k = \sum_{j=k}^{j=N} \beta_j,$$

то

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -4 \frac{d}{dx} \frac{\sigma_{k+1} D_{k+1} + \sigma_k D_k e^{2\alpha_k}}{D_{k+1} + D_k e^{2\alpha_k}} = \frac{8\beta_k^2}{\left(\sqrt{\frac{D_{k+1}}{D_k}} e^{-\alpha_k} + \sqrt{\frac{D_k}{D_{k+1}}} e^{\alpha_k} \right)^2} = \\ &= \frac{2\beta_k^2}{ch^2(\alpha_k - \varphi_k^+)} \frac{2\beta_k^2}{ch^2(\beta_k x - \beta_k^3 t + \varphi_k^+)}, \quad \varphi_k^+ = \frac{1}{2} \ln \frac{c_k^2}{2\beta_k} \prod_{j=k+1}^N \left(\frac{\beta_j + \beta_k}{\beta_j - \beta_k} \right)^2. \end{aligned}$$

Таким образом, при достаточно большом фиксированном значении $t > 0$ функция $u(x, t)$ отлична от нуля в окрестности точек $x_k = 4\beta_k^2 t - \frac{1}{\beta_k} \varphi_k^+$ (вне этих окрестностей $u(x, t)$ экспоненциально мала), т.е. является суперпозицией N солитонов. Солитоны движутся в положительном направлении оси $0x$ и расположены в порядке возрастания скоростей $v_k = 4\beta_k^2$, где $k = 1, 2, \dots, N$.

Аналогично при $t \rightarrow \infty$ и $\alpha_k = C_k$

$$u(x, t) = \frac{2\beta_k^2}{ch^2(\beta_k x - 4\beta_k^3 t + \varphi_k^-)}, \quad \varphi_k^- = \frac{1}{2} \ln \frac{c_k^2}{2\beta_k} \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\beta_k + \beta_j}{\beta_k - \beta_j} \right)^2,$$

т.е. солитоны расположены в порядке убывания скоростей.

Полный сдвиг фаз k -го солитона

$$\Delta \varphi_k = \varphi_k^+ - \varphi_k^- = \ln \prod_{j=k+1}^N \left(\frac{\beta_j + \beta_k}{\beta_j - \beta_k} \right) - \ln \prod_{j=1}^{k-1} \left(\frac{\beta_k + \beta_j}{\beta_k - \beta_j} \right).$$

Сравнение со сдвигом фаз при взаимодействии двух солитонов (задача 9.36) показывает, что $\Delta\varphi_k$ — сумма сдвигов фаз при взаимодействии k -го солитона с теми, которые сначала ему предшествуют (их $k-1$), и с теми, которым он предшествует (их $N-k$).

9.38. Указание. Интегральное уравнение (6.51) для функции $f^+(x, k)$ заменой $\chi = f^+ e^{-ikx}$ привести к виду

$$\chi(x, k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \int_x^\infty P(x, \xi, k) e^{-ik(\xi-x)} \chi(\xi, k) d\xi \quad (9.139)$$

и решать методом последовательных приближений. Для исследования сходимости ряда Неймана установить оценку

$$\| \mathcal{K}^n \chi_0 \| \leq \begin{cases} \frac{V^n(x)}{n!}, & 0 \leq \beta, \\ F(x) e^{2\beta x} \frac{V^{n-1}(x)}{(n-1)!}, & -\beta_0 < \beta < x, \end{cases} \quad \beta = \text{Im} k,$$

где

$$\chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V(x) = 2M \int_x^\infty e^{-2\beta_0|\xi|} d\xi, \quad F(x) = 2M \int_x^\infty e^{-2\beta_0|\xi| - 2\beta\xi} d\xi.$$

9.42. $W[f^+, \tilde{f}^+] = -1$, $W[f^-, \tilde{f}^-] = 1$.

9.43. Указание. Исключить χ_2 (χ_1) из системы (9.139); интеграл в полученном уравнении для χ_1 (χ_2) проинтегрировать по частям и воспользоваться оценкой (9.49).

9.44. Решение. 1. Существование матрицы S — следствие линейной независимости f^+ и $\tilde{f}^+$ (задача 9.42). 2. Так как $\det(f^-, \tilde{f}^-) = \det(f^+ \tilde{f}^+) \cdot \det S$, то $\det S = -1$. 3. Формулы следуют из представлений (9.52) и оценок (9.50).

9.45. Решение. Функции f^-, g^- удовлетворяют уравнениям $\mathcal{L}_j \psi = k\psi$, где $j = 1, 2$, или в подробной записи (верхний индекс у f и g временно опущен)

$$\begin{aligned} f_{1x} - q_1 f_2 + ik f_1 &= 0, \\ -f_{2x} - r_1 f_1 + ik f_2 &= 0, \\ g_{1x} - q_2 g_2 + ik g_1 &= 0, \\ -g_{2x} - r_2 g_1 + ik g_2 &= 0. \end{aligned}$$

Если 1-е и 3-е уравнения умножить соответственно на g_1, f_1 и результаты сложить, затем подобную процедуру проделать со 2-м и 4-м уравнениями, то получатся тождества

$$\begin{aligned} (f_1 g_1)_x - (q_1 f_2 g_1 + q_2 f_1 g_2) + 2ik f_1 g_1 &= 0, \\ -(f_2 g_2)_x - (r_1 f_1 g_2 + r_2 f_2 g_1) + 2ik f_2 g_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.140)$$

Посредством аналогичных действий из 1-го, 4-го и 2-го, 3-го уравнений получаются еще два тождества

$$\begin{aligned} (f_1 g_2)_x - (q_1 f_2 g_2 + r_2 f_1 g_1) &= 0, \\ -(f_2 g_1)_x - (q_2 f_2 g_2 + r_1 f_1 g_1) &= 0. \end{aligned} \quad (9.141)$$

Асимптотика (9.50) решений Йоста такова, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1 g_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_2 g_1 = 0.$$

Благодаря этому, тождества (9.141) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} f_1(x, k) g_2(x, k) &= \int_{-\infty}^x (q_1 f_2 g_2 + r_2 f_1 g_1) d\xi, \\ f_2(x, k) g_1(x, k) &= \int_{-\infty}^x (q_2 f_2 g_2 + r_1 f_1 g_1) d\xi. \end{aligned} \quad (9.142)$$

При $x \rightarrow +\infty$ левые части формул (9.142) имеют пределы $a_1 b_2$ и $a_2 b_1$ (задача 9.44.3). Равенства (9.54) являются результатом сложения и вычитания предельных (при $x \rightarrow +\infty$) выражений (9.142). Если теперь взять решения Йоста $\tilde{f}^-$, $\tilde{g}^-$, то повторение проделанных выкладок приведет к равенствам (9.55).

9.47. Указание к п. 1. Решения Йоста в форме (6.51) подставить в (9.52). Решение п. 2. Выражение для $b(k)$, полученное в предыдущем пункте, после подстановки в него f_1^- в форме (6.51) и интегрирования по частям, преобразуется к виду

$$\begin{aligned} b(k) = \frac{1}{2ik} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ik\xi} r'(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ik\xi} r'(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\xi} e^{ik\eta} q(\eta) f_2^-(\eta, k) d\eta + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} r(\xi) q(\xi) f_2^-(\xi, k) d\xi \right]. \end{aligned}$$

Последние два интеграла содержат функцию f_2^- , поэтому их порядок $O\left(\frac{1}{k}\right)$ (задача 9.43). Такой же порядок имеет первый интеграл, что проверяется интегрированием по частям.

9.48. Указание к п. 1. Записать уравнение (9.44) в форме $M(k)\psi(x, k) = 0$, где

$$\mathcal{M}(k) = \begin{pmatrix} D + ik & -q \\ -\bar{q} & -D + ik \end{pmatrix}.$$

Применив преобразование $A\overline{\mathcal{M}}(k)A = \mathcal{M}(\bar{k})$ (матрица A определена в примере 9.7), показать, что функция $\psi(x, k)$ удовлетворяет также уравнению $\mathcal{M}(k)A^\tau \overline{\psi}(x, \bar{k}) = 0$. Затем установить формулы

$$\tilde{f}^+(x, k) = A^\tau \tilde{f}^+(x, \bar{k}), \quad \tilde{f}^-(x, k) = A \tilde{f}^-(x, \bar{k}) \quad (9.143)$$

и воспользоваться разложениями (9.52).

9.49. Указание. Функции K_1 , K_2 , $(\tilde{K}_1, \tilde{K}_2)$ являются решением задачи Гурса (8.34), что доказывается подстановкой f^+ ($\tilde{f}^+$) в форму (9.56) в уравнение (9.44).

9.50. Указание. Соотношение $\tilde{K} = A^\tau \overline{K}$ получается из представлений (9.56)

после подстановки функции $\tilde{f}^+$ в форме (9.143); см. также задачу 9.48.

9.51.

$$1. K(x, y) - \overline{F}(x + y) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) + \int_x^\infty A \overline{K}(x, z) \overline{F}(y + z) dz = 0; \quad (9.144)$$

$$2. K(x, y) - F(x + y) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) - \int_x^\infty A K(x, z) F(y + z) dz = 0; \quad (9.145)$$

3. Уравнение имеет вид (9.145), при этом $\overline{K} = K$, $\overline{F} = F$; функции K_1 , K_2 удовлетворяют уравнениям

$$K_1(x, y) - F(x + y) + \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, s) F(s + z) F(y + z) ds dz = 0, \quad (9.146)$$

$$K_2(x, y) + \int_x^\infty F(x + s) F(y + s) ds + \\ + \int_x^\infty \int_x^\infty K_2(x, s) F(s + z) F(y + z) ds dz = 0. \quad (9.147)$$

9.52.

$$1) \quad q(x) = -2\overline{g}^\tau(x) A^{-1}(x) \overline{g}(x), \quad A = I + \overline{H}H, \quad (9.148)$$

$$g_j = \sqrt{\overline{c}_j} e^{ik_j x}, \quad h_{mn} = i \frac{\sqrt{c_m \overline{c}_n} e^{i(k_m - \overline{k}_n)x}}{k_m - \overline{k}_n};$$

$$2) \quad q(x) = 2 \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \det(I - iH)}{\operatorname{Re} \det(I - iH)}, \quad (9.149)$$

$$h_{mn} i \frac{\sqrt{c_m \overline{c}_n} e^{i(k_m + k_n)x}}{k_m + k_n}, \quad j, m, n = \overline{1, N},$$

где $\overline{c}_m = c_m$, если $\operatorname{Re} k = 0$, $c_1 = \overline{c}_2$, если $k_{1,2} = \pm \alpha + i\beta$, $m, n = \overline{1, N}$.
Указание к п. 1. См. задачу 4.208.2. Решение п. 2. Уравнения (9.146), (9.147) совпадают с уравнениями (4.34), (4.35), в которых

$$u(x, y) = K_{1,2}(x, y), \quad K(x, y) = \overline{K}(x, y) = F(x + y),$$

$$g_j(x) = \sqrt{c_j} \exp(ik_j x), \quad j = \overline{1, N}.$$

Следовательно,

$$K_1(x, x) = g^\tau(x) A^{-1}(x) g(x) = \sum_{j,k=1}^N g_j (A^{-1})_{jk} g_k = \\ = - \sum_{j,k=1}^N (A^{-1})_{jk} h'_{kj} = -\operatorname{tr}(H' A^{-1}),$$

$$K_2(x, x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \Delta, \quad \Delta = \det(I + H^2).$$

С другой стороны, $K_1(x, y)$ и $K_2(x, y)$ представляет собой решение задачи Гурса (8.34) (см. задачу 9.49). Из второго уравнения системы (8.34) при $x = y$ следует, что

$$\frac{d}{dx} K_2(x, x) = r(x) K_1(x, x) = -\frac{1}{2} r(x) q(x) = \frac{1}{2} q^2(x),$$

откуда

$$q^2(x) = 2 \frac{d}{dx} K_2(x, x) = \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I + H^2).$$

Вместе с тем $q(x) = -2K_1(x, x) = 2 \operatorname{tr}(A^{-1}H')$. Более удобное выражение для $q(x)$ можно получить, составив сумму

$$\begin{aligned} q^2 + iq' &= 2 \frac{d}{dx} K_2(x, x) - 2i \frac{d}{dx} K_1(x, x) = -2i \frac{d}{dx} (A^{-1}H' + iA^{-1}HH') = \\ &= -2i \frac{d}{dx} \operatorname{tr}(A^{-1}(I+iH)H') = -2i \frac{d}{dx} \operatorname{tr}[(I-iH)^{-1}(I+iH)^{-1}(I+iH)H'] = \\ &= -2 \frac{d}{dx} \operatorname{tr}[(I-iH)^{-1}H'] = -2 \frac{d}{dx} \operatorname{tr}[(I-iH)^{-1}(I-iH)'] = \\ &= 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I-H). \end{aligned}$$

В результате

$$iq' = 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I-iH) - \frac{d^2}{dx^2} \ln \det(I+H^2) = \frac{d^2}{dx^2} \ln \frac{\det(I-iH)}{\det(I+iH)},$$

откуда

$$q(x) = \frac{1}{i} \frac{d}{dx} \ln \frac{\det(I-iH)}{\det(I+iH)} = 2 \frac{d}{dx} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \det(I-iH)}{\operatorname{Re} \det(I-iH)},$$

постоянная интегрирования равна нулю, так как $q(x)$ и $H(x)$ стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$. Из свойства $\bar{a}(k) = a(-k)$ (задача 9.48.3) следует, что $\bar{\dot{a}}(k) = -\dot{a}(-k)$. Пусть $k_m = i\beta_m$, тогда $\bar{\dot{a}}(i\beta_m) = -\dot{a}(i\beta_m)$, и $\bar{b}_m = b_m$, поэтому

$$\bar{c}_m = \frac{i\bar{b}_m}{\bar{\dot{a}}(i\beta_m)} = -\frac{ib_m}{\dot{a}(i\beta_m)} = c_m.$$

Если $k_{1,2} = \pm\alpha + i\beta$, то $\bar{\dot{a}}(k_1) = -\dot{a}(-\bar{k}_1) = -\dot{a}(k_2)$, и $\bar{b}_1 = b_2$, следовательно,

$$c_1 = -\frac{ib_1}{\dot{a}(k_1)} = \frac{i\bar{b}_2}{\dot{a}(k_2)} = \bar{c}_2.$$

9.53.

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \pm 2iq^2k - 4ik^3 & -q_{xx} \mp 2q^3 + 2iq_xk + 4qk^2 \\ \pm q_{xx} + 2q^3 \pm 2iq_xk \mp 4qk^2 & \mp 2iq^2k + 4ik^3 \end{pmatrix}; \\ 2) \quad \mathcal{A} &= \begin{pmatrix} \frac{i}{4k} \cos u & \frac{i}{4k} \sin u \\ \frac{i}{4k} \sin u & -\frac{i}{4k} \cos u \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Указания. 1. Решать систему (9.68) в виде многочленов третьей степени по k при условии $r = \mp q$, $\bar{q} = q$. 2. Решение системы (9.68) представить в виде $U = U_0/k$, $V = V_0/k$, $W = W_0/k$, полагая $r = -q = \frac{1}{2}u_x$, $U_0 = \frac{i}{4}\cos u$, $\bar{q} = q$; уравнение СГ является эволюционным для u_x .

9.54. $a(k, t) = a(k, 0)e^{-2U_\infty(k)t}$, $b_j(t) = b_j(0)e^{-2U_\infty(k_j)t}$, $U_\infty(k) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} U$, $j=1, 2, \dots, N$; величина $U_\infty(k)$ равна 1) $-4ik^3$; 2) $-2ik^2$;

3) $i/4k$.

9.55. $u(x, t) = \frac{2\beta e^{i(\delta - 2\alpha x - 4(\alpha^2 - \beta^2)t)}}{ch(2\beta x + 8\alpha\beta t + \epsilon)}$, $\beta > 0$, $\alpha + i\beta$ — простой нуль $a(k)$. Решение. Функция $u(x, t)$ определяется формулой (9.148), в которой $\mathbf{N} = 1$, $c = c(0)\exp(4ik^2t)$ (задача 9.54), $g = \sqrt{c}\exp(ikx)$, $h = \frac{|c|\exp(-2\beta x)}{2\beta}$. Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{-2\bar{g}^2}{1 + |h|^2} = \frac{-2c(0)e^{-2i\alpha x - 2\beta x - 4i(\alpha^2 - \beta^2)t - 8\alpha\beta t}}{1 + \frac{1}{4\beta^2}|c(0)|^2 e^{-4\beta x - 16\alpha\beta t}}.$$

При $-\frac{\bar{c}(0)}{2\beta} = e^{i\delta - \epsilon}$ получается выражение, приведенное в ответе.

9.56. $u(x, t) = \frac{\pm 2\beta}{ch(2\beta x - 8\beta^3 t + \epsilon)}$, где $\beta > 0$, $i\beta$ — простой нуль функции $a(k)$; $v_0 = 4\beta^2$, $u_0 = 2\beta$. Указание. Применить формулу (9.149).

9.57. $u(x, t) = \pm(\beta_2^2 - \beta_1^2) \frac{\beta_2 ch 2\eta_1 + \beta_1 ch 2\eta_2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 ch^2(\eta_2 - \eta_1) + (\beta_2 - \beta_1)^2 sh^2(\eta_2 + \eta_1)}$,
 $u(x, t) = \pm(\beta_2^2 - \beta_1^2) \frac{\beta_2 ch 2\eta_1 - \beta_1 ch 2\eta_2}{(\beta_2 + \beta_1)^2 sh^2(\eta_2 - \eta_1) + (\beta_2 - \beta_1)^2 ch^2(\eta_2 + \eta_1)}$,

где $\eta_j = \beta_j + 4\beta_j^3 t + \delta_j$, δ_j — вещественные константы, $j = 1, 2$, сдвиги фаз $\Delta\varphi_{1,2} = \mp 2\ln \frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}$. Указание. Применить формулу (9.149) и рассмотреть случаи $c_1(0)c_2(0) > 0$ и $c_1(0)c_2(0) < 0$.

9.58. $u(x, t) = \pm 4\beta sech \mu \frac{\cos \nu - \frac{\beta}{\alpha} \sin \nu \cdot th \mu}{1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \sin^2 \nu sech^2 \mu}$, где $\mu = 2\beta x + 8\beta(3\alpha^2 - \beta^2)t + \delta$,

$\nu = 2\alpha x + 8\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)t + \epsilon$, δ и ϵ — вещественные константы. Фазовая скорость $4(\alpha^2 - 3\beta^2)$, скорость огибающей $4(3\alpha^2 - \beta^2)$. Указание. Воспользоваться формулой (9.149), в которой $\bar{c}_2 = c_1$, $k_2 = -k_1$.

9.59. $u(x, t) = 4arctg e^{\pm(2\beta x + \frac{t}{2\beta} + \delta)}$, $\beta > 0$, δ — вещественная константа. Решение. Данные рассеяния $s(0) = \{R(k, 0) = 0, i\beta, c(0)\}$ соответствуют потенциалу $q(x, 0) = -\frac{1}{2}u_x(x, 0)$ (задача 9.53 п.2). Потенциал $q(x, t) = -\frac{1}{2}u_x(x, t)$ восстанавливается по формуле (9.149), где $c(t) = c(0)\exp(-\frac{t}{2\beta})$ (задача 9.54 п.3), $c(0)$ — вещественная константа (задача 9.52 п.2). Таким образом,

$$u_x(x, t) = -2q(x, t) = -4\frac{\partial}{\partial x} arctg \frac{c(0)}{2\beta} e^{-2\beta x - \frac{t}{2\beta}}.$$

Если $c(0) > 0$, то $c_0 = 2\beta e^{-\delta}$ и $u(x, t) = -4arctg \exp(-\delta - 2\beta x - \frac{t}{2\beta}) + C$, где $C = u(+\infty, t) + 2\pi = 2\pi$. Следовательно,

$$u(x, t) = 4\left(\frac{\pi}{2} - arctg e^{-(\delta + 2\beta x + \frac{t}{2\beta})}\right) = 4arctg e^{-(2\beta x + \frac{t}{2\beta} + \delta)}.$$

Если $c(0) < 0$, то решения нет. В случае 2 решение строится аналогично.

9.60. $u(x, t) = \pm \arctg \left(\frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \frac{sh(\eta_1 - \eta_2)}{ch(\eta_1 + \eta_2)} \right)$, $\eta_j = \beta_j x + \frac{t}{4\beta_j} + \delta_j$, $j = 1, 2$, $\delta_{1,2}$ — вещественные константы. Решение. $u_x(x, t) = -2q(x, t)$, где $q(x, t)$ выражается формулой (9.149), в которой $c_j(t) = c_j(0)p(-\frac{t}{2\beta_j})$, $c_j(0)$ — вещественные числа, $j = 1, 2$. Элементы матрицы

$$h_{mn} = \frac{\sqrt{c_m c_n} e^{-(\beta_m + \beta_n)x}}{\beta_m + \beta_n}, \quad m, n = 1, 2$$

определитель

$$\det(I - iH) = 1 - \frac{c_1 c_2}{4\beta_1 \beta_2} \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_2 + \beta_1} \right)^2 e^{-2(\beta_1 + \beta_2)x} - i \left(\frac{c_1}{2\beta_1} e^{-2\beta_1 x} + \frac{c_2}{2\beta_2} e^{-2\beta_2 x} \right).$$

Если $c_1 c_2 < 0$, то $u_x(x, t) = \pm 4 \frac{\partial}{\partial x} \arctg \frac{e^{-2\eta_1} - e^{-2\eta_2}}{1 + e^{-2\eta_1 - 2\eta_2 - \varepsilon}}$, $\eta_j = \beta_j x + \frac{t}{4\beta_j} + \varepsilon_j$, $e^{-2\varepsilon_j} = \frac{|c_j(0)|(\beta_2 - \beta_1)}{2\beta_j(\beta_2 + \beta_1)}$, $j = 1, 2$. Отсюда

$$u(x, t) = \pm 4 \arctg \left(e^{\varepsilon} \frac{sh(\eta_1 - \eta_2)}{ch(\eta_1 + \eta_2)} \right) + C,$$

где $C = u(\pm\infty, t) = 0$. Если $c_1 c_2 > 0$, то решение разрывно. Взаимодействие кинков исследуется так же, как в задаче (9.38).

$$\mathbf{9.61.} \quad u(x, t) = \pm 4 \arctg \frac{sh \frac{v(\tau - \tau_0)}{\sqrt{1-v^2}}}{v ch \frac{\xi - \xi_0}{\sqrt{1-v^2}}}, \quad v = \frac{1-4\beta_1^2}{1+4\beta_2^2}, \quad \beta_1 \neq \beta_2;$$

$$u(x, t) = \pm 4 \arctg \frac{\tau - \tau_0}{ch(\xi - \xi_0)}, \quad \beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\mathbf{9.62.} \quad u(x, t) = \pm 4 \arctg \frac{\frac{\beta}{\alpha} \frac{\cos(2\alpha x - \frac{\alpha t}{2|k_1|^2} + \delta_1)}{ch(2\beta x - \frac{\beta t}{2|k_1|^2} + \delta_2)}}{\delta_{1,2-}};$$

$$u(\xi, \tau) = \pm 4 \arctg \left[\frac{\frac{\beta}{\alpha} \cos \alpha((2-\nu)\xi + \nu(\tau - \tau_0))}{ch \beta(\nu(\xi - \xi_0) + (2-\nu)\tau)} \right], \quad \nu = 1 + \frac{1}{4|k_1|^2}, |k_1| \neq \frac{1}{2};$$

$$u(\xi, \tau) = \pm 4 \arctg \left[\frac{\frac{\sqrt{1-v^2}}{v} \frac{\cos(v(\tau - \tau_0))}{ch(\sqrt{1-v^2}(\xi - \xi_0))}}{v} \right], \quad v = 2\alpha.$$

9.64. Указание. Воспользоваться соответствием между АПБ (9.80) и соотношениями (9.79).

9.65. Решение. Умножение одного из уравнений (9.80) (они в данном случае одинаковы) на $q_1 + q_2$ и интегрирование дает

$$(q_1 + q_2)^2 + \left(\int_x^\infty (q_1^2 - q_2^2) d\xi \right)^2 + 4ik \int_x^\infty (q_1^2 - q_2^2) d\xi = 0,$$

где $k = k_1 = -\tilde{k}_1$ (задача 9.48.2). Если решить квадратное уравнение относительно интеграла и продифференцировать результат, то получится уравнение

$$q_1 - q_2 = \pm \frac{(q_1 + q_2)_x}{\sqrt{(2ik)^2 - (q_1 + q_2)^2}},$$

интегрирование которого приводит к ответу.

9.68. См. ответ к задаче 9.56. Указание. Решение уравнения $u = -w_x$, где w — решение системы

$$\begin{aligned} w_x &= -2\beta \sin w, \\ w_t &= -4\beta^2 w_x. \end{aligned}$$

9.70. Решение. В данном случае $r = -\bar{q}$, $\bar{q} = q = -\frac{1}{2}u_x$; пусть $w_x = -q$, тогда $u = -2w$ и АПБ (9.82) примет вид

$$\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right)_x = 2ik \sin \frac{u_1 - u_2}{2}.$$

В результате дифференцирования по t и применения уравнения $u_{xt} = \sin u$ получается соотношение

$$\frac{1}{2}(\sin u_1 + \sin u_2) = ik \cos \frac{u_1 - u_2}{2} \cdot (u_1 - u_2)_t,$$

откуда

$$\sin \frac{u_1 + u_2}{2} = ik(u_1 - u_2)_t.$$

9.73 $u(x, t) = \pm 4 \arctg \frac{2\beta x - \frac{t}{2\beta}}{ch(2\beta x + \frac{t}{2\beta} + \delta)}$. Указание. Применить формулу (9.83), которая при $k_2 \rightarrow k_1 = i\beta$, $w_0 = 0$ переходит в

$$tg \frac{u}{4} = -\frac{\beta}{2} \frac{\partial u_1}{\partial \beta},$$

где u_1 — однокинковое решение (см. задачу 9.59).

9.74. $iu_{2x} = -u_{1y} + k \sin \frac{u_2 - u_1}{2} - \frac{1}{k} \sin \frac{u_1 + u_2}{2}$,

$$u_{2y} = -iu_{1x} + k \sin \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{1}{k} \sin \frac{u_1 + u_2}{2},$$

$$u(x, y) = \pm 4 \arctg e^{x \sin \varphi + y \cos \varphi + \delta}, \quad 0 < \varphi < \pi.$$

Указание. В уравнении СГ и в АПБ (9.85) сделать замену переменных $2x \rightarrow x + iy$, $2y \rightarrow x - iy$. Вещественное решение получается при $|k| = 1$.

9.75. Регулярное решение дано в ответе к задаче 9.55, сингулярное решение

$$u(x, t) = \frac{2\beta e^{i(\delta_1 - 2\alpha x - 4(\alpha^2 - \beta^2)t)}}{sh(2\beta x + 8\alpha\beta t + \delta_2)}.$$

Указание. Функция $u(x, t)$ — решение системы

$$\begin{aligned} u_x - u \int_x^\infty |u|^2 d\xi + 2i\bar{k}_1 u &= 0, \\ iuu_t + u_x + u_2 |u|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.150)$$

Первое уравнение получается из АПБ (9.80) при $r_1 = -\bar{q}_1$, $r_2 = -\bar{q}_2$, $q_1 = 0$, $q_2 = u$, $k_1 = \bar{k}_1$, $k_1 = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$ (задача 9.58.1.). Второе уравнение есть НУШ, в котором u_{xx} взята из продифференцированного первого уравнения. Следствием (9.150) является система

$$\begin{cases} w_x = w^2 - 4\beta^2, \\ w_t = 4\alpha w_x, \end{cases} \quad w = \int_x^\infty |u|^2 d\xi - 2\beta.$$

Ее решение определяет $|u|$. Чтобы найти $\arg u = \varphi(x, t)$, нужно в уравнения системы (9.150) подставить $u = |u| \exp(i\varphi)$.

9.76. Решение. Для построения АПБ (9.87) используется та же идея, которая приводит к АПБ (9.80). Пусть f_1^- и f_2^- (далее f_1 и f_2) — решения Йоста уравнения (9.27) для потенциалов $-u_1$ и $-u_2$ соответственно, тогда

$$\begin{aligned} f_{1xx} + (k^2 + u_1)f_1 &= 0, \\ f_{2xx} + (k^2 + u_2)f_2 &= 0, \end{aligned} \quad (9.151)$$

$$\begin{aligned} (f_{1xx}f_2)_x + (k^2 + u_1)(f_1f_2)_x + u_{1x}f_1f_2 &= 0, \\ (f_1f_{2xx})_x + (k^2 + u_2)(f_1f_2)_x + u_{2x}f_1f_2 &= 0. \end{aligned} \quad (9.152)$$

Перекрестное умножение уравнений (9.151) сначала на f_2 и f_1 и почленное вычитание, затем — на f_{2x} и f_{1xx} с последующим сложением приводят к соотношениям

$$(f_{1x}f_2 - f_1f_{2x})_x + (u_1 - u_2)f_1f_2 = 0, \quad (9.153)$$

$$(f_{1x}f_{2x})_x + k^2(f_1f_2)_x + u_1f_1f_{2x} - u_2f_{1x}f_2 = 0. \quad (9.154)$$

Уравнения (9.152) и (9.154) являются источниками формулы

$$\begin{aligned} (f_{1xx}f_2 + f_1f_{2xx} - 2f_{1x}f_{2x})_x + (u_{1x} + \\ + u_{2x})f_1f_2 + (u_1 - u_2)(f_{1x}f_2 - f_1f_{2x}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.155)$$

Интегрирование по x от $-\infty$ до ∞ соотношений (9.153) и (9.155) с использованием разложения (9.13) и асимптотических представлений (9.11) превращает их в равенства

$$\begin{aligned} 2ika_1a_2(R_2 - R_1) &= - \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 - u_2)f_1f_2d\xi, \\ -4k^2a_2(R_2 + R_1) &= - \int_{-\infty}^{\infty} (u_{1x} + u_{2x})f_1f_2d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} (u_1 - u_2)(f_{1x}f_2 - f_1f_{2x})d\xi. \end{aligned}$$

Если второй интеграл во втором равенстве проинтегрировать по частям, применяя (9.153), и результат сложить с первым равенством, умноженным на $2k_1 > 0$, то получится соотношение, аналогичное (9.75),

$$\begin{aligned} 4ka_1a_2[ik_1(R_2 - R_1) - k(R_2 + R_1)] &= \\ = - \int_{-\infty}^{\infty} \left[2k_1(u_1 - u_2) + u_{1x} + u_{2x} - (u_1 - u_2) \int_x^{\infty} (u_1 - u_2)d\xi \right] f_1f_2dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$R_2 = -\frac{k+ik_1}{k-ik_1}R_1, \quad (9.156)$$

$$u_{1x} + u_{2x} + (u_1 - u_2)(2k_1 - \int_x^{\infty} (u_1 - u_2)d\xi) = 0. \quad (9.157)$$

Введение потенциальных функций

$$w_i = \frac{1}{2} \int_x^\infty u_i d\xi + C_i, \quad i = 1, 2, \quad C_1 - C_2 = -k_1$$

преобразует уравнение (9.157) в первое уравнение системы (9.87). Второе АПБ получается взятием разности уравнений КдФ для $u_i = -2w_{ix}$, $i=1, 2$, и интегрированием по x .

$$\mathbf{9.77.} \quad u(x, t) = \frac{2\beta^2}{ch^2(\beta x - 4\beta^3 t + \delta_1)}, \quad u(x, t) = \frac{2\beta^2}{sh^2(\beta x - 4\beta^3 t + \delta_2)}.$$

Указание. Так как $u_1=0$ — решение уравнения КдФ, то при $w_1=0$, $w_2=w$, $k_1 = \beta$ АПБ (9.87) принимают вид

$$w_x = w^2 - \beta^2, \quad w_t = -4\beta^2 w_x.$$

Решение первого уравнения имеет две формы

$$\beta \operatorname{arcth} w = -\beta^2 x + C_1(t), \quad \beta \operatorname{arccth} w = -\beta^2 x + C_2(t)$$

с произвольными функциями $C_{1,2}(t)$, которые определяются после подстановки во второе уравнение.

9.78. Указание. Воспользоваться соответствием между АПБ (9.157) и соотношением (9.156).

9.80. См. ответ к задаче 9.36. Указание. В качестве w_1 и w_2 взять регулярное и сингулярное односолитонные решения (задача 9.36), $w_0 = 0$.

$$\mathbf{9.81.} \quad u(x, t) = \frac{2\beta^2}{ch^2(\beta x - 16\beta^5 t + \delta_1)}, \quad u(x, t) = \frac{2\beta^2}{sh^2(\beta x - 16\beta^5 t + \delta_2)}.$$

Указание. Потенциальная функция w — решение системы:

$$w_x = w^2 - \beta^2, \\ w_t = -16\beta^4 w.$$

9.82.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad \sigma=1, & \alpha=1, \beta=\pm i; \\ 2) \quad \sigma=1, & \begin{cases} \beta v_x + v^2 - u = 0, \\ v_t + 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0; \end{cases} \\ 3) \quad \sigma=1, & v = \frac{\beta}{x+C}; \end{array} \quad \begin{array}{ll} \sigma=-1, & \alpha=-1, \beta=\pm 1; \\ \sigma=-1, & \begin{cases} \beta v_x - v^2 - u = 0, \\ v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0; \end{cases} \\ \sigma=-1, & v = \frac{-\beta}{x+C}. \end{array}$$

$$\mathbf{9.83.} \quad v_x = -\frac{1}{2\nu} v u, \quad v_t = \nu v_{xx}.$$

$$\mathbf{9.84.} \quad u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\xi}{t} e^{-\Phi(x, \xi, t)} d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\Phi(x, \xi, t)} d\xi},$$

$$\Phi(x, \xi, t) = \frac{1}{2\nu} \left[\left(\frac{x-\xi}{2t} \right)^2 + \int_0^\xi u_0(\eta) d\eta \right].$$

9.85. Указание. Из условий интегрируемости $v_{xt} = v_{tx}$, $u_{xt} = u_{tx}$ следует, что $u_{xt} = \exp(\alpha u)$, если $v_{xt} = 0$, и наоборот.

$$\mathbf{9.86.} \quad u(x, t) = f(x) - g(t) - \frac{2}{\alpha} \ln \left[k \int_{x_0}^x e^{\alpha f(\xi)} d\xi + \frac{\alpha}{2k} \int_{t_0}^t e^{-\alpha g(\tau)} d\tau \right],$$

где $f, g \in C^1$, k — параметр. Указание. Соотношения (9.89), в которых $u(x, t)$ — решение уравнения Лиувилля, а $v(x, t) = f(x) + g(t)$ — общее ре-

шение волнового уравнения $v_{xt} = 0$, записать в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha}{2}(u-f(x))_x e^{-\frac{\alpha}{2}(u-f(x)+g(t))} &= k e^{\alpha f(x)}, \\ -\frac{\alpha}{2}(u-g(t))_t e^{-\frac{\alpha}{2}(u-f(x)+g(t))} &= \frac{\alpha}{2k} e^{-\alpha g(t)}, \end{aligned}$$

откуда

$$d e^{-\frac{\alpha}{2}(u-f(x)+g(t))} = k e^{\alpha f(x)} dx + \frac{\alpha}{2k} e^{-\alpha g(t)} dt.$$

9.88. Решение. Пусть $X = (x_1, x_2)$, $K = (k, -k^3)$ — двумерные векторы. Из определения многочлена $P(x_1, x_2)$ вытекает, что

$$P(-x) = P(x) \quad (, \quad P(0) = 0 \quad P(K) = 0. \quad (9.158)$$

В силу свойства (9.98)

$$P(D_x, D_t) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = \frac{P(K_1 - K_2)}{P(K_1 + K_2)} P(D_x, D_t) e^{\eta_1 + \eta_2} \cdot 1. \quad (9.159)$$

Многочлен $P(K_1 + K_2)$ — однородный симметрический многочлен 4-й степени. Он обращается в нуль при $k_1 = -k_2$, $k_1=0$, $k_2=0$ и не меняет форму при замене $k_i \rightarrow -k_i$, $i=1, 2$, поэтому $P(K_1 + K_2) = k_1 k_2 (k_1 + k_2)^2$. Отсюда

$$\frac{P(K_1 - K_2)}{P(K_1 + K_2)} = - \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2 = -e^{A_{12}}. \quad (9.160)$$

Соотношение (9.101) устанавливается аналогично. Снова применяется свойство (9.98), на основании которого

$$p_{123} P(D_x, D_t) e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \cdot e^{\eta_3} = \left[p_{123} \frac{P(K_1 + K_2 - K_3)}{P(K_1 + K_2 + K_3)} e^{A_{12}} \right] P(D_x, D_t) e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \cdot 1.$$

Выражение в квадратных скобках

$$\begin{aligned} p_{123} \frac{P(K_1 + K_2 - K_3)}{P(K_1 + K_2 + K_3)} e^{A_{12}} &= \\ &= -p_{123} \frac{P(K_1 + K_2 - K_3)}{P(K_1 + K_2 + K_3)} \frac{P(K_1 - K_2)}{P(K_1 + K_2)} = \frac{Q_1(k_1, k_2, k_3)}{Q_2(k_1, k_2, k_3)} \end{aligned}$$

есть отношение двух однородных симметричных многочленов 16-й степени. Многочлен Q_1 , получающийся в результате действия оператора p_{123} на многочлен $P(K_1 + K_2 - K_3)P(K_1 - K_2)P(K_2 + K_3)P(K_3 + K_1)$, обращается в нуль при $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, $k_i \pm k_j = 0$, $i \neq j$, $k_i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и не меняет знак при $k_i \rightarrow k_j$, $i \neq j$, следовательно,

$$Q_1 = c_1 k_1^2 k_2^2 k_3^2 (k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_1)(k_1 - k_2)^2 (k_2 - k_3)^2 (k_3 - k_1)^2 (k_1 + k_2 + k_3).$$

Многочлен $P(K_1+K_2+K_3) = 0$ при $k_1+k_2+k_3=0$ и $k_i+k_j=0$, $i \neq j$, поэтому

$$Q_2 = c_2 k_1^2 k_2^2 k_3^2 (k_1 + k_2)^3 (k_2 + k_3)^3 (k_3 + k_1)^3 (k_1 + k_2 + k_3).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} p_{123} \frac{P(K_1 + K_2 - K_3)P(K_1 - K_2)}{P(K_1 + K_2 + K_3)P(K_1 + K_2)} = \\ = c \left[\frac{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)(k_3 - k_1)}{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)(k_3 + k_1)} \right]^2. \end{aligned} \quad (9.161)$$

При $k_3 \rightarrow 0$ соотношение (9.161) принимает вид

$$\frac{P(K_1 - K_2)}{P(K_1 + K_2)} = -c \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2,$$

откуда $c = 1$.

9.90. Указание. Применить (9.103).

9.91. Указание. Воспользоваться формулой обмена (9.104) при $D_1 = \gamma D_z$, $D_2 = D_3 = 0$, $a = G/F$, $b = c = F$, $d = 1$.

9.92. Указание. Сравнить коэффициенты при одинаковых степенях γ в формуле (9.106), преобразованной с помощью (9.102).

9.93. Вывод формулы (9.111). Пусть $\varepsilon_2 = \varepsilon$, а остальные параметры равны нулю, тогда формула обмена примет вид

$$cd e^{2\varepsilon D_x} a \cdot b = e^{\varepsilon D_x} \left(e^{\varepsilon D_x} a \cdot d \right) \cdot \left(e^{\varepsilon D_x} c \cdot b \right).$$

Разложение в степенные ряды

$$\begin{aligned} cd(1 + 2\varepsilon D_x + 2\varepsilon^2 D_x^2 + \dots) a \cdot b = \left(1 + \varepsilon D_x + \frac{\varepsilon^2}{2} D_x^2 + \dots \right) \times \\ \times \left[(1 + \varepsilon D_x + \frac{\varepsilon^2}{2} D_x^2 + \dots) a \cdot d \right] \cdot \left[(1 + \varepsilon D_x + \frac{\varepsilon^2}{2} D_x^2 + \dots) c \cdot b \right] \end{aligned}$$

и приравнивание коэффициентов при ε^2 приводит к тождеству

$$\begin{aligned} 2cd D_x^2 a \cdot b &= \frac{1}{2} ad D_x^2 c \cdot b + (D_x a \cdot d)(D_x c \cdot b) + \frac{1}{2} cb D_x^2 a \cdot d + \\ &+ D_x(ad \cdot D_x c \cdot b) + D_x(D_x a \cdot d) \cdot cb + \frac{1}{2} D_x^2 ad \cdot cb. \end{aligned} \quad (9.162)$$

Если $\varepsilon_3 = \varepsilon$, а остальные параметры равны нулю, то в результате аналогичных выкладок получается тождество

$$\begin{aligned} 2ab D_x^2 c \cdot d &= \frac{1}{2} ad D_x^2 c \cdot b + (D_x a \cdot d)(D_x c \cdot b) + \frac{1}{2} cb D_x^2 a \cdot d - \\ &- D_x(ad \cdot D_x c \cdot b) - D_x(D_x a \cdot d) \cdot cb + \frac{1}{2} D_x^2 ad \cdot cb. \end{aligned} \quad (9.163)$$

Тождество (9.111) есть почленная разность (9.162) и 9.163).

9.96. См. ответ к задаче 9.60. Указание. Двухкинковое решение получается при $g_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}$, $\eta_j = \beta_j x + \frac{t}{\beta_j} + \delta_j$, $j = 1, 2$, $f_1 = 0$, f_2 определяется из третьего уравнения системы (??), а f_m , g_{m-1} равны нулю при $m \geq 3$.

9.97. См. ответы к задачам (9.58), (9.59). Указание. Посредством подстановки $u = G/F$ уравнение сводится к системе

$$\begin{aligned}(D_t + D_x^3)G \cdot F &= 0, \\ D_x^2 F \cdot G &= 2G^2,\end{aligned}$$

решение которой имеет форму рядов

$$\begin{aligned}F &= 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4 + \dots, \\ G &= \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3 + \dots\end{aligned}$$

Односолитонное решение получится, если

$$g_1 = e^{\eta}, \quad \eta = kx - k^3 t + \delta.$$

В этом случае $f_2 = \frac{1}{4k^2} e^{2\eta}$, а остальные функции равны нулю. Для построения двухсолитонного решения нужно взять функцию

$$g_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad \eta_i = k_i x - k_i^3 t + \delta_i, \quad i = 1, 2,$$

с которой связаны не равные нулю функции g_3, f_2, f_4 , при этом

$$\begin{aligned}F &= 1 + \varepsilon^2 \left(\frac{e^{\eta_1}}{4k_1^2} + \frac{e^{\eta_2}}{4k_2^2} + \frac{2e^{\eta_1+\eta_2}}{(k_1+k_2)^2} + \frac{\varepsilon^4}{16k_1^2 k_2^2} \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \right)^2 e^{2(\eta_1+\eta_2)} \right), \\ G &= \varepsilon(e^{\eta_1} + e^{\eta_2}) + \frac{\varepsilon^3}{4} \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} \right)^2 \left(\frac{1}{k_1^2} e^{\eta_1} + \frac{1}{k_2^2} e^{\eta_2} \right) e^{\eta_1+\eta_2}.\end{aligned}$$

9.98. См. ответ к задаче 9.55. Указание. Введением новой функции $u = G/F$, где F — вещественная функция, уравнение сводится к системе

$$\begin{aligned}(iD_t + D_x^2)G \cdot F &= 0, \\ D_x^2 F \cdot F &= 2G\overline{G}.\end{aligned}$$

9.99. Указание. Посредством замены $u = G/F$ перейти к системе

$$\begin{aligned}D_x D_t F \cdot F &= \alpha G^2, \\ D_x D_t F \cdot G &= FG.\end{aligned}$$

9.100. Односолитонное решение $u(x, t) = 2\beta_2 \operatorname{sech}(\beta x - 4\beta_3 t + \delta)$; двухсолитонное решение приведено в ответе к задаче 9.36. Решение. Уравнение КдФ заменой $u = v_x$ с последующим интегрированием преобразуется к виду $v_t + 3v_x^2 + v_{xxx} = 0$, затем с помощью подстановки $v = G/F$ и формул (9.107)–(9.109) трансформируется в уравнение

$$\frac{1}{F^2}(D_t + D_x^3)G \cdot F + \frac{3}{F^4}(D_x G \cdot F)(D_x^2 F \cdot F - D_x G \cdot F) = 0,$$

которое приводит к системе

$$\begin{aligned} D_x^2 F \cdot F - D_x G \cdot F &= 0, \\ (D_t + D_x^3) G \cdot F &= 0. \end{aligned}$$

Преобразование первого уравнения системы с помощью свойства (9.96) к виду $D_x(2F_x - G) \cdot F = 0$ показывает, что $G = 2F_x$ — решение этого уравнения. Таким образом, система сводится к одному уравнению

$$P(D_x, D_t) F \cdot F = 0 \quad (9.164)$$

(многочлен $P(x_1, x_2)$ имеет вид (9.99)), решение F которого определяет функцию $u(x, t) = 2(\ln F)_{xx}$. Если

$$F = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \dots \quad (9.165)$$

подставить в (9.164), то для $f_1, f_2, f_3, \dots$, получится система

$$\begin{aligned} P(D_x, D_t) f_1 \cdot 1 &= 0, \\ 2P(D_x, D_t) f_2 \cdot 1 &= -P(D_x, D_t) f_1 \cdot F_1, \\ 2P(D_x, D_t) f_3 \cdot 1 &= -2P(D_x, D_t)(2f_2 \cdot 1 f + f_1 \cdot f_2, \end{aligned} \quad (9.166)$$

и т.д. Первое уравнение системы имеет экспоненциальное решение

$$f_1 = e^\eta, \quad \eta = kx + \omega t + \delta.$$

В самом деле, в силу (9.98)

$$P(D_x, D_t) e^\eta \cdot 1 = P(k, \omega) e^\eta = (k\omega + k^4) e^\eta = 0,$$

если $\omega = -k^3$. Правая часть второго уравнения обращается в нуль, так как (см. (9.158))

$$P(D_t, D_x) e^\eta \cdot e^\eta + P(0, 0) e^{2\eta} = 0.$$

Поэтому все уравнения системы (9.166) превращаются в тождества, если

$$f_1 = e^{kx - k^3 t + \delta}, \quad f_m = 0, \quad m \geq 2,$$

что приводит к ответу при $k = 2\beta$.

Двухсолитонное решение порождается функцией

$$f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}, \quad \eta_j = k_j x - k_j^3 t + \delta_j, \quad j = 1, 2,$$

которая удовлетворяет первому уравнению системы (9.166). Вследствие соотношений (9.159) и (9.160) правая часть второго уравнения может быть представлена в форме

$$-P(D_x, D_t) f_1 \cdot f_1 = -2P(D_x, D_t) e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} = 2P(D_x, D_t) e^{\eta_1 + \eta_2 + A_{12}} \cdot 1,$$

откуда следует, что $f_2 = \exp(\eta_1 + \eta_2 + A_{12})$ — его решение. Правая часть третьего уравнения равна нулю, следовательно, функции

$f_1, f_2, f_m = 0$, где $m \geq 3$, являются решением системы. Остается применить формулу $u = 2(\ln F)_{xx}$ при $k_j = 2\beta_j$, $j = 1, 2$.

9.101. Указание. Решение 1-го уравнения системы (9.166) следует взять в

форме

$$f_1 = \sum_{i=1}^N e^{\eta_i}, \quad \eta_i = k_i x - k_i^3 t + \delta_i.$$

Тогда правая часть второго уравнения преобразуется с помощью (9.100) к виду

$$\begin{aligned} -2P(D_x, D_t) f_1 \cdot f_1 &= -2P(D_x, D_t) \sum_{1 \leq i < j}^N e^{\eta_i} \cdot e^{\eta_j} - \\ &\quad -2P(D_x, D_t) \left(\sum_{1 \leq i < j}^N e^{\eta_i + \eta_j + A_{ij}} \right) \cdot 1, \end{aligned}$$

стало быть,

$$f_2 = \sum_{1 \leq i < j}^N e^{\eta_i + \eta_j + A_{ij}}$$

— решение второго уравнения. Для правой части третьего уравнения после применения (9.99) получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} -2P(D_x, D_t) f_2 \cdot f_1 &= -2P(D_x, D_t) \sum_{1 \leq i < j < k}^N p_{ijk} (e^{\eta_i + \eta_j + A_{ij}} \cdot e^{\eta_k}) = \\ &= -2P(D_x, D_t) \left(\sum_{1 \leq i < j < k}^N e^{\eta_i + \eta_j + \eta_k + A_{ij} + A_{jk} + A_{ki}} \right) \cdot 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_3 = \sum_{1 \leq i < j < k}^N e^{\eta_i + \eta_j + \eta_k + A_{ij} + A_{jk} + A_{ki}}$$

— решение 3-го уравнения. Если предположить, что $f_4, f_5, \dots, f_N$ имеют аналогичную структуру, то ряд (9.165) сведется к конечной сумме F_N , которую можно записать в виде (9.122). Для обоснования формулы (9.122) нужно доказать, что F_N удовлетворяет уравнению (9.164). Одно из доказательств этого факта приведено в [1]. **9.102.** При $\lambda_{1,2} = \frac{1}{4} k_{1,2}^2$

$$F_1 = e^{\frac{\eta_1}{2}} + e^{-\frac{\eta_1}{2}}, \quad (9.167)$$

$$F_2 = (k_2 - k_1) \left(e^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} + e^{-\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} \right) + (k_2 + k_1) \left(e^{\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}} + e^{-\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}} \right), \quad (9.168)$$

где $\eta_j = k_j x - k_j^3 t + \delta_j$, $j = 1, 2$. Указание. Решение $u = 0$ уравнения (9.1) соответствует решению $F_0 = 1$ уравнения (9.121).

9.103. Решение. Необходимо проверить, что функции F_N и F_{N+1} , определенные выражением (9.125), удовлетворяют уравнениям (9.123) и (9.124). Пусть

$$a_{ij} = \frac{\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j}{k_i^2 - k_j^2}, \quad A_N = \frac{\prod_{1 \leq i < j}^N a_{ij}}{\prod_{i=1}^N \varepsilon_i k_i}, \quad \sigma_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \eta_i, \quad (9.169)$$

тогда выражение (9.125) примет более компактный вид

$$F_N = \sum_{\varepsilon} A_N e^{\sigma_N}. \quad (9.170)$$

В силу свойства (9.98) левая часть (9.123) равна

$$D_x^2 F_N \cdot F_{N+1} = \sum_{\varepsilon} \sum_{\varepsilon'} A_N A_{N+1} e^{\sigma_N} e^{\sigma_{N+1}} \left(\frac{\varepsilon_{N+1} k_{N+1}}{2} \right)^2 = \frac{k_{N+1}^2}{4} F_N F_{N+1},$$

следовательно, при $\lambda_{N+1} = \frac{1}{4} k_{N+1}^2$ уравнение становится тождеством. При подстановке F_N и F_{N+1} в левую часть уравнения (9.124) получается выражение

$$\left(-\frac{\varepsilon_{N+1}^3 k_{N+1}^3}{2} + 3\lambda_N \frac{\varepsilon_{N+1} k_{N+1}}{2} + \frac{\varepsilon_{N+1}^3 k_{N+1}^3}{8} \right) F_N F_{N+1},$$

тождественно равное нулю, так как при $\lambda_N = \frac{1}{4} k_{N+1}^2$ сумма в скобках равна нулю.

9.104.

$$F_1 = \frac{1}{k_1} \left(e^{\frac{\eta_1}{2}} - e^{-\frac{\eta_1}{2}} \right) \quad (9.171)$$

$$F_2 = \frac{1}{k_1 k_2 (k_1^2 - k_2^2)} \left[(k_1 - k_2) \left(e^{\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} - e^{-\frac{\eta_1 + \eta_2}{2}} \right) - (k_1 + k_2) \left(e^{\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}} - e^{-\frac{\eta_1 - \eta_2}{2}} \right) \right]. \quad (9.172)$$

Решение п. 1. Так как $u = 2(\ln F)_{xx}$, то

$$2 \left(\ln \left(e^{ax+b} F \right) \right)_{xx} = 2 \left(a + \frac{F_x}{F} \right)_x = 2 \left(\frac{F_x}{F} \right)_x = 2(\ln F)_{xx}.$$

Решение п. 2. Если распорядиться фазовой постоянной δ_1 в выражении (9.167) для F_1 так, чтобы $\delta_1 = \alpha_1 + \beta_1$, где $\exp(-\beta_1) = -1$, то

$$\begin{aligned} e^{\frac{\eta_1}{2}} + e^{-\frac{\eta_1}{2}} \sim 1 + e^{-\eta_1} &= 1 - e^{-(k_1 x - k_1^3 t + \alpha_1)} = \\ &= 1 - e^{-\zeta_1} \sim e^{\frac{\zeta_1}{2}} - e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \sim \frac{1}{k_1} \left(e^{\frac{\zeta_1}{2}} - e^{-\frac{\zeta_1}{2}} \right). \end{aligned}$$

Указание к п.3. В выражении (9.122) ввести $\varepsilon_i = 2\mu_i - 1$ и выбрать фазовые постоянные $\delta_i = \alpha_i + \beta_i$ так, чтобы

$$e^{\beta_i} = -\prod_{j=1, j \neq i}^N \left(\frac{k_i + k_j}{k_i - k_j} \right).$$

9.105. Решение. Так как функции, входящие в (9.126), связаны АПБ (9.123),

то

$$\begin{aligned} \left(D_x^2 - \frac{1}{4}k_N^2\right) F_{N-1} \cdot F_N &= 0, \\ \left(D_x^2 - \frac{1}{4}k_N^2\right) \tilde{F}_N \cdot F_{N+1} &= 0, \\ \left(D_x^2 - \frac{1}{4}k_{N+1}^2\right) F_N \cdot F_{N+1} &= 0, \\ \left(D_x^2 - \frac{1}{4}k_{N+1}^2\right) F_{N-1} \cdot \tilde{F}_N &= 0. \end{aligned}$$

Из первых двух уравнений в результате перекрестного умножения на $\tilde{F}_N F_{N+1}$, $F_{N-1} F_N$ и почленного вычитания следует, что

$$\tilde{F}_N F_{N+1} (D_x^2 F_{N-1} \cdot F_N) - F_{N-1} F_N (D_x^2 \tilde{F}_N \cdot F_{N+1}) = 0. \quad (9.173)$$

Применение тождества (9.111), в котором $a=F_{N-1}$, $b=F_N$, $c=\tilde{F}_N$, $d=F_{N+1}$, позволяет преобразовать (9.173) к виду

$$D_x \left[(D_x F_{N-1} \cdot F_{N+1}) \cdot \tilde{F}_N F_N + F_{N-1} F_{N+1} \cdot (D_x \tilde{F}_N \cdot F_N) \right] = 0. \quad (9.174)$$

Аналогично устанавливается (на базе 3-го и 4-го уравнений) соотношение:

$$D_x \left[(D_x F_N \cdot \tilde{F}_N) \cdot F_{N-1} F_{N+1} + F_N \tilde{F}_N \cdot (D_x F_{N-1} \cdot F_{N+1}) \right] = 0. \quad (9.175)$$

Почленная разность (9.174) и (9.175) с учетом свойства (9.94) приводит к уравнению

$$D_x (D_x F_{N+1} \cdot F_{N-1}) \cdot F_N \tilde{F}_N = 0,$$

которое становится тождеством, если (см. (9.95))

$$D_x F_{N+1} \cdot F_{N-1} = C_N F_N \tilde{F}_N. \quad (9.176)$$

Чтобы вычислить C_N , нужно в (9.176) подставить функции F в форме (9.170). Из определения A_N (см. (9.169)) следует, что

$$A_{N+1} = A_N \frac{\prod_{i=1}^N a_{i,N+1}}{k_{N+1} \varepsilon_{N+1}} = A_N \frac{\prod_{i=1}^{N-1} a_{i,N+1}}{k_{N+1} \varepsilon_{N+1}} a_{N,N+1}, \quad A_{N-1} \frac{\prod_{i=1}^N a_{i,N+1}}{k_{N+1} \varepsilon_{N+1}} = \tilde{A}_N.$$

Поэтому и вследствие свойства (9.97)

$$\begin{aligned} D_x F_{N+1} \cdot F_{N-1} &= \sum_{\varepsilon} \sum_{\varepsilon'} A_{N+1} A_{N-1} D_x e^{\sigma_{N+1}} \cdot e^{\sigma_{N-1}} = \\ &= \sum_{\varepsilon} \sum_{\varepsilon'} A_N \tilde{A}_N e^{\sigma_N} e^{\tilde{\sigma}_N} \frac{\varepsilon_N k_N - \varepsilon_{N+1} k_{N+1}}{k_N^2 - k_{N+1}^2} (\varepsilon_N k_N + \varepsilon_{N+1} k_{N+1}) = \frac{1}{2} F_N \tilde{F}_N, \end{aligned}$$

откуда $C_N = 1/2$.

9.106. Решение. Уравнение (9.126), в котором $F_0 = 1$, $F_1 = F_1(k_1)$ имеет вид (9.171), $\tilde{F}_1 = F_1(k_2)$, запишется в форме

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1}{k_1 k_2} \left(e^{\frac{\eta_1}{2}} - e^{-\frac{\eta_1}{2}} \right) \left(e^{\frac{\eta_2}{2}} - e^{-\frac{\eta_2}{2}} \right).$$

Его решение $F_2 = f(t)$, где F_2 задана выражением (9.172), должно удовлетворять уравнению (9.123), подстановка в которое приводит к тождеству

$$\frac{k_1^2 - k_2^2}{4} F_1 f = 0,$$

откуда $f = 0$.

9.107. $\Phi_0 = 1$, $u_0 = 0$; $\Phi_1 = x + c$, $u_1 = -\frac{2}{(x+c)^2}$; $\Phi_2 = x^3 + 12t + c$,

$u_2 = -\frac{6x(x^3 - 24t - 2c)}{(x^3 + 12t + c)^2}$. Указание. Решать систему (9.166) в классе полиномов.

9.108. $\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = x$, $\Phi_2 = \frac{x^3}{6} + 2t$. Указание. Перейти к пределу при $K \rightarrow 0$ в выражениях (9.171), (9.172).

9.109. Указание. Записать функцию F_N в виде

$$F_N = \frac{G_N}{\prod_{i=1}^N k_i \prod_{i < j}^N (k_i^2 - k_j^2)},$$

где

$$G_N(k_1, k_2, \dots, k_N) = \sum_{\varepsilon = \pm 1} \prod_{i < j}^N (\varepsilon_i k_i - \varepsilon_j k_j) \frac{\exp\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \eta_i\right)}{\prod_{i=1}^N \varepsilon_i},$$

и показать, что G_N обращается в нуль при $k_i = 0$, $k_i = \pm k_j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$.

9.110. Указание. Перейти к пределу при $K \rightarrow 0$ в (9.124) и (9.126).

9.111. $\Theta_2 = x^3 + 12t$, $\Theta_3 = x^6 + 60x^3t - 720t^2$, $\Theta_4 = x^{10} + 180x^7t + 302400xt^3$.

Указание. Записать рекуррентную формулу для Φ_N в виде

$$a_{N+1} a_{N-1} D_x \Theta_{N+1} \cdot \Theta_{N-1} = \frac{1}{2} a_N^2 \Theta_N^2$$

и показать, что $2(2N+1)a_{N+1}a_{N-1} = a_N^2$. Для построения Θ_N применить представление (9.128). Например, при $N = 4$ в рекуррентные формулы подставить уже известные многочлены Θ_2 , Θ_3 , тогда $\Theta_4 = x^{10} + \alpha x^7 t + \beta x^4 t^2 + \gamma x t^3$.

9.112. 1. $u_1(x, t) = \frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{k}{2}x + \sigma \frac{k}{2}\sqrt{k^2 + 1}t + \delta\right)$, $\sigma = \pm 1$,

$$u_2(x, t) = \frac{l + k_1^2 \sqrt{m} \operatorname{ch} \gamma_2 + k_2^2 \sqrt{m} \operatorname{ch} \gamma_1}{\left(\sqrt{m} \operatorname{ch} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} + \operatorname{ch} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}\right)^2},$$

$$m = \frac{3(k_1 - k_2)^2 + (\sigma_1 \sqrt{k_1^2 + 1} - \sigma_2 \sqrt{k_2^2 + 1})^2}{3(k_1 + k_2)^2 + (\sigma_1 \sqrt{k_1^2 + 1} - \sigma_2 \sqrt{k_2^2 + 1})^2},$$

$$l = \frac{3(k_1^2 - k_2^2)^2 + (k_1^2 + k_2^2)(\sigma_1 \sqrt{k_1^2 + 1} - \sigma_2 \sqrt{k_2^2 + 1})^2}{3(k_1 + k_2)^2 + (\sigma_1 \sqrt{k_1^2 + 1} - \sigma_2 \sqrt{k_2^2 + 1})^2},$$

$$\gamma_i = k_i x + \sigma_i k_i \sqrt{k_i^2 + 1} + \delta_i, \quad \sigma_i = \pm 1, \quad i = 1, 2.$$

$$2. \quad u(x, t) = -\frac{2}{(x \pm t)^2}.$$

Указание. Замена $u = v_x$, интегрирование по x и подстановка $v = G/F$ приводят к уравнению (см. (9.108), (9.110)).

$$\begin{aligned} & \frac{1}{F^2}(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)G \cdot F - \frac{G}{F^3}(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)F \cdot F + \\ & + \frac{G}{F^4}(D_x G \cdot F - D_x^2 F \cdot F) \left(\frac{G}{F} D_x^2 F \cdot F - D_x^2 G \cdot F \right) = 0. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое обращается в нуль, если $G = 2F_x$, т.е. $u = 2(\ln F)_{xx}$, тогда первое слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)F \cdot F}{F^2} = 0,$$

откуда $(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)F \cdot F = 0$. При $f_1 = e^{\eta_1}$, получается односолитонное решение, при $f_1 = e^{\eta_1} + e^{\eta_2}$ — двухсолитонное.

9.113. 1. $u_1(x, t) = \frac{k^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{k}{2}(x + py - \omega t + \delta), \quad \omega = k^2 + \sigma p^2,$

$$u_2(x, t) = \frac{l + k_1^2 \sqrt{m} ch \frac{\eta_2}{2} + k_2^2 \sqrt{m} ch \frac{\eta_1}{2}}{(\sqrt{m} ch \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + ch \frac{\eta_1 - \eta_2}{2})^2},$$

$$m = \frac{3(k_1 - k_2)^2 - \sigma(p_1 - p_2)^2}{3(k_1 + k_2)^2 - \sigma(p_1 - p_2)^2},$$

$$l = \frac{3(k_1^2 - k_2^2)^2 - \sigma(k_1^2 + k_2^2)(p_1 - p_2)^2}{3(k_1 + k_2)^2 - \sigma(p_1 - p_2)^2},$$

$$\eta_j = k_j(x + p_j y - \omega_j t + \delta_j), \quad \omega_j = k_j^2 + \sigma p_j^2, \quad j = 1, 2.$$

2. $u(x, y, t) = -\frac{2}{[x + py - (k^2 + \sigma p^2)t]^2}.$

Указание. В результате замены $u = v_x$, интегрирования по x и подстановки $v = G/F$ получается уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{F^2}(D_x D_t + D_x^4 + \sigma D_y^2)G \cdot F - \frac{G}{F^3}(D_x D_t + D_x^4 + \sigma D_y^2)F \cdot F + \\ & + \frac{G}{F^4}(D_x G \cdot F - \frac{G}{F} D_x^2 F \cdot F) (D_x G \cdot F - D_x^2 F \cdot F) = 0. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю, если $G = 2F_x$, т.е. $u = 2(\ln F)_{xx}$.

9.114.

$$1) u(x, t) = \frac{2k^2}{ch^2(kx + \frac{kt}{4k^2 - 1} + \delta)}; \quad 2) u(x, t) = \frac{2k^2}{ch^2(kx - 16k^5 t + \delta)}.$$

Указание. 1. Уравнение записать в виде

$$u_t - u_{xxt} + 3 \left(u \int_x^\infty u_t d\xi \right)_x + u_x = 0.$$

2. Уравнению придать форму

$$u_t + 15(u^3)_x + 15(uu_x)_x + u_{xxxxx} = 0$$

и применить формулы (9.107), (9.109) и формулу

$$\frac{\partial^5}{\partial x^5} \frac{F_x}{F} = \frac{D_x^6 F \cdot F}{2F^2} - \frac{15}{2} \frac{(D_x^2 F \cdot F)(D_x^4 F \cdot F)}{F^4} + 15 \frac{(D_x^2 F \cdot F)^3}{F^6},$$

способ получения которой дан в указании к задаче 9.92.

9.115.

$$e^{-br_n} - 1 = \frac{m}{ab} \frac{\omega^2}{ch^2(kx \pm \omega t + \delta)}, \quad \omega = \sqrt{\frac{ab}{m}} sh k.$$

При $b > 0$ — волна сжатия, при $b < 0$ — волна разрежения; $v = \omega l/k$, $h = 2l/k$. С ростом амплитуды скорость волны увеличивается, ширина уменьшается.

Указание. Конструкция уравнения (9.130) подсказывает необходимую замену $u_n = (\ln F_n)_{\tau\tau}$, применение которой совместно с (9.96), (9.116) приводит к билинейному уравнению

$$D_\tau^2 F_n \cdot F_n = 4sh^2 \left(\frac{1}{2} D_n \right) F_n \cdot F_n.$$

Согласно теории возмущений,

$$F_n = 1 + \varepsilon f_{n1} + \varepsilon^2 f_{n2} + \dots;$$

односолитонное решение получается при $f_{n1} = e^{\alpha x + \beta \tau}$.

9.116. $u(x, t) = \frac{a}{b} \ln |Ax + B| + C, \quad u(x, t) = A^2 bt + Ax + C,$

$u(x, t) = -\frac{a^2 A^2 t}{b} + \frac{a}{b} \ln |\sin(Ax + B)| + C, \quad u(x, t) = -\frac{a^2 A^2 t}{b} + \frac{a}{b} \ln |\operatorname{ch}(Ax + B)| + C,$

A, B, C — п.п. **9.117.** $u(x, t) = pt + \frac{a}{b} \ln(A + Be^{-\frac{a}{b}x}), \quad A, B$ — п.п.

9.118. $u(x, t) = Ae^{ct} - \frac{p}{c}t - \frac{c}{4b}(x + B)^2 + \frac{a}{2b} - \frac{p}{c^2}, \quad A, B$ — п.п.

9.119. $u(x, t) = (\frac{a^2 A^2}{b} + c)t + \frac{a}{b} \ln \sin(Ax + B) + C,$

$u(x, t) = (\frac{a^2 A^2}{b} + c)t + \frac{a}{b} \ln \operatorname{sh}(Ax + B) + C,$

$u(x, t) = (\frac{a^2 A^2}{b} + c)t + \frac{a}{b} \ln \operatorname{sh}(Ax + B) + C,$

$u(x, t) = ct + \frac{a}{b} \ln(Ax + B) + C, \quad A, B, C$ — п.п.

9.120. $u(x, t) = ae^{6a} + Ax^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3, \quad A, C_1, C_2, C_3$ — п.п.

9.121. $u(x, t) = \frac{Aa}{\sigma}t + \frac{1}{\sigma}(x + B) \ln A(x + B) - \frac{x}{\sigma} + C, \quad A, B, C$ — п.п.

9.122. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A\sigma(x+B)^2}{2(2b-\sigma A)(C-At)}, \quad A, B, C$ — п.п.

9.123. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{x^3 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3}{C - 6at}, \quad C, C_1, C_2, C_3$ — п.п.

9.124. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\sin(px+a)+B}{C-B\sigma bt}, \quad p = \sqrt{\frac{b\sigma}{a}}, \frac{b\sigma}{a} > 0;$

$u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\operatorname{sh}(px+a)+B}{C-B\sigma bt}, \quad p = \sqrt{-\frac{b\sigma}{a}}, \frac{-b\sigma}{a} > 0; \quad B, C$ — п.п.

9.125. $u(x, t) = A + at + \ln(B_1 \cos kx + B_2 \sin kx), \quad a = k^2 > 0;$

$u(x, t) = A + at + \ln(B_1 \operatorname{ch} rkx + B_2 \operatorname{sh} kx), \quad -a = k^2 > 0, \quad A, B_1, B_2$ — п.п.

9.126. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{C_1 + C_2 x^{1-n} - b\sigma x^{2-n}}{a(2-n)(1+Ae-b\sigma t)}, \quad A, C_1, C_2$ — п.п.

9.127. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{x^{-n}}{(b\sigma - an)(A - \sigma t)}, \quad A$ — п.п.

- 9.128. $u(x, t) = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{A^2 a^2 t^2}{2b} + Bt + C + \frac{a}{b} \ln \operatorname{sh}(Ax + D);$
 $u(x, t) = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{A^2 a^2 t^2}{2b} + Bt + C + \frac{a}{b} \ln \operatorname{ch}(Ax + D);$
 $u(x, t) = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{A^2 a^2 t^2}{2b} + Bt + C + \frac{a}{b} \ln \sin(Ax + D);$
 $u(x, t) = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + At + B + \frac{a}{b} \ln(Cx + D);$
 $u(x, t) = \frac{ct^{n+1}}{(n+1)(n+2)} + \frac{ba^2 t^2}{2} + Bt + Ax + C, A, B, C, D - \text{п.п.}$
- 9.129. $u(x, t) = A \operatorname{ch} \sqrt{ct} + C \operatorname{sh} \sqrt{ct} - \frac{k}{\omega^2 + c} (t \sin \omega t + \frac{2\omega}{\omega^2 + c} \cos \omega t) - \frac{\lambda}{c}, c > 0;$
 $u(x, t) = A \cos \sqrt{-ct} + C \sin \sqrt{-ct} - \frac{k}{\omega^2 + c} (t \sin \omega t + \frac{2\omega}{\omega^2 + c} \cos \omega t) - \frac{\lambda}{c},$
 $c < 0, -c \neq \omega^2; u(x, t) = A \cos \omega t + C \sin \omega t +$
 $+ \frac{kt}{4\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) - \frac{\lambda}{c}, -c = \omega^2, A, B, C, \lambda - \text{п.п.}$
- 9.130. $u(x, t) = \frac{1}{2} a A^2 t^2 + Bt + Ax + C, A, B, C - \text{п.п.}$
- 9.131. $u(x, t) = \varphi(t) - \frac{bx^2}{6a} + Bx - \frac{3(c+aB^2)}{2b},$
 $\varphi(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{2b}{3}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{2b}{3}} t, b > 0;$
 $\varphi(t) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\frac{2b}{3}} t + C_2 \sin \sqrt{-\frac{2b}{3}} t, -b > 0, B, C_1, C_2 - \text{п.п.}$
- $u(x, t) = \frac{At^2}{2} + Bt + \left[\frac{A(k+1)}{a(1-n)} \right]^{\frac{1}{k+1}} \frac{kx}{k-n+1} + C, A, B, C - \text{п.п.}$
- 9.132. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{B^2 \operatorname{sh}^2(Ax+D)}{aA^2 \operatorname{ch}^2(Bt+C)}; u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{B^2 \cos^2(Ax+D)}{aA^2 \operatorname{ch}^2(Bt+C)};$
 $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{B^2 \operatorname{ch}^2(Ax+D)}{aA^2 \operatorname{sh}^2(Bt+C)}; u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{B^2 (x+D)^2}{aA^2 \operatorname{ch}^2(Bt+C)};$
 $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{B^2 \operatorname{ch}^2(Ax+D)}{aA^2 \cos^2(Bt+C)}; u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\operatorname{ch}^2(Ax+D)}{aA^2 (t+C)^2}, A, B, C, D - \text{п.п.}$
- 9.133. $u(x, t) = At + B + \frac{1}{\sigma} \ln(Cx + D); u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{x^2 + Bx + C}{a(t+A)};$
 $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{Dx^2 + Bx + C}{a \cos^2(Dt+A)}; u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{Dx^2 + Bx + C}{a \operatorname{sh}^2(Dt+A)};$
 $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{Dx^2 + Bx + C}{a \operatorname{ch}^2(Dt+A)}, A, B, C, D - \text{п.п.}$
- 9.134. $u(x, t) = At^2 + Dt + f(x),$ где $f(x)$ задана параметрически:
 $x(\xi) = \frac{1}{2A} (C - \frac{1}{2A} \cos \xi),$
 $f(\xi) = \frac{1}{2a} (\sin \xi - \xi \cos \xi) + D.$
- Указание. Второе слагаемое $f(x)$ решения $u(x, t) = \varphi(t) + f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $f'' \sin f' = \lambda$, порядок которого можно понизить, полагая $f'(x) = \xi(f)$. Из соотношений $\sin \xi d\xi = \lambda dx$ и $df = \xi dx$ можно выразить x и f через ξ .
- 9.135. $u(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 (C_2 xy - C_1 x^2 - C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6)}{(aC_1 + bC_3) \operatorname{ch}^2(At+B)};$
 $u(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A(C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6)}{(aC_1 + bC_3) \cos^2(At+B)};$
 $u(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A(C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6)}{(aC_1 + bC_3) \operatorname{sh}^2(At+B)};$
 $u(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A(C_1 x^2 + C_2 xy + C_3 y^2 + C_4 x + C_5 y + C_6)}{(aC_1 + bC_3)(t+B)^2}, A, D, C_1, \dots, C_6 - \text{п.п.}$
- 9.136. $u(x, y) = A \left[\frac{x}{2} \ln(x^2 + 1) + \operatorname{arctg} x - x \right] - \frac{b\sqrt{\pi}}{2\alpha a A} \left[y \operatorname{erf}(\alpha y) - \frac{1 - e^{-\alpha^2 y^2}}{\alpha \sqrt{\pi}} \right] +$
 $+ C_1 x + C_2 y + C_3, A, C_1, C_2, C_3 - \text{п.п.}$

$$\mathbf{9.137.} \quad u(x, y) = A \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{A\sigma^2} e^{\sigma y} + Bx + Cy + D, \quad A, B, C, D - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.138.} \quad u(x, y) = \frac{C_1 y^{r+2}}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{C_1} \int_0^x (x - \xi) \frac{g(\xi)}{f(\xi)} d\xi + C_3 x + C_4, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.139.} \quad u(x, y) = Ae^{\sigma y} + By - \frac{1}{A\sigma^2} \int_0^x (x - \xi) \frac{g(\xi)}{f(\xi)} d\xi + Cx + D, \quad A, B, C, D - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.140.} \quad u(x, y) = C_1 \int_0^x (x - \xi) \frac{f_1(\xi)}{g_1(\xi)} d\xi - \frac{1}{C_1} \int_0^y (y - \eta) \frac{g_2(\eta)}{f_2(\eta)} d\eta + C_2 x + C_3 y + C_4, \\ C_1, C_2, C_3, C_4 - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.141.} \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 \operatorname{sh}^2(Cy + D)}{a C^2 \operatorname{ch}^2(Ax + B)}; \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 \cos^2(Cy + D)}{a C^2 \operatorname{ch}^2(Ax + B)}; \\ u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 \operatorname{ch}^2(Cy + D)}{a C^2 \operatorname{sh}^2(Ax + B)}; \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 (y + D)^2}{a \operatorname{ch}^2(Ax + B)}; \\ u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 \operatorname{ch}^2(Cy + D)}{a C^2 \cos^2(Ax + B)}; \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\operatorname{ch}^2(Cy + D)}{a C^2 (x + B)^2}, \quad A, B, C, D - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.142.} \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 y^2 + C_1 y + C_2}{a \operatorname{ch}^2(Ax + B)}; \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A^2 y^2 + C_1 y + C_2}{a \operatorname{sh}^2(Ax + B)}; \\ u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{-A^2 y^2 + C_1 y + C_2}{a \cos^2(Ax + B)}; \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{-A^2 y^2 + C_1 y + C_2}{a (x + B)},$$

$$A, B, C_1, C_2 - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.143.} \quad u(x, t) = \frac{(x+C)^2}{A-18at}, \quad A, C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.144.} \quad 1) u(x, t) = \frac{\lambda x^{-n+2}}{(n-1)(-n+2)}, \text{ если } n \neq 1; 2) u(x, t) = \frac{x \ln x - x + A}{B - at}, \text{ если } n = 1,$$

$$u(x, t) = \frac{\ln|x| + Ax + B}{C + at}, \text{ если } n = 2; \quad 2) u(x, t) = \frac{e^{-\alpha x} + Ax + B}{C - \alpha^2 at}, \quad A, B, C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.145.} \quad \text{Если } m \neq 1, \text{ то } u(x, t) = e^{bt} (Ax^{1-m} + B)^{\frac{1}{n+1}}; \text{ если } m = 1, \text{ то } u(x, t) =$$

$$= e^{bt} (A \ln|x| + B)^{\frac{1}{n+1}}, \quad A, B - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.146.} \quad u(x, t) = \frac{2At + a}{(x+B)^2}, \quad u(x, t) = \frac{2aA^2 t + B}{(x+B)^2},$$

$$u(x, t) = \frac{2aA^2 t + B}{\operatorname{sh}^2(Ax + C)}, \quad u(x, t) = \frac{B - 2aA^2 t}{\operatorname{ch}^2(Ax + C)}, \quad A, B, C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.147.} \quad u(x, t) = \frac{\ln|x| + Ax + B}{C + at}, \text{ если } n=1, \quad u(x, t) = \frac{\ln|x| + Ax + B}{C + at}, \text{ если } n=2,$$

$$u(x, t) = \frac{Ax^{-n+2} + Ax + B}{C + (n+1)(n-2)t}, \text{ если } n \neq 1; 2, \quad A, B, C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.148.} \quad u(x, t) = \left[\frac{m(x-A)^2}{2a(n+2)(B-t)} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad A, B - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.149.} \quad u(x, t) = \left[\frac{m^2 x^{-n}}{n(n+m)(C+x)} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.155.} \quad u(x, t) = \varphi(t + C), \text{ где } \varphi(t) \text{ задана неявно} \\ \frac{1}{a\varphi} + \frac{2b}{a^2} \ln \left| \frac{2b\varphi - a}{\varphi} \right| = t + C_1, \quad C, C_1 - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.156.} \quad u(x, t) = \left[\frac{A + \frac{m(2m+3)}{m+1} x^{\frac{m+1}{2m+3}}}{x^{\frac{m}{2m+3}} (B - 2a(m+2)t)} \right]^{\frac{1}{m}}, \quad A, B - \text{п.п.}$$

Решение. Подстановка $u(x, t) = \varphi(t)f(x)$ в уравнение приводит к тождеству

$$\frac{\varphi'}{\varphi^{m+1}} = \frac{a}{f} \frac{d}{dx} (x^m f^m f') = \lambda,$$

из которого следует $\varphi(t) = (C - m\lambda t)^{-\frac{1}{m}}$, где C и λ — произвольные постоянные, и уравнение

$$\frac{d}{dx} (x^m f^m f') = \lambda,$$

В результате замены $\xi = x^{1-n}$, $g = f^{m+1}$ получается уравнение Эмдена-Фаулера $g'' + A\xi^p g^q = 0$, где $A = -\frac{\lambda(m+1)}{A(n-1)^2}$, $p = \frac{n}{1-n}$, $q = \frac{1}{m+1}$. В новых

переменных $\xi = \zeta^\alpha$, $g = h(\zeta)\zeta^\beta$ уравнение приобретает форму

$$\zeta^{\beta-2\alpha+2}h'' + (2\beta+1-\alpha)\zeta^{1-2\alpha+\beta}h' + \beta(\beta-\alpha)\zeta^{\beta-2\alpha}h + A\alpha^2\zeta^{p\alpha+q\beta}h^q = 0.$$

Если $2\beta - \alpha + 1 = 0$, $\beta(\beta - \alpha) = 0$, откуда $\alpha = \beta = 1$, то снова возникает уравнение Эмдена-Фаулера $h'' + A\zeta^{-p-q-3}h^q = 0$. В данном случае $p + q + 3 = \frac{n}{1-n} + \frac{1}{m+1} + 3 = 0$, так что $h(\zeta)$ — решение уравнения $h'' + Ah\frac{1}{m+1} = 0$, которое заменами $h'(\zeta) = v(h)$, $v^2(h) = w(h)$ преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными $w' = -2Ah\frac{1}{m+1}$. Отсюда

$$w = \frac{2\lambda(m+1)^2}{a(m+2)((n-1)x}h^{\frac{m+2}{m+1}} + C_2$$

и при $C_2 = 0$

$$v(h) = \pm \frac{m+1}{n-1} \sqrt{\frac{2\lambda}{a(m+2)}} h^{\frac{m+2}{m+1}}.$$

Так как $v(h) = h'(\zeta)$, то

$$h = (C_1 \pm \frac{m}{2(n-1)} \sqrt{\frac{2\lambda}{a(m+2)}} \zeta)^{\frac{2(m+1)}{m}}.$$

В старых переменных

$$f(x) = x^{\frac{1-n}{m+1}} \left[(C_2 + \frac{m}{2(n-1)} \sqrt{\frac{2\lambda}{a(m+2)}} x^{n-1})^2 \right]^{\frac{1}{m}}.$$

где $c_2 = \pm C_1$. Итак,

$$u(x, t) = \frac{C_1 + \frac{m(2m+3)}{m+1} \sqrt{\frac{\lambda}{2a(m+2)}} x^{\frac{m+1}{2m+3}} t^{\frac{2}{m}}}{x^{\frac{1}{2m+3}} (C - \lambda m t)^{\frac{1}{m}}}.$$

Чтобы получить ответ, нужно разделить числитель и знаменатель на $\sqrt{\frac{\lambda}{2a(m+2)}}$ и переобозначить постоянные.

9.157. $u(x, t) = B(\omega t + A)^{-\frac{1}{m}} x^{\frac{2-n}{m}}$, $A = (\frac{\omega m}{a(n-2)(2+m-n-nm)})^{\frac{1}{m}}$,

если $n = \frac{3m+4}{m+1}$, то $u(x, t) = x^{\frac{1}{m+1}} [\frac{(B + \frac{m+2}{x})^2}{C - 2am(m+1)}]^{\frac{1}{m}}$, B, C — п.п. Указание. См решение предыдущей задачи.

9.158. $u(x, t) = Ce^{i(Ax + (a|C|^{2m} - A^2)t + B)}$,

Im $a = 0$, $u(x, t) = \pm [-\frac{(n+1)A^2}{a \operatorname{ch}^2(Anx+C)}]^{\frac{1}{2n}} e^{i(A^2t+B)}$, $\frac{n+1}{a} > 0$,

$u(x, t) = \pm [-\frac{(n+1)A^2}{a \operatorname{sh}^2(Anx+C)}]^{\frac{1}{2n}} e^{i(A^2t+B)}$, $\frac{n+1}{a} < 0$,

$u(x, t) = \pm [-\frac{(n+1)A^2}{a \sin^2(Anx+C)}]^{\frac{1}{2n}} e^{i(A^2t+B)}$, $\frac{n+1}{a} < 0$, A, B, C п.п.

9.159. $u(x, t) = Ce^{i(Ax + (aC^2 + bC + c - A^2)t + B)}$, A, B, C — п.п.

9.160. $u(x, t) = Ae^{i(Bx + (kA^2 - B^2)t + C)}$, $u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{k}} \frac{Ae^{i(A^2t+B)}}{\operatorname{ch}(Ax+C)}$, $k > 0$,

$u(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{k}} \frac{Ae^{i(A^2t+B)}}{\operatorname{sh}(Ax+C)}$, $k < 0$, $u(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{k}} \frac{Ae^{i(A^2t+B)}}{\sin(Ax+C)}$, $k < 0$,

A, B, C — п.п. **9.161.** $u(x, t) = Ce^{i(Ax + (aC^2 + b - A^2)t + B)}$,

$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{Ae^{i(b+A^2)t+B}}{\operatorname{ch}(Ax+C)}$, $a > 0$, $u(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{a}} \frac{Ae^{i(b+A^2)t+B}}{\operatorname{sh}(Ax+C)}$, $a < 0$,

$u(x, t) = \pm \sqrt{-\frac{2}{a}} \frac{Ae^{i(b-A^2)t+B}}{\sin(Ax+C)}$, $a < 0$, A, B, C — п.п.

$$\mathbf{9.163.} \quad u(x, t) = \frac{(3\beta^2 - b)e^{-\beta t}}{2a \operatorname{ch}^2(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - b}x + C)}, \quad u(x, t) = -\frac{(3\beta^2 - b)e^{-\beta t}}{2a \operatorname{sh}^2(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - b}x + C)},$$

$$u(x, t) = \frac{(3\beta^2 - b)e^{-\beta t}}{2a \cos^2(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - b}x + C)}, \quad u(x, t) = \frac{6e^{-\beta t}}{a(x+C)^2}, \quad \beta = b^2, \quad C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.164.} \quad u(x, t) = -\frac{(3\beta^2 - b)e^{-\beta x}}{2a \operatorname{ch}^2(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - b}t + C)}, \quad u(x, t) = \frac{(3\beta^2 - b)e^{-\beta x}}{2a \operatorname{sh}^2(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - b}t + C)},$$

$$u(x, t) = -\frac{(3\beta^2 - b)e^{-\beta x}}{2a \cos^2(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - b}t + C)}, \quad u(x, t) = \frac{6e^{-\beta x}}{a(t+C)^2}, \quad \beta = b^2, \quad C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.165.} \quad u(x, t) = \pm \exp\left(\frac{a}{4}[(x+A)^2 + (y+B)^2] + 1\right), \quad A, B - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.166.} \quad u(x, t) = \pm \exp\left[\frac{b}{4}[(y+A)^2 - \frac{ax}{b} + \frac{a^2}{b^3} + \frac{1}{2}]\right], \quad A - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.167.} \quad u(x, t) = \pm \exp\left(\alpha x^2 + \frac{b}{4}(y+A)^2 + \frac{2\alpha}{b}(k+1) - \frac{q}{b} + \frac{1}{2}\right), \quad \alpha = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 16p}}{8},$$

$$A - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.168.} \quad u(x, t) = \pm \exp\left(-\frac{ax+by}{\frac{m}{m^3} - \frac{c}{m}}\right).$$

$$\mathbf{9.169.} \quad u(x, t) = \pm \exp\left(-\frac{px+qy}{\frac{s}{s^3}} + \frac{ap^2+bq^2}{\frac{s^2}{s^3}} - \frac{kp+mq}{\frac{s^2}{s^3}} - \frac{r}{s}\right).$$

$$\mathbf{9.170.} \quad u(x, t) = \frac{3}{C-t)^2} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) + C_1 x + C_2 y + aC_1^2 + bC_2^2 \right], \quad C, C_1, C_2 - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.171.} \quad u(x, t) = \frac{(\sqrt{|b|x \pm \sqrt{ay}})^2 \operatorname{sign} a}{12ab(A-t)}, \quad A - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.172.} \quad u(x, y) = f_j(x)g_k(y),$$

$$j, k = 1, 2, \text{ где } f_1(x) = (A_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{a}}x + B_1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{a}}x)^{\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{\lambda}{a} > 0,$$

$$f_2(x) = (A_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{-\lambda}{a}}x + B_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{-\lambda}{a}}x)^{\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{\lambda}{a} < 0,$$

$$g_1(y) = (C_1 \cos \sqrt{\frac{\lambda}{b}}y + D_1 \sin \sqrt{\frac{\lambda}{b}}y)^{\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{\lambda}{b} > 0,$$

$$g_2(y) = (C_2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{b}}y + D_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\lambda}{b}}y)^{\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{\lambda}{b} < 0,$$

$$u(x, y) = [(Ax + B(Cy + D))]^{\frac{1}{m+1}}, \quad A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C, C_1, C_2, D, D_1, D_2 - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.173.} \quad u(x, t) = \frac{x+A}{B-bt}, \quad A, B - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.174.} \quad \text{Если } a \neq 1, \text{ то } u(x, t) = \frac{(1-a)x+A}{Bt^a+bt},$$

$$\text{если } a=1, \text{ то } u(x, t) = \frac{(x+A)}{t(Bt^a+b \ln t)}, \quad A, B - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.175.} \quad u(x, t) = \frac{cx+ Ae^{-\frac{bx}{a}}+B}{Ce^{-ct}+B},$$

$$A, B, C - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.176.} \quad u(x, t) = \frac{ax+b \ln(t+C)+B}{a^2(t+C)}; \quad B, C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.177.} \quad u(x, t) = -\frac{r}{2c} + p \operatorname{tg}(pct + C) + \frac{Be^{-\frac{\alpha^2 apt}{2c} + \alpha x}}{\cos^k(pct + C)},$$

$$u(x, t) = -\frac{r}{2c} + q \operatorname{th}(qct + C) + \frac{Be^{-\frac{\alpha^2 aqt}{2c} + \alpha x}}{\operatorname{ch}^k(qct + C)},$$

$$u(x, t) = -\frac{r}{2c} + q \operatorname{cth}(qct + C) + \frac{Be^{-\frac{\alpha^2 aqt}{2c} + \alpha x}}{\operatorname{sh}^k(qct + C)},$$

$$p^2 = \frac{r^2 - 4cs}{4c^2}, \quad q^2 = \frac{r^2 - 4cs}{4c^2}, \quad \alpha^2 = -\frac{c}{a+b}, \quad k = \frac{a+2b}{a+b},$$

$$\text{если } r^2 = 4sc, \text{ то } u(x, t) = -\frac{r}{2c} - \frac{1}{C-ct} + \frac{Be^{\frac{at}{2(a+b)} + \alpha x}}{(C-ct)^k}; \quad A, B, C - \text{п.п.}$$

$$\text{Указание. Форма решения } u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t)e^{\alpha x}.$$

$$\mathbf{9.178.} \quad \text{Если } \alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ то } u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \cos \alpha x,$$

$$u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \sin \alpha x, \quad u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) e^{\pm \alpha x},$$

$$\text{если } \alpha = \sqrt{-\frac{b}{a}}, \text{ то } u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \operatorname{ch} \alpha x, \quad u(x, t) = \varphi(t) + \psi(t) \operatorname{sh} \alpha x, \text{ где}$$

в каждом случае возможны следующие пары функций:

$$1) \varphi(t) = -\frac{c}{2b} - p \operatorname{th}(pbt + B), \quad \psi(t) = \frac{Ae^{\frac{ct}{2}}}{\operatorname{ch}(pbt+B)},$$

$$2) \varphi(t) = -\frac{c}{2b} - p \operatorname{cth}(pbt + B), \quad \psi(t) = \frac{Ae^{\frac{ct}{2}}}{\operatorname{sh}(pbt+B)},$$

$$3) \varphi(t) = -\frac{c}{2b} - q \operatorname{tg}(qbt + B), \quad \psi(t) = \frac{Ae^{\frac{ct}{2}}}{\cos(qbt+B)},$$

$$4) \varphi(t) = -\frac{c}{2b} - \frac{1}{bt+B}, \quad \psi(t) = \frac{Ae^{\frac{ct}{2}}}{t+B}, \quad p^2 = \frac{c^2-4sb}{4b^2}, \quad q^2 = -\frac{c^2-4sb}{4b^2},$$

A, B — п.п. **9.179.** $u(x, y) = Mx + \psi(x)e^{\pm\sqrt{-b}y}$, где

$$\psi(x) = \sqrt{x} [C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)], \quad -ab = \lambda^2 > 0,$$

$$2) \psi(x) = \sqrt{x} [C_1 I_\nu(\lambda x) + C_2 K_\nu(\lambda x)], \quad ab = \lambda^2 > 0,$$

M — корень уравнения $M^2bc + Mk + r = 0$, C_1, C_2 — п.п.

9.180. 1) $u(x, y) = M + (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{\pm\sqrt{-b}y}$, $-\alpha^2 = \beta^2 > 0$,

$$2) u(x, y) = M + (Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}) e^{\pm\sqrt{-b}y}, \quad \alpha^2 > 0,$$

$$3) u(x, y) = M + (Ax + B) e^{\pm\sqrt{-b}y}, \quad \alpha = 0,$$

где M — корень уравнения $M^2bc + Mk + r = 0$, $\alpha^2 = 2Mbc + ab + k$,

A, B — п.п. **9.182.** $u(x, y, t) = \varphi(t) + \psi(t)f(x, y)$ где

$$1) \varphi(t) = -\frac{k}{2c} - p \operatorname{th}(pct + B), \quad \psi(t) = \frac{Ae^{(\frac{k}{2} - \frac{ac}{b})t}}{\operatorname{sh}(pct+B)},$$

$$2) \varphi(t) = -\frac{k}{2c} - p \operatorname{cth}(pct + B), \quad \psi(t) = \frac{Ae^{(\frac{k}{2} - \frac{ac}{b})t}}{\operatorname{ch}(pct+B)},$$

$$3) \varphi(t) = -\frac{k}{2c} + q \operatorname{tg}(qct + B), \quad \psi(t) = \frac{Ae^{(\frac{k}{2} - \frac{ac}{b})t}}{\cos(qct+B)},$$

$$4) \varphi(t) = -\frac{k}{2c} - \frac{1}{ct+B}, \quad \psi(t) = \frac{Ae^{(\frac{k}{2} - \frac{ac}{b})t}}{t+B},$$

$p^2 = \frac{k^2-4cm}{4c^2}$, $q^2 = -\frac{k^2-4cm}{4c^2}$, $f(x, y)$ — решение уравнения $\Delta f + \lambda f = 0$,

$\lambda = \frac{c}{b}$; некоторые решения могут быть получены методом разделения переменных в форме $f(x, y) = X(x)Y(y)$:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0 \implies \begin{matrix} X'' + \alpha X = 0, \\ Y'' + \beta Y = 0, \end{matrix} \quad , \quad \alpha + \beta = \lambda.$$

Ниже приведены некоторые из решений вида

$u = X_i(x)$, $u = Y_j(y)$, $u = X_i(x)Y_j(y)$, $i, j = 0, 1, 2$, где $X_0 = Ax + B$, если $\alpha = 0$; $X_1 = A \cos \sqrt{\alpha}x + B \sin \sqrt{\alpha}x$, если $\alpha > 0$; $X_2 = A \operatorname{ch} \sqrt{-\alpha}x + B \operatorname{sh} \sqrt{-\alpha}x$, если $\alpha < 0$; $Y_0 = Cy + D$, если $\beta = 0$; $Y_1 = C \cos \sqrt{\beta}y + D \sin \sqrt{\beta}y$, если $\beta > 0$; $Y_2 = C \operatorname{ch} \sqrt{-\beta}y + D \operatorname{sh} \sqrt{-\beta}y$, если $\beta < 0$, A, B, C, D, λ — п.п. (15 решений).

- 9.183.** $u(x, y, t) = Ax + By + C - (b + a(\alpha^2 + \beta^2))t$,
 $u(x, y, t) = A - bt + Be^{a(\alpha^2 + \beta^2)(At - \frac{bt^2}{2} + \alpha x + \beta y)}$,
 $u(x, y, t) = \frac{C - b(Bt - 2at^2) + x^2}{B - 2at}$, $u(x, y, t) = \frac{C - b(Bt - 2at^2) + y^2}{B - 2at}$,
 $u(x, y, t) = C \operatorname{sh}(4Aat + 2B) + \frac{b}{4aA} \operatorname{sh}(4Aat + 2B) \ln |cth(2Aat + B)| +$
 $+ Ath(2Aat + B)x^2 + A cth(2Aat + B)y^2$,
 $u(x, y, t) = C \operatorname{sh}(4Aat + 2B) + \frac{b}{4aA} \operatorname{sh}(4Aat + 2B) \ln |cth(2Aat + B)| +$
 $+ A cth(2Aat + B)x^2 + A th(2Aat + B)y^2$,
 $u(x, y, t) = C \sin(4Aat + 2B) - \frac{b}{4aA} \sin(4Aat + 2B) \ln |tg(2Aat + B)| +$
 $+ A ctg(2Aat + B)x^2 - tg(2Aat + B)y^2$,
 $u(x, y, t) = C \sin(4Aat + 2B) - \frac{b}{4aA} \sin(4Aat + 2B) \ln |tg(2Aat + B)| -$
 $- Atg(2Aat + B)x^2 - A tg(2Aat + B)y^2$, A, B, C, α, β — п.п.
- 9.184.** $u(x, y, t) = Ax + By + (aA^2 + bB^2)t$; A, B — п.п.
- 9.185.** $u(x, y, t) = Actg\theta + B \sin \theta e^{\pm \mu x} \pm \frac{A \sin(\mu y + \mu_0)}{\sin \theta}$,
 $u(x, y, t) = Acth\theta + B \operatorname{sh} \theta e^{\pm \mu x} \pm \frac{A \sin(\mu y + \mu_0)}{\operatorname{sh} \theta}$,
 $u(x, y, t) = Actg\theta + B \sin \theta e^{\pm \mu y} \pm \frac{A \sin(\mu x + \mu_0)}{\sin \theta}$,
 $u(x, y, t) = Acth\theta + B \operatorname{sh} \theta e^{\pm \mu y} \pm \frac{A \sin(\mu x + \mu_0)}{\operatorname{sh} \theta}$,
 $u(x, y, t) = \frac{A}{\theta} + B\theta e^{\pm \mu x} \pm \frac{A \sin(\mu y + \mu_0)}{\theta}$,
 $u(x, y, t) = \frac{A}{\theta} + B\theta e^{\pm \mu y} \pm \frac{A \sin(\mu x + \mu_0)}{\theta}$,
 $u(x, y, t) = \frac{2A}{\sin 2\theta} + Actg\theta \operatorname{ch}(\mu x + \mu_0) \pm Atg\theta \sin(\mu y + \mu_1)$,
 $u(x, y, t) = \frac{2A}{\operatorname{sh} 2\theta} + Acth\theta \operatorname{ch}(\mu x + \mu_0) \pm A \sin(\mu y + \mu_1)$,
 $\theta = A\mu^2 at + C$; $A, B, C, \mu, \mu_0, \mu_1$ — п.п.

Ответ относится к решениям вида $u(x, y, t) = \varphi(t) + \psi(t)f(x) + \chi(t)g(y)$. В соответствующем тождестве разделение переменных происходит, если $f'' = \nu f$, $g'' = \nu g$, ν — любое вещественное число. Получается система уравнений

$$\begin{cases} \varphi' = a\nu(A^2 - \sigma B^2)\psi^2 - a\nu(C^2 + \sigma D^2)\xi^2, \\ \psi' = a\nu\varphi\psi, \\ \chi' = -a\nu\varphi\chi, \end{cases}$$

где $\sigma = \operatorname{sign} \nu$, A, B, C, D — произвольные постоянные.

- 9.186.** $\varphi(t) = \frac{-1}{A+4bt}$, $\psi(t) = \frac{B}{A+4bt}$, $\chi(t) = -\frac{a}{2b} \ln |A + 4bt| - \frac{B^2}{4(A+4bt)} + C$, A, B, C — п.п.
- 9.187.** $\varphi(t) = \frac{1}{A-4bt}$, $\psi(t) = \frac{2ct+B}{A-4bt}$, $\chi(t) = -\frac{a}{2b} \ln |A - 4bt| +$
 $+ \frac{1}{4} \left(\frac{cA}{2b} + B \right)^2 \frac{1}{A-4bt} - \frac{1}{4b} \left(s - \frac{c^2}{4b} \right) (A - 4bt) + C$, A, B, C — п.п.
- 9.188.** $\varphi(t) = -\frac{1}{A+\mu t}$, $\psi(t) = \frac{B}{A+\mu t}$, $\chi(t) = -\frac{B^2}{4(A+\mu t)} + \frac{c(A+\mu t)}{4(a+b)} + \frac{C}{(A+\mu t)^\nu}$,
 $\mu = 2(a + 2b)$, $\nu = \frac{2}{a+2b}$, A, B, C — п.п.
- 9.189.** $\varphi(t) = \frac{c}{Ae^{-ct} - 2a}$,
 $\psi = \frac{2bct+B}{Ae^{-ct} - 2a}$, $\chi(t) = \frac{bt(bct+B) - \frac{c}{a} - Ae^{-ct} - 2ast+C}{Ae^{-ct} - 2a}$, A, B, C — п.п.
- 9.190.** $\varphi(t) = \frac{1}{\mu(A-t)}$, $\psi = \frac{2ct+B}{\mu(A-t)}$, $\chi(t) = \frac{(2ca+B)^2}{4\mu(A-t)} + \left(\frac{c^2}{\mu} - \frac{\mu s}{4(a+b)} \right) (A-t) -$
 $- \frac{2c}{\mu} (2cA + B) + \frac{C}{(A-t)^\nu}$, $\mu = 2(a + 2b)$, $\nu = \frac{2}{a+2b}$, A, B, C — п.п.

9.191. $u(x, y, t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)y^2 + \chi(t)$, где φ, ψ, ξ равны:

- 1) $\varphi(t) = A \operatorname{th}(2Aat + B)$, $\psi(t) = A \operatorname{cth}(2Aat + B)$,
 $\chi(t) = (\frac{b}{4aA} \ln |\operatorname{cth}(2Aat + B)| + C) \operatorname{sh}(4Aat + 2B)$;
- 2) $\varphi(t) = A \operatorname{cth}(2Aat + B)$, $\psi(t) = A \operatorname{th}(2Aat + B)$,
 $\chi(t) = (\frac{b}{4aA} \ln \operatorname{cth}(2Aat + B) + C) \operatorname{sh}(4Aat + 2B)$;
- 3) $\varphi(t) = -A \operatorname{tg}(2Aat + B)$, $\psi(t) = A \operatorname{ctg}(2Aat + B)$,
 $\chi(t) = (C - \frac{b}{4aA} \ln |\operatorname{tg}(2Aat + B)| + C) \sin(4Aat + 2B)$;
- 4) $\varphi(t) = A \operatorname{ctg}(2Aat + B)$, $\psi(t) = -A \operatorname{tg}(2Aat + B)$,
 $\chi(t) = (C - \frac{b}{4aA} \ln |\operatorname{tg}(2Aat + B)| + C) \sin(4Aat + 2B)$;
- 5) $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = (2at + B)^{-1}$, $\chi(t) = (C - \frac{b}{2a} \ln |2Aat + B|)(2at + B)$;
- 6) $\varphi(t) = (2at + B)^{-1}$, $\psi = 0$, $\chi(t) = (C - \frac{b}{2a} \ln |2Aat + B|)(2at + B)$;
- 7) $u(x, y, t) = \frac{(x \pm y)^2}{A + 4at} + B(A + 4at)e^{-bt}$, A, B, C — п.п.

9.192. $u(x, y, t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)y^2 + xy \xi(t) + \chi(t)$,

$$\varphi(t) = \frac{\mu + C}{2(C - 6\mu t)}, \quad \psi(t) = \frac{1}{C - 6\mu t}, \quad \xi(t) = \frac{\mu - C}{2(C - 6\mu t)},$$

$$\chi(t) = \frac{b}{8\mu}(C - 6\mu t) + \frac{A}{\sqrt[3]{C - 6\mu t}}, \quad \mu = \pm \sqrt{C^2 + 1}, \quad A, C — \text{п.п.}$$

9.193. $u(x, t) = (\frac{1}{km} + Ce^{\beta t \pm \sqrt{\beta^2 - ak^2 m(m-1)^2}x})^{\frac{1}{1-m}}$; C, β — п.п.

9.194. $u(x, t) = (\frac{1}{A - mbt} + \frac{B}{(A - mbt)^\mu})^{\frac{1}{m}}$, $\mu = \frac{m+2}{m+1}$, A, B — п.п.

9.195. $u(x, t) = \left[Ce^{\frac{k(m-1)}{2(m-1)}(t \pm x)} \pm \frac{1}{k\sqrt{b}}(a + \frac{(1-m)}{2}be^{kt}) \right]^{\frac{2}{1-m}}$, C — п.п.,

сочетание знаков — любое. **9.196.** $u(x, t) = [Ae^{\beta t} + Be^{\mu t + \nu x}]^{\frac{2}{1-m}}$,

$$A = \pm \frac{m-1\sqrt{b}}{\sqrt{k^2 - a(m+1)^2}}, \quad \mu = \frac{m-1}{4k(m+1)}(k^2 + a(m-1)(m+3)),$$

$$\nu^2 = (\frac{m-1}{4k(m+1)})^2(k^2 - a(m+3)^2)(k^2 - a(m-1)^2), \quad B — \text{п.п.}$$

9.197. $u(x, y, t) = (A + Be^{aA(\alpha^2 + \beta^2)t + \alpha x + \beta y})^{-1}$, A, B, α, β — п.п.

9.198. $u(x, y, t) = e^{\int f(t) dt} \Psi(x, y)^{\frac{1}{n+1}}$, где Ψ — решение уравнения Лапласа:

$\Delta \Psi = 0$; $\Psi(x, y)$ — вещественная или мнимая часть любой аналитической функции: $\Psi = A(x^3 - 3xy^2)$, $\Psi = B(x^2y - y^3)$,

$\Psi = Ce^{\mu x} \cos \mu y$, $\Psi = De^{\mu x} \sin \mu y$ и т.п., A, B, C, D, μ — п.п.

9.199. $u(x, t) = (\frac{x^2 + Bx + B^2}{A - \omega t} - \frac{bm^2(A - \omega t)}{4a(1+m)} + \frac{C}{(A - \omega t)^\lambda})^{\frac{1}{m}}$,

$$\omega = \frac{2a(m+2)}{m}, \quad \lambda = \frac{m}{m+2}, \quad A, B, C — \text{п.п.}$$

9.200. 1) $u(x, t) = (\frac{\omega t + C}{\omega t + C)^2 + B} + \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{\sqrt{(\omega t + C)^2 + B}})^{-\frac{1}{3}}$,

$$2) u(x, t) = (\frac{\omega t + C}{\omega t + C)^2 + B} + \frac{\operatorname{sh} \alpha x}{\sqrt{B - \omega t + C)^2}})^{-\frac{1}{3}},$$

$$3) u(x, t) = [\frac{4A^2B^2(\omega t + C)^2}{16A^2B^2(\omega t + C)^2 + D} + 2\sqrt{\frac{AB}{16A^2B^2(\omega t + C)^2 + D}}(Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x})]^{-\frac{1}{3}},$$

$$\omega = \frac{3m}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{9b}{2a}, \quad A, B, C, D — \text{п.п.}$$

9.201. 1) $u(x, t) = (\frac{x^2}{A - kt} + \frac{Bx}{(A - kt)^\mu})^{\frac{1}{m}}$, $k = \frac{2a}{m}(mn + m + 2)$, $\mu = \frac{m(n+1)}{mn+m+2}$,

2) если $mn = -1$, то $u(x, t) = \left(\frac{x^2}{A-kt} + \frac{Bx}{(A-kt)^\mu}\right)^{\frac{1}{m}}$, $k = \frac{2a(m+1)}{m}$, $\mu = \frac{m-1}{m+1}$,

3) если $mn + m + 2 = 0$, то $u(x, t) = (Ax^2 + Ce^{-\frac{4aA}{m}t})^{\frac{1}{m}}$, A, B, C — п.п.

9.202. $u(x, y, t) = [C \operatorname{sh}(4Aat + 2B) + A \operatorname{th}(2Aat + B)x^2 + A \operatorname{cth}(2Aat + B)y^2]^{-1}$,

$u(x, y, t) = [C \operatorname{sh}(4Aat + 2B) + A \operatorname{cth}(2Aat + B)x^2 + A \operatorname{th}(2Aat + B)y^2]^{-1}$,

$u(x, y, t) = [C \sin(4Aat + 2B) + A \operatorname{ctg}(2Aat + B)x^2 - t \operatorname{g}(2Aat + B)y^2]^{-1}$,

$u(x, y, t) = [C \sin(4Aat + 2B) - A \operatorname{tg}(2Aat + B)x^2 + A \operatorname{ctg}(2Aat + B)y^2]^{-1}$,

$u(x, y, t) = (A + Be^{\alpha^2 aAt + \alpha x})^{-1}$, $u(x, y, t) = (A + Be^{\alpha^2 aAt + \alpha y})^{-1}$,

$u(x, y, t) = \frac{B-2at}{A+x^2}$, $u(x, y, t) = \frac{B-2at}{A+y^2}$, A, B, C, α — п.п. Имеется также ряд решений $u = \frac{1}{v}$, где v — решение задачи 9.183.

9.203. 1) $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A \sin \mu x + B \cos \mu x + 1}{c + bt}$, $\mu = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $\frac{b}{a} > 0$,

2) $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{A \operatorname{sh} \mu x + B \operatorname{ch} \mu x + 1}{c + bt}$, $\mu = \sqrt{-\frac{b}{a}}$, $-\frac{b}{a} > 0$, A, B, C — п.п.

9.204. $u(x, t) = A(Be^{\frac{A\omega}{a}(x-\omega t)} - 1)$, A, B, ω — п.п.

9.205. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \left[\frac{1}{A-t} \left(\frac{x^{2-n}}{a(2-n)} + \frac{Bx^{1-n}}{1-n} + C \right) \right]$, A, B, C — п.п.

9.206. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{(x+B)e^{\frac{\mu x}{A}} + C}{A + a\mu t}$, $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{C-x}{a\mu(A-t)}$, A, B, C — п.п.

9.207. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln(Ae^{-\frac{\sigma b^2(t \pm x)}{2a}} - \frac{at+c}{b} + \frac{a^2}{\sigma b^3 x})$, A — п.п.

9.208. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln(Ae^{\frac{\sigma b^2(x \pm t)}{2a}} - \frac{ax+c}{b} - \frac{a^2}{\sigma b^3})$, A — п.п.

9.209. 1) $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ae^{\pm \frac{k^2 c - \sigma b^2}{2kc}x + \frac{k^2 c + \sigma b^2}{2kc}t} + \frac{ab\sigma}{k^2 c - \sigma b^2} e^{kt} - \frac{c}{b})$,

2) если $\sigma b^2 = k^2 c$, то $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ce^{kt} + \frac{ka}{2b}(t \pm x)e^{kt} - \frac{b\sigma}{k^2})$, A, C — п.п.

9.210. 1) $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ae^{\pm \frac{k^2 c + \sigma b^2}{2kc}x + \frac{k^2 c - \sigma b^2}{2kc}t} - \frac{ab\sigma}{k^2 c - \sigma b^2} e^{kx} - \frac{c}{b})$,

2) если $\sigma b^2 + k^2 c = 0$, то $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ce^{kx} + \frac{ka}{2b}(x \pm t)e^{kt} + \frac{b\sigma}{k^2})$, A, C — п.п.

9.211. 1) $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ce^{\pm \frac{\sigma b^2 - 4ak^2}{4ka}x - \frac{\sigma b^2}{4ka}t} + \frac{ab\sigma}{4ak^2 - \sigma b^2} e^{-kt} - \frac{a}{b} e^{kt})$,

2) если $\sigma b^2 = 4ak^2$, то $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ae^{-kt} - \frac{kc}{b}(t \pm x)e^{-kt} - \frac{b\sigma}{4k^2} e^{kt})$, A, C — п.п.

9.212. 1) $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ce^{\pm \frac{\sigma b^2 + 4ak^2}{4ka}x + \frac{\sigma b^2}{4ka}t} - \frac{bc\sigma}{4ak^2 + \sigma b^2} e^{-kx} - \frac{a}{b} e^{kx})$,

2) если $\sigma b^2 + 4ak^2 = 0$, то $u(x, t) = -\frac{1}{\sigma} \ln(Ae^{-kx} - \frac{kc}{b}(x \pm t)e^{-kx} + \frac{b\sigma}{4k^2} e^{kx})$,

A, C — п.п. **9.213.** $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{x^2 + Ax + B}{C - 2at}$, A, B, C — п.п.

9.214. 1) $u(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{Ax^2 + By^2 + xy + D}{C - 2a(A+B)t}$, A, B, C — п.п.

2) $u(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{\frac{A+\mu}{2}x^2 + \frac{A-\mu}{2}y^2 + w(x, y)}{C - aAt}$, A, B, C, μ — п.п., w — решение уравнения $\Delta w = 0$ (см. ответ к задаче 9.196). **9.215.** $u = \frac{1}{\sigma} \ln v$, $v = \varphi(t)\Phi(x, y)$, где $\varphi(t) = [(a\lambda \int e^{\sigma F(t)} dt + C)e^{-\sigma F(t)}]^{-1}$, $F(t) = \int f(t) dt$,

$\Phi(x, y) = -\frac{\lambda+\mu}{2}x^2 - \frac{\lambda-\mu}{2}y^2 + \Psi(xy)$, Ψ — решение уравнения $\Delta \Psi = 0$ (см. ответ к задаче 9.196), C, λ, μ — п.п.

9.216. $u(x, t) = \exp\left[(Ae^{bt} - \frac{c}{b})x + \frac{aA^2}{b}e^{2bt} - \frac{2acA}{b}te^{bt} + be^{bt} - \frac{c^2}{b^3}\right]$, A, B — п.п.

9.217. $u(x, t) = \exp\left[(Ae^{bt} - \frac{c}{b}t - \frac{c}{b^2})x + \frac{aA^2}{b}e^{2bt} + Be^{bt} - \frac{b^2t^2 + 4bt + 4}{b}\right]$, A, B — п.п.

9.218. $u(x, t) = \exp\left[\frac{ce^{ct}}{A - be^{ct}} + \frac{Be^{(c-b)t + \alpha x}}{(A - be^{ct})^2}\right]$, A, B — п.п.

9.219. $u(x, t) = \exp\left[\frac{bx^2}{4a(Ce^{-bt} - 1)} - \frac{n+1}{2c}e^{bt} \ln|Ce^{-bt} - 1| + Be^{bt}\right]$, A, B — п.п.

9.220. $u(x, t) = \exp\left[\frac{bx^2}{2a(ce^{-bt} - 1)} - \frac{n+1}{2}e^{bt} \ln|Ae^{-bt} - 1| + Be^{bt}\right]$, A, B — п.п.

9.221. $u(x, t) = \exp\left[\frac{cx^2}{4a(Ae^{-ct} - 1)} - \frac{a+b}{2aA}e^{ct} \ln|Ae^{-ct} - 1| + \frac{p}{\alpha+c} + Be^{ct}\right]$, A, B — п.п.

9.222. $u(x, t) = \exp\left[Ae^{bt}x + \frac{aA^2}{b}e^{2bt} + Be^{-bt} - \frac{c}{b^2}(bt + 1)\right]$,

$u(x, t) = \exp\left[\frac{bx^2}{4a(Ae^{-bt} - 1)} + \frac{Bx}{Ae^{-bt} - 1} + \frac{AB^2}{ab} \frac{e^{bt}}{Ae^{-bt} - 1} - \frac{1}{2a}e^{bt} \ln|Ae^{-bt} - 1| - \right.$
 $\left. - \frac{c}{b^2}(bt + 1) + De^{bt}\right]$, A, B — п.п. **9.223.** $u(x, t) = \exp\left[\frac{ax^2}{(Ce^{-at} - 4)} - \frac{Bx}{(Ce^{-at} - 4)} + \right.$
 $\left. + \frac{Be^{at}}{aC(Ce^{-at} - 4)} - \frac{c}{2} \ln|Ce^{at} - 4| + De^{bt}\right]$,

$u(x, t) = \exp(Ce^{-at}x + \frac{c}{a}e^{2at} + Be^{at})$, $u(x, t) = \exp(Ce^{at} - \frac{ax^2}{4} + Bx + \frac{1}{2} - \frac{B^2}{a})$,

B, C — п.п. **9.224.** $u(x, y) = \frac{1}{b} \exp\left[\frac{a}{8}(x + y)^2 + C(x + y) + \frac{zc^2}{a} + \frac{1}{2}\right]$, C — п.п.

9.225. Если $a \neq -1$, то $u(x, t) = Ce^{-\frac{\omega}{a+1}(x-\omega t)}$, если $a = -1$, то

$u(x, t) = \exp(Ce^{-\omega(x-\omega t)})$, C, ω — п.п.

9.226. $\left[\frac{1-m}{2} \sqrt{\frac{2c}{(m+1)(aA^2+bB^2)}}(Ax + By) + C\right]^{\frac{2}{1-m}}$, A, B, C — п.п.

9.227. $u(x, t) = \frac{a}{b} \ln|Ae^{-\frac{\omega}{a}(x-\omega t)} + B|$, A, B, ω — п.п.

9.228. $u(x, t) = \left[\frac{m\omega}{a(m-1)}(x - \omega t) + A\right]^{\frac{1}{m}}$, A, ω — п.п.

9.229. $u(x, t) = \left[\frac{m\omega}{a}(x - \omega t) + C\right]^{\frac{1}{m}}$, C, ω — п.п.

9.230. $u(x, t) = \left[\frac{Am\omega}{a}(x - \omega t) + B\right]^{\frac{1}{m}}$, $A = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ab}{\omega^2}}}{2}$, B, ω — п.п.

9.231. $u(x, t) = f(x - t)$, где f задана неявно уравнением

$\pm f + \frac{1}{3a} \ln|f \mp \frac{1}{3a}| = x - t + A$, в котором нужно брать либо верхние, либо нижние знаки, A — п.п. **9.232.** $u(x, t) = \pm(C - 2(x - t))^{-\frac{1}{2}}$, C — п.п.

9.233. $u(x, t) = \frac{1}{\sigma} \ln(C + \frac{\sigma\omega}{a}(\omega t - x))$, C, ω — п.п.

9.234. $u(x, t) = \left[\frac{a(m+n-1)^2(Ax+By+C)}{2(m+n+1)(A^2+B^2)}\right]^{\frac{1}{1-m-n}}$, A, B, C — п.п.

9.235. $u(x, y) = f(Ax + By)$, где f задана неявно уравнением

$\frac{aA^2}{m+1}f^{m+1} + \frac{bB^2}{n+1}f^{n+1} = C(Ax+By) + D$, A, B, C, d — п.п.

9.236. $u(x, t) = \beta + Ae^{\mu x - \omega t}$, где β, ω, μ , — решение системы уравнений:

$$b\beta^2 + \beta c + d = 0, \omega\beta - d = 0, a\mu^2 + b = 0,$$

A — п.п. **9.237.** $u(x, t) = Ce^{\mu x - \omega t} - \frac{a}{p}$, где $\omega = \frac{aq}{p}\mu^2 - c\mu - p$; C, μ — п.п.

9.238. $u(x, t) = (1 + Ce^{\mu x - \omega t})^{-1}$, где ω, μ , — решение системы уравнений:

$\omega - 2b = 0, a\mu^2 - b = 0$; C — п.п. **9.239.** $u(x, t) = f(x - \omega t)$, где функция f задана неявно уравнением $1 + \frac{C}{f} = Ae^{\mu x}(\frac{C}{f} - \frac{C^2\omega}{a}(x - \omega t))$; A, C, ω , — п.п.

9.240. $u(x, t) = f(z)$, $z = \omega t - x$. Если $m = -1$, то $f(z) = \frac{\omega}{a}z + A$, если $m = 1$, то f определяется неявно уравнением $f - A \ln |f + A| = \frac{\omega z}{a} + B$, если $m = 2$, то f определяется неявно уравнением $f^2 = \frac{2\omega z}{a} + C$, либо уравнением $(f - A)^2 + 2A^2 \ln |f + A| = 4A^2 + \frac{2\omega z}{a} + C$; A, B, C, ω — п.п.

9.241. $u(x, t) = \frac{1}{Ce^{-\frac{x+t}{2}} - 3b}$, $u(x, t) = \frac{1}{Ce^{\frac{x-t}{2}} + 3b}$, C — п.п.

9.242. $u(x, t) = \left(\frac{2}{a}(\omega + c)(x - \omega t) + A \right)^{-\frac{1}{2}}$, $u(x, t) = f(x - \omega t)$, где f определяется неявно уравнением $\frac{A}{f} - \ln |1 + \frac{A}{f}| = \frac{A^2(\omega + c)z}{a} + B$, A, B, ω — п.п.

9.243. $u(x, t) = 2A \operatorname{tg}(A(\omega t - x) + B) - \omega$,
 $u(x, t) = 2A \operatorname{th}(A(\omega t - x) + B) - \omega$,
 $u(x, t) = \frac{2\omega}{1 + \omega t e^{-\omega(x + \omega t)}}$,
 $u(x, t) = \frac{2}{x + \omega t + A} + \omega$,
 $u(x, t) = A \frac{e^{A(x - \omega t)} - B}{e^{A(x - \omega t)} + B} - \omega$. A, B, ω — п.п.

9.244. $u(x, t) = f(x - \omega t)$, где f определяется неявно уравнением $\operatorname{erf}(af) = A + Be^{-\omega(x - \omega t)}$; A, B, ω — п.п. **9.245.** $u(x, t) = \beta + Ce^{\mu x - \omega t}$, где β, ω, μ — решение системы уравнений:

$$c\beta^2 + p\beta + q = 0, \mu^2(a + b) + c = 0, \omega = -\frac{\beta bc}{a + b} + \frac{q}{\beta},$$

C — п.п. **9.246.** $u(x, y) = \exp\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{Ax + By + C}{2} \sqrt{\frac{a}{A^2 + B^2}} + C\right)^2\right]$, A, B, C — п.п.

9.247. $u(x, y) = \frac{2}{\beta} \ln \operatorname{tg}(C + kz)$, $u(x, y) = \frac{2}{\beta} \ln \operatorname{th}(C + kz)$,
 $u(x, y) = \frac{2}{\beta} \ln \operatorname{cth}(C + kz)$, $k = \pm \sqrt{\frac{\beta a}{A^2 + B^2}}$, $z = Ax + By$,

A, B, C — п.п. **9.248.** $u(x, t) = (\beta + Ce^{\mu x - \omega t})^{\frac{2}{1 - m}}$, где β, ω, μ — решение системы уравнений:

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, m\beta^2\mu^2 + c(m - 1)^2 = 0, \omega = (m - 1)(a - \frac{c}{m\beta^2}),$$

C — п.п. **9.249.** $u(x, t) = (\beta + Ce^{\mu x - \omega t})^{\frac{2}{1 - m}}$, $\omega = \frac{(m - 1)(m + 3)a}{2(m + 1)}$,

$\mu^2 = \frac{(m - 1)^2 a}{2(m + 1)}$, $\beta^2 = -\frac{b}{a}$; C — п.п. **9.250.** $u(x, t) = f(z)$, $z = x - \omega t$.

Если $m = 2$, то f определяется уравнениями: $f^2(z) = \frac{2\omega}{a}z + A$,

$Af - B^2 \ln |f + B| = \frac{\omega z}{a} + C$; если $m = 3$, то f определяется уравнениями:
 $f^3 = \frac{3\omega z}{2a} + A$, $f - \sqrt{B} \operatorname{arctg} \frac{f}{\sqrt{B}} = \frac{\omega z}{2a} + C$, $f + \frac{\sqrt{B}}{2} \ln \left| \frac{f - \sqrt{B}}{f + \sqrt{B}} \right| = \frac{\omega z}{2aB}$, A, B, C, ω — п.п.

9.251. $u(x, t) = f(z)$, $z = x - \omega t$, где $f(z) = \pm b(Ce^{\frac{\omega b^2 z}{a}} - 1)^{-\frac{1}{2}}$, либо f определяется неявно: $\ln \frac{|f + A|}{\sqrt{f^2 + b^2}} + A \operatorname{arctg} \frac{f}{b} = B - \frac{\omega}{a}(A^2 + b^2)z$, A, B, C, ω — п.п.

9.252. $u(x, t) = -\frac{2}{\sigma} \ln \left| \sqrt{-\frac{b}{a}} + Ce^{p(\pm x - pt)} \right|$, $p = \sqrt{\frac{a\sigma}{2}}$, C — п.п.

9.253. $u(x, t) = f(z)$, $z = x - \omega t$, где $f(z) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\beta + Ce^{\frac{a\sigma z}{\omega}})$, где β и ω —

решение системы уравнений: $a\beta^2 + b\beta + c = 0$, $\omega^2 c + \sigma A^2 \beta^2 = 0$, C — п.п.

9.254. $u(x, t) = f(z)$, $z = x - \omega t$, где $f(z) = -\frac{1}{\sigma} \ln(\beta + Ce^{\pm \sqrt{-\frac{b}{a}} z} \operatorname{bigr})$, β и ω — решение системы уравнений: $b\beta^2 + c\beta + d = 0$, $\omega^2 \beta^2 - \sigma^2 d^2 = 0$, C — п.п.

9.255. $u(x, t) = \frac{a + Ce^{\frac{a-1}{2}(\pm \sqrt{2}x - (a+1)t)}}{1 + Ce^{\frac{a-1}{2}(\pm \sqrt{2}x - (a+1)t)}}$, знаки либо верхние, либо нижние, C — п.п.

9.256. $u(x, t) = \frac{\frac{a}{1 + Ce^{\frac{a}{2}(\pm \sqrt{2}x + (2-a)t)}}$, $u(x, t) = \frac{1}{1 + Ce^{\pm \frac{a}{\sqrt{2}} + (a - \frac{1}{2})t}}$, C — п.п.

9.257. $u(x, y, t) = \frac{1}{\sigma} \ln(\beta + Ce^{Ax + By + \omega t})$, где

$$A^2 + B^2 = \frac{b\sigma}{a}, b\beta^2 + c\beta + d = 0, \omega^2 \beta^2 - \sigma^2 d^2 = 0, A, C — п.п.$$

9.258. $u(x, t) = \frac{\omega}{2} + A \operatorname{ctg} \frac{A}{a}(x + \omega t) + B$, A, B, ω — п.п.

9.259. $u(x, t) = \beta + Ce^{\varphi} - 2$, $u(x, t) = \frac{Ce^{\varphi}(2 + Ce^{\varphi})}{(1 + Ce^{\varphi})^2}$, $u(x, t) = \frac{Ce^{\varphi}(Ce^{\varphi} - 2)}{(1 + Ce^{\varphi})^2}$, $\beta = \pm 1$, $\varphi = \pm \sqrt{\frac{a}{6}} - \frac{5}{6}at$, C — п.п. Последние два решения — следствие инвариантности уравнения относительно замены $U = 1 - u$ (см. задачу

9.256). **9.260.** $u(x, t) = \frac{a}{b} \ln(A + Be^{\frac{\omega + c}{b}(x - \omega t)}) + rt$, A, B, ω — п.п.

9.261. $u(x, t) = \beta + Ce^{\mu x - \omega t}$, где β, μ, ω — решение системы уравнений: $3\beta^2 c + (r - \frac{2ac}{b})\beta - s = 0$, $\mu^2 \beta + c = 0$, $\omega = \frac{ac}{b} - 2bc - d$, C — п.п.

9.262. $u(x, y, t) = \beta + Ce^{\mu(x \cos \varphi + y \sin \varphi) - \omega t}$, где β, μ, ω — решение системы уравнений: $k\beta^2 + m\beta + n = 0$, $\sigma \mu^2 + k = 0$, $\omega = \frac{ak}{\sigma} + \frac{n}{\beta}$, C, φ — п.п.

9.263. $u(x, y, t) = \frac{\omega}{a}(x \cos \varphi + y \sin \varphi - \omega t + C)$, $u(x, y, t) = A + Ce^{\varphi}$,

$\varphi = B(x \cos \varphi + y \sin \varphi + aABt)$, A, B, C, φ — п.п. **9.264.** Решение определяется неявно: $u - C \ln |u + C| = \frac{Ax + By + t}{A^2 + B^2} + D$; A, B, C, D — п.п.

9.265. $u(x, y, t) = \frac{a(A^2 + B^2)}{Ax + By - t + C}$, $u(x, y, t) = \frac{C}{De^{\varphi} + 1}$, $\varphi = C(Ax + By + \omega t)$,

$A^2 + B^2 = \frac{\omega}{a}$, A, B, C — п.п. **9.266.** $u(x, y, t) = Ax + By + Cz - [a(A^2 + B^2 + C^2) + \beta]t + D$,

A, B, C, D, β — п.п. **9.267.** $u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2(A^2 + B^2)}{a\sigma(Ax + By + C)^2}$,

$u(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2(A^2 + B^2)}{a\sigma \cos^2(Ax + By + C)}$, $u(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2(A^2 + B^2)}{a\sigma \operatorname{sh}^2(Ax + By + C)}$,

A, B, C — п.п. **9.268.** $u(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2(aA^2 + bB^2 + cC^2)}{k\sigma(Ax + By + Cz + D)^2}$,

$u(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2(aA^2 + bB^2 + cC^2)}{k\sigma \cos^2(Ax + By + Cz + D)}$, $u(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{2(aA^2 + bB^2 + cC^2)}{k\sigma \operatorname{sh}^2(Ax + By + Cz + D)}$,

A, B, C — п.п. **9.269.** $u(x, y, z) = \left[\frac{k(m-1)^2}{2(m+1)} \frac{(Ax + By + Cz + D)^2}{aA^2 + bB^2 + cC^2} \right]$; A, B, C, D — п.п.

9.270. $u(x, t) = \left(\frac{-1}{\sqrt{-a(n+2)}} \frac{x^2}{t} \right)^{\frac{2}{n}}$; $u(x, t) = t^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{\pm nx}{\sqrt{-2an(n+2)}} + A \right)^{\frac{2}{n}}$, A — п.п.

Указание. Первое решение является степенной функцией переменной z . Второе решение соответствует такому значению m , при котором второе и третье слагаемые в уравнении (9.135) образуют полную производную.

9.271. $u(x, t) = \sqrt{t} U(x)$, где $U(x)$ задана неявно $\operatorname{erf}(\sqrt{\ln |U|}) = \pm \sqrt{\frac{a}{\pi}} x + C$;

$$u(x, t) = \frac{\pm 2\sqrt{a}}{\sqrt{C\sqrt{t}-x^2}}, \quad C - \text{п.п.} \quad \mathbf{9.272.} \quad u(x, t) = Ax^{\frac{2-n}{m}} t^{-\frac{1}{m}},$$

$$A = \left[\frac{m}{a(2-n)(nm+n-m-1)} \right]^{\frac{1}{m}}; \quad u(x, t) = t^{(1-m)\beta} \left[\frac{m\beta}{a(2-n)} (xt^\beta)^{2-n} + C \right]^{\frac{1}{m}}, \quad \beta = \frac{m\alpha+1}{n-2},$$

$$C, \alpha - \text{п.п.} \quad \text{См. указание к задаче 9.270.} \quad \mathbf{9.273.} \quad u(x, t) = \left(\frac{-m}{2a(mn+2)} \right)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{x^2}{t} \right)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\mathbf{9.274.} \quad u(x, t) = t^m \left[C - \frac{2an}{n+2} \left(-\frac{xt^\beta}{2a} \right)^{\frac{n+2}{n}} \right]^{\frac{n+1}{n}}, \quad \beta = -\frac{mn+1}{n+2},$$

$$u(x, t) = Ax^{\frac{n+2}{2}} t^{-\frac{1}{m}}, \quad A = \left[-\frac{1}{2a} \left(\frac{n}{n+1} t \right)^{n+1} \right]^{\frac{1}{n}}, \quad C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.275.} \quad u(x, t) = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \left(\frac{x}{t} \right)^{\frac{2}{n}}; \quad u(x, t) = \left(C \pm \frac{x}{\sqrt[n]{at}} \right)^{\frac{2}{n}}, \quad C - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.276.} \quad u(x, t) = Ax^{\frac{2-n}{n}} t^{\frac{(n-m)\alpha-2}{n}}, \quad A = \left[\frac{(\alpha(m-n)+2)(\alpha(m-n)+n+2)}{2a(n-1)(n-2)} \right]^{\frac{1}{mn}}, \quad \alpha - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.277.} \quad u(x, t) = U(z), \quad z = xt, \quad \text{функция } U \text{ определяется неявно:}$$

$$A \pm z = \int [B + 2 \int f(U) dU]^{-\frac{1}{2}} dU, \quad B - \text{п.п.} \quad \text{Указание. Автономные переменные } u(x, t) = t^m U(z), \quad z = xt, \text{ где } m - \text{любое; приведенное решение соответствует } m = 0. \mathbf{9.278.} \quad u(x, t) = \left(\frac{A \pm x}{at} \right)^{\frac{2}{n}}; \quad u(x, t) = \left(\frac{x}{at} \right)^{\frac{2}{n}}; \quad u(x, t) = U(z),$$

$$z = \frac{x+A}{t+B}, \quad \text{где функция } U \text{ определена неявно:}$$

$$z = -C^2 U^{\gamma-1} \frac{I^{\frac{1}{2\gamma}-1} \left(\frac{aC}{\gamma} U^\gamma \right) + BK \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{aC}{\gamma} U^\gamma \right)}{I^{\frac{1}{2\gamma}} \left(\frac{aC}{\gamma} U^\gamma \right) + BK \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{aC}{\gamma} U^\gamma \right)}, \quad \gamma = \frac{n+2}{2},$$

$$C, B - \text{п.п.} \quad \text{Указания к первым двум решениям даны в задаче 9.270. Третье решение получается, если в автономных переменных } u(x, t) = t^m U(z),$$

$$z = xt^{-k}, \quad k = \frac{vn+2}{2} \text{ принять } m = 0, \text{ тогда } u(x, t) = U\left(\frac{x}{t}\right), \text{ или}$$

$$u(x, t) = U\left(\frac{x+A}{t+B}\right), \text{ что не повлияет на замену переменных. Уравнение для } U \text{ (оно здесь не выписано) можно один раз проинтегрировать, в результате получится уравнение первого порядка}$$

$$(z^2 - a^2 U^m) U' = C.$$

$$\text{Если принять } U \text{ за независимую переменную, то функция } z(U) \text{ будет решением уравнения } Cz' = z^2 - a^2 U^m. \text{ Это уравнение заменой } z = -C \frac{V'}{V} \text{ преобразуется в линейное уравнение второго порядка } V'' - a^2 C^2 V = 0, \text{ которое сводится к уравнению Бесселя (см. задачу 2.316).}$$

$$\mathbf{9.279.} \quad u(x, y) = Ax^{\frac{n+1-\beta}{1-n}} y^{\frac{1}{1-n}}, \quad A = \left[\frac{1}{r(n-1)^2} \right]^{\frac{1}{n-1}}, \quad \beta - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.280.} \quad \left[\frac{a(1-n)^2}{4} ((x+C_1)^2 + (y+C_2)^2) \right]^{\frac{1}{1-n}}, \quad C_1, C_2 - \text{п.п.}$$

$$\mathbf{9.281.} \quad u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \left[\ln\left(\frac{-8c}{a\sigma}\right) - 2 \ln|C + (x+C_1)^2 + (y+C_2)^2| \right].$$

$$\mathbf{9.282.} \quad u(x, y, t) = \frac{\lambda(x^2+y^2)}{4(a+b)(C-\lambda t)}, \quad \lambda, C - \text{п.п.} \quad \text{Указание. После замены } \xi^2 = x^2 + y^2 \text{ решать уравнение методом разделения переменных: } u = \varphi(t) f(\xi).$$

9.283. $u(x, y, t) = e^{4Aat} \int f(t) e^{-4Aat} dt + Be^{4Aat} + A(x^2 + y^2)$, A, B — п.п.

Частный случай: $u(x, y, t) = \frac{be^{-kt}}{k+4aA} + Be^{4Aat} + A(x^2 + y^2) + C$, A, B, C — п.п.

Указание. После замены $\xi^2 = x^2 + y^2$ решать уравнение методом разделения переменных: $u = \varphi(t) + \psi(t)\xi^2$.

9.284. $u(x, y, z, t) = e^{h(x, y, z, t)}$, $\xi^2 = \frac{4}{a(n-2)^2} x^{2-n} + \frac{4}{b(m-2)^2} y^{2-m} + \frac{4}{c(p-2)^2} z^{2-p}$,

1) $h = \varphi(t) + f(\xi)$, $\varphi(t) = Ce^{kt}$, $f(\xi) = -\frac{k\xi^2}{4} + B\xi + \frac{1}{2} - \frac{B^2}{k}$;

2) $h = \varphi(t)\xi + \psi(t)$, $\varphi(t) = Ce^{kt}$, $\psi(t) = \frac{C^2}{k} e^{2kt} + C_1 e^{kt}$;

3) $h = \varphi(t)\xi^2 + \psi(t)\xi + \chi(t)$, $\varphi(t) = \frac{k}{Ce^{-kt}-4}$, $\psi = \frac{C_1}{Ce^{-kt}-4}$,

$\chi(t) = \frac{C_1^2 e^{kt}}{kC(Ce^{-kt}-4)} - \frac{2}{C} e^{kt} \ln|Ce^{-kt} - 4| + C_1 e^{kt}$, B, C, C_1 — п.п. Указание. В

преобразованном уравнении $u_t = u_{\xi\xi} + \frac{A}{\xi} u_{\xi} + ku \ln u$ коэффициент

$A = 2(\frac{1}{2-n} + \frac{1}{2-m} + \frac{1}{2-p})$. Приведенные решения соответствуют $A=0$.

9.285. $u(x, y) = B\xi^k$, $k = \frac{2}{1-p}$, $B = [\frac{2(1+p)}{c(1-p)^2} + \frac{A}{c}]^{\frac{1-p}{1+p}}$,

$\xi^2 = \frac{4}{a(n-2)^2} x^{2-n} + \frac{4}{b(m-2)^2} y^{2-m}$. **9.286.** $u(x, y) = \frac{1}{\sigma} [\ln \frac{4(mn-n-m)}{\sigma c(2-n)(2-m)} - 2 \ln |\xi|]$,

$\xi^2 = \frac{4}{a(n-2)^2} x^{2-n} + \frac{4}{b(m-2)^2} y^{2-m}$. **9.287.** $u(x, y) = B\xi^{\frac{2}{1-p}}$, $B = [\frac{2}{c(1-p)}(A + \frac{1+p}{1-p})]^{\frac{1}{1-p}}$,

$A = \frac{4+3mn-4m-4n}{(2-n)(2-m)}$, $\xi^2 = \frac{4}{a(n-2)^2} x^{2-n} + \frac{4}{b(m-2)^2} y^{2-m}$.

9.288. $u(x, y) = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{4(m+n-nm)}{\sigma c(n-2)(m-2)} - \frac{2}{\sigma} \ln |\xi|$, $\xi^2 = \frac{4}{a(n-2)^2} x^{2-n} + \frac{4}{b(m-2)^2} y^{2-m}$.

9.289. $u(x, y) = [\frac{4m}{c(m-1)^2}]^{\frac{1}{m-1}} \xi^{\frac{2}{1-m}}$, $\xi^2 = \frac{4}{a\sigma^2} e^{-\sigma x} + \frac{4}{b\mu^2} e^{-\mu y}$.

9.290. $u(x, y, t) = [\frac{m(\xi+C)^2}{2(m+2)(B-t)}]^{\frac{1}{m}}$, $\xi^2 = \frac{4}{a\sigma^2} e^{-\sigma x} + \frac{1}{b} y^2$, B, C — п.п.

9.291. $u(x, y, t) = [\frac{\pm \frac{k}{2} \sqrt{\frac{2\lambda}{2-k}} \xi + C}{B-\lambda t}]^{\frac{1}{k}}$, B, C, λ — п.п.

Глава 10

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Необходимость обобщения классического понятия функции была вызвана потребностями физики: многие физические величины, например, плотность сосредоточенной массы, точечного заряда и т.п. нельзя описать посредством обычных функций (т.е. функций точки эвклидова пространства). Источником развития этого направления математики явилась δ -функция, введенная в 20-х годах прошлого столетия П.Дираком в его исследованиях по квантовой механике. В середине 30-х годов советский математик академик С.Л.Соболев впервые дал строгое математическое обоснование теории обобщенных функций как линейных непрерывных функционалов, определенных на пространстве достаточно гладких функций, и ввел понятие обобщенной производной. Эти идеи получили в дальнейшем широкое распространение. начале 50-х годов появилась монография Л.Шварца, посвященная систематическому построению теории обобщенных функций. В настоящее время обобщенные функции имеют многочисленные приложения в различных областях знаний и особенно в теоретической и математической физике. Обзор по этому вопросу содержится в работе В. С. Владимирова [13].

Наряду с использованием обобщенных функций в теоретических исследованиях они применяются при решении многих задач математической физики. Прежде всего объектом приложения обобщенных функций служат задачи с сосредоточенными факторами (сосредото-

ченная сила, действующая на механическую систему, точечный источник диффундирующих частиц, точечный диполь и т.п.). Это обусловлено тем, что лишь в рамках теории обобщенных функций можно математически строго описать плотность сосредоточенных физических величин. Однако применение обобщенных функций этим не ограничивается, так как они используются при решении задач, в постановке которых непосредственно не участвуют. Например, задача с неоднородными граничными условиями преобразуется (стандартным приемом) в эквивалентную задачу с однородными граничными условиями. При этом в уравнении появляются неоднородные члены, содержащие сингулярные обобщенные функции (δ -функцию и ее производные); построение решений таких задач сводится к достаточно простой формальной процедуре. Если начальные условия смешанной (нестационарной) задачи определяются ее стационарным решением, то применение обобщенных функций для построения нестационарного решения избавляет от необходимости находить начальные условия в явном виде. Существует класс задач (струна с сосредоточенной массой, стержень с сосредоточенной теплоемкостью и др.), решение которых методом Фурье приводит к задаче на собственные значения со спектральным параметром в граничных условиях. Оказывается, что соответствующие собственные функции ортогональны с некоторым весом. Сам этот факт и вид весового множителя можно установить, переходя к эквивалентной задаче с помощью обобщенных функций. Разложение заданной функции в ряд по собственным функциям эрмитова оператора (ряд Фурье) сводится к вычислению коэффициентов ряда, имеющих форму интегралов. Привлечение обобщенных функций в некоторых случаях существенно упрощает вычисление соответствующих интегралов, содержащих цилиндрические функции, ортогональные многочлены и т. п. Аппарат обобщенных функций применяется для определения и построения функции Грина смешанных и краевых задач. При этом функция Грина получает физическую трактовку, что позволяет находить решения (в форме интегралов, рядов или конечных сумм) различных линейных задач. В связи с потребностями математической физики построены различные классы (точнее, пространства) обобщенных функций, использование которых расширяет сферу действия интегральных преобразований.

Литература к главе: [14].

10.1. Обобщенные функции в $\mathbf{R}^n$

Пример 10.1. Пусть $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная функция точки $x \in \mathbf{R}^n$. Замыкание множества $X_\varphi = \{x : \varphi(x) \neq 0\}$ называется носителем функции $\varphi(x) : \text{supp } \varphi = \overline{X}_\varphi$. Если носитель функции $\varphi(x)$ ограниченное множество, т. е. существует такое $r > 0$, что $\text{supp } \varphi \subset B_r = \{x : |x| < r\}$, то $\varphi(x)$ называется финитной функцией. Функция

$$\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}} & , \quad |x| < \varepsilon, \\ 0 & , \quad |x| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad \int_{\mathbf{R}^n} \omega_\varepsilon dx = 1, \quad (10.1)$$

финитна, так как отлична от нуля в шаре B_ε , следовательно, ее носитель $\text{supp } \omega_\varepsilon = \overline{B}_\varepsilon$ — ограниченное множество.

В дальнейших выкладках используются следующие обозначения $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — вектор с целочисленными неотрицательными компонентами, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$,

$$D^0 f(x) = f(x), \quad D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

— производная порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Пространством основных функций $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ называется линейное множество финитных функций $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, в котором следующим образом определена сходимость:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \varphi(x) \iff \begin{cases} \exists r \quad \forall k : \quad \text{supp } \varphi_k \subset B_r, \\ \forall \alpha : \quad D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\mathbf{R}^n} D^\alpha \varphi(x), \end{cases}$$

где символ $\xrightarrow[E]{\mathbf{R}^n}$ означает равномерную сходимость функциональной последовательности на множестве E .

Функция $\omega_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}$. Действительно, $\omega_\varepsilon(x)$ — финитна и для любого α

$$D^\alpha \omega_\varepsilon = \frac{P_{|\alpha|}(x)}{(|x|^2 - \varepsilon^2)^{2\alpha}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, \quad |x| < \varepsilon,$$

где $P_{|\alpha|}(x)$ — многочлен (это доказывается методом математической индукции). Так как $D^\alpha \omega_\varepsilon \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \varepsilon$, то $D^\alpha \omega_\varepsilon \in C(\mathbf{R}^n)$, поэтому $\omega_\varepsilon(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Последовательность $\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \omega_\varepsilon(x)$, $k \in \mathbf{N}$ сходится и ее предел равен нулю. В самом деле,

$$\begin{aligned} \forall k : \quad \text{supp } \varphi_k &= \text{supp } \omega_\varepsilon \subset \overline{B}_\varepsilon, \\ \forall \alpha : \quad |D^\alpha \varphi_k| &= \frac{1}{k} |D^\alpha \omega_\varepsilon| \leq \frac{M(\alpha)}{k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

10.1. Найти носители следующих функций, определенных в $\mathbf{R}$:

$$1. \eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0; \end{cases} \quad 2. \text{sign } x; \quad 3. [x] \eta(a - |x|), \quad a > 0,$$

$[x]$ — целая часть x .

10.2. Определить носитель функции $\varphi(x) = \prod_{j=1}^n \omega_{\varepsilon_j}(x_j)$.

10.3. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Какой должна быть функция $h(x)$, чтобы произведение $h\varphi \in \mathcal{D}$?

10.4. Показать, что функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} \left(1 + th \frac{x - \frac{3}{4}}{(x - \frac{1}{2})(x - 1)} \right), & \frac{1}{2} < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x \end{cases}$$

является элементом $\mathcal{D}$.

10.5. Доказать, что функции

$$\begin{aligned} 1. \psi(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) \omega_\varepsilon(x - \xi) d\xi, \quad \text{supp } \varphi = [a, b]; \\ 2. \psi(x) &= \int_{a + \frac{3}{4}\varepsilon}^{b - \frac{3}{4}\varepsilon} \omega_{\varepsilon/4}(x - \xi) d\xi, \quad \varepsilon < \frac{b - a}{2}, \end{aligned}$$

где $-\infty < a < b < \infty$, принадлежат пространству $\mathcal{D}$.

10.6. Функция

$$\varphi_S(r) = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi(x) \in \mathcal{D}, \quad (10.2)$$

где S_r — сфера радиуса r , $|S_r|$ — ее площадь, называется сферическим средним функции φ . Показать, что $\varphi_S(r) \in \mathcal{D}$.

10.7. Установить, сходятся ли в $\mathcal{D}$ последовательности функций:

$$1. \frac{1}{k} \omega_\varepsilon(kx); \quad 2. \frac{1}{k} \omega_\varepsilon\left(\frac{x}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

10.8. Известно, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \varphi(x)$ в $\mathcal{D}$. Сходятся ли последовательности:

1. $h(x) \varphi_k(x)$, $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$;
2. $\varphi_k(\mathcal{A}x + b)$, $\mathcal{A}$ — невырожденная матрица $(n \times n)$, b — фиксированный вектор в $\mathbf{R}^n$, $k \in \mathbf{N}$?

10.9. Пусть $\{\Delta s_i\}_{i=1}^k$ — какое-нибудь разбиение сферы S_r , $\mathcal{U}_i$ — оператор поворота относительно центра сферы, преобразующий точку $x_1 \in \Delta s_1$ в $x_i \in \Delta s_i$. Доказать, что последовательность

$$\psi_k(x) = \frac{1}{|S_r|} \sum_{i=1}^k \varphi(\mathcal{U}_i x) |\Delta s_i|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \quad (10.3)$$

сходится к сферическому среднему (10.2) функции φ .

10.10. Доказать, что пространство $\mathcal{D}$ является полным.

Пример 10.2. Пусть на пространстве $\mathcal{D}$ задан функционал f , т.е. правило, по которому каждой функции $\varphi \in \mathcal{D}$ ставится в соответствие число (f, φ) . Функционал f называется линейным, если

$$(f, \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2) = \mu_1 (f, \varphi_1) + \mu_2 (f, \varphi_2),$$

где μ_1 и μ_2 — комплексные числа. Функционал f называется непрерывным, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = \varphi(x) \implies \lim_{k \rightarrow \infty} (f, \varphi_k) = (f, \varphi).$$

Всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{D}$ называется обобщенной функцией. Если $f(x)$ — локально интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция, т.е. для любого измеримого множества $E \subset \mathbf{R}^n$ функция $f(x) \in L(E)$, то функционал

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad (10.4)$$

представляет собой обобщенную функцию. Действительно, сходимость интеграла вытекает из оценки

$$\left| \int_{\mathbf{R}^n} f \varphi dx \right| \leq \max_{\mathbf{R}^n} |\varphi| \int_{\text{supp } \varphi} |f| dx < \infty,$$

линейность функционала следует из линейности интеграла, а непрерывность — из теоремы Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f, \varphi_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} f \varphi_k dx = \int_{\mathbf{R}^n} f \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k dx = (f, \varphi).$$

Функционал (10.4), порожденный локально интегрируемой функцией, определяет регулярную обобщенную функцию. В отличие от регулярных все остальные обобщенные функции называются сингулярными. Функционал

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (10.5)$$

является сингулярной обобщенной функцией (задача 10.12).

Между локально интегрируемыми и регулярными обобщенными функциями имеется взаимно однозначное соответствие (две локально интегрируемые функции считаются равными с точностью до значений на множестве меры нуля), поэтому между ними не делают различия (это две формы задания одной и той же функциональной зависимости). В связи с этим для обозначения регулярных обобщенных функций наряду с f употребляют также символ $f(x)$, а значение функционала записывают в виде $(f(x), \varphi(x))$. Эту символику распространяют на все обобщенные функции. Так, функционал δ (δ -функция) и его значения обозначают через $\delta(x)$ и $(\delta(x), \varphi(x))$ соответственно. Для $\delta(x)$ употребляют также интегральную форму записи

$$\int_{\mathbf{R}^n} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

10.11. Построить регулярные обобщенные функции, соответствующие локально интегрируемым в $\mathbf{R}$ функциям $f(x)$:

$$1. f(x) = 1; \quad 2. f(x) = \eta(x); \quad 3. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \notin (0, \pi). \end{cases}$$

10.12. Показать, что δ -функция (10.5) является сингулярной обобщенной функцией.

10.13. Доказать, что функционал

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi\right) = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{\infty} \right) \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad (10.6)$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ представляет собой сингулярную обобщенную функцию.

10.14. Не имеет смысла говорить о значении обобщенной функции $f(x)$ в точке x , так как аргументом функционала служит функция $\varphi(x)$. Однако можно ввести следующее определение: обобщенная функция $f(x)=0$ в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, если $(f, \varphi)=0$ для любой $\varphi \in \mathcal{D}$, носитель которой принадлежит Ω . Пусть x_f такая точка, ни в какой окрестности которой $f(x)$ не равна нулю. Множество точек x_f называется носителем обобщенной функции и обозначается $\text{supp } f$. Определить носители обобщенных функций 1, 2, 3 из задачи 10.11; 4. $\delta(x)$.

10.15. Результат действия функционала f на функцию φ не изменится, если изменить $\varphi(x)$ вне носителя f . Исходя из этого, можно продолжить функционал на более широкий класс функций. Линейный функционал $\tilde{f}$, определенный на множестве $\tilde{\mathcal{D}}$, называется продолжением функционала f , заданного на множестве $\mathcal{D}$, если $\mathcal{D} \subset \tilde{\mathcal{D}}$ и $(\tilde{f}, \varphi)=(f, \varphi)$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}$. Показать, что δ -функцию можно продолжить на класс функций $\psi(x) \in C^m(\mathbf{R}^n)$ следующим образом:

$$(\tilde{\delta}, \psi) = \psi(0).$$

Пример 10.3. Действия с регулярными обобщенными функциями, основанные на свойствах интеграла, распространяются (по определению) на все обобщенные функции. Линейная комбинация обобщенных функций — это функционал, действующий по правилу

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}: \quad (\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2, \varphi) = \mu_1 (f_1, \varphi) + \mu_2 (f_2, \varphi). \quad (10.7)$$

Отсюда следует (см. определение равенства нулю обобщенной функции в задаче 10.11), что обобщенные функции f_1 и f_2 равны, если

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}: \quad (f_1, \varphi) = (f_2, \varphi). \quad (10.8)$$

Произведение $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и обобщенной функции f называется функционал

$$(hf, \varphi) = (f, h\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}. \quad (10.9)$$

Если $f(x)$ — локально интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция, $\mathcal{A}$ — невырожденная матрица $(n \times n)$, b — фиксированный вектор, то замена переменной осуществляется по формуле

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(\mathcal{A}x + b) \varphi(x) dx = \frac{1}{|\det \mathcal{A}|} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(\mathcal{A}^{-1}(x - b)) dx.$$

Это равенство, записанное в форме

$$(f(\mathcal{A}x + b), \varphi(x)) = \left(f(x), \frac{\varphi(\mathcal{A}^{-1}(x - b))}{|\det \mathcal{A}|} \right), \quad (10.10)$$

определяет линейную замену в любой обобщенной функции.

Обобщенная функция f называется пределом последовательности $f_1, f_2, \dots$ обобщенных функций, если

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}: \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi). \quad (10.11)$$

Множество $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ обобщенных функций, обладающих свойством (10.7), является линейным. Линейное множество $\mathcal{D}'$, в котором введена сходимость последовательности по правилу (10.11), называется пространством обобщенных функций. Доказательство полноты пространства $\mathcal{D}'$ приведено в [14].

В частности, из соотношений (10.9) и (10.7) следует, что

$$(h\delta, \varphi) = (\delta, h\varphi) = h(0) \varphi(0) = h(0) (\delta, \varphi) = (h(0)\delta, \varphi),$$

откуда по (10.8)

$$h(x) \delta(x) = h(0) \delta(x).$$

Если $\mathcal{A}x = x - x_0$, $b = 0$, то формула замены переменной (10.10) принимает вид: $(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x + x_0)) = \varphi(x_0)$, т.е.

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0).$$

Последовательность

$$f_k(x) = \left(\frac{k}{\pi a}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{kx^2}{a}}, \quad a > 0, \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad k \rightarrow \infty$$

сходится в $\mathcal{D}'$ к $\delta(x)$. Действительно, так как

$$\int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) dx = 1,$$

то достаточно доказать, что

$$\forall \varphi \in \mathcal{D} : \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx = 0.$$

Доказательство основано на вытекающей из формулы Лагранжа оценке

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| \leq |(\nabla \varphi(\tilde{x}), x)| \leq M|x| :$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^n} f_k(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) dx \right| &\leq M \left(\frac{k}{\pi a} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{kx^2}{a}} |x| dx = \\ &= M \left(\frac{k}{\pi a} \right)^{\frac{n}{2}} |S_1| \int_0^\infty e^{-\frac{kr^2}{a}} r^n dr = \frac{M|S_1|}{2\pi^{\frac{n}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \sqrt{\frac{a}{k}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

10.16. Доказать, что функционал $\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2$, действующий по правилу (10.7), является обобщенной функцией.

10.17. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathcal{D}$ в $\mathcal{D}$, т.е., если $\varphi \in \mathcal{D}$, то $\mathcal{A}\varphi \in \mathcal{D}$; показать, что функционал $\mathcal{A}^* f$, определенный правилом $(\mathcal{A}^* f, \varphi) = (f, \mathcal{A}\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}$, принадлежит $\mathcal{D}'$.

10.18. Доказать, что функционалы hf и $f(\mathcal{A}x + b)$, определенные посредством (10.9) и (10.10), являются обобщенными функциями.

10.19. Установить следующие свойства функции $\delta(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$:

$$1. \delta(ax) = |a|^{-n} \delta(x), \quad a \neq 0; \quad 2. \delta(-x) = \delta(x).$$

10.20. Доказать, что (см.(10.6))

$$x h(x) \mathcal{P} \frac{1}{x} = h(x), \quad h(x) \in C^\infty(\mathbf{R}).$$

10.21. Локально интегрируемая функция $f(x)$ называется сферически симметричной, если она инвариантна относительно преобразований поворота $\mathcal{U}$, т.е. $f(\mathcal{U}x)=f(x)$. Показать, что сферически симметричную обобщенную функцию естественно определить следующим образом:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}: (f(x), \varphi(\mathcal{U}x)) = (f(x), \varphi(x)). \quad (10.12)$$

10.22. Доказать, что $\delta(x)$ — сферически симметричная обобщенная функция.

10.23. Пусть $f(x)$ — сферически симметричная обобщенная функция, φ_r — сферическое среднее (10.2) функции $\varphi(x)$; доказать, что $(f, \varphi) = (f, \varphi_r)$, т.е. функционал f достаточно задать на сферически симметричных функциях пространства $\mathcal{D}$.

10.24. Функция $h(x) \in C^1(\mathbf{R})$ имеет лишь простые изолированные нули $x_1, x_2, \dots$; исходя из свойств регулярных обобщенных функций, построить следующее определение функционала $\delta(h(x))$:

$$\delta(h(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|h'(x_n)|}. \quad (10.13)$$

10.25. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$

$$1. \delta(x^2 - 1) = \frac{1}{2}(\delta(x + 1) + \delta(x - 1)); \quad 2. \delta(\sin x) = \sum_n \delta(x - \pi n).$$

10.26. Доказать, что $f_k(x) \rightarrow \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ при $k \rightarrow \infty$, где

$$1. f_k(x) = \omega_{\frac{1}{k}}(x); \quad 2. f_k(x) = \frac{1 - \cos x}{\pi k x^2}.$$

10.27. Сходятся ли последовательности обобщенных функций:

$$1. \delta(kx); \quad 2. \delta(x - k); \quad 3. \delta\left(\frac{x}{k} - \alpha\right), \alpha \neq 0 \text{ при } k \rightarrow \infty?$$

10.28. Масса $m=1$ находится в точке $x=0 \in \mathbf{R}^3$. Для определения плотности точечной массы ее равномерно распределяют в шаре $B_{\frac{1}{k}}$, $k \in \mathbf{N}$ так, что плотность

$$\rho_k(x) = \begin{cases} \frac{3k^3}{4\pi} & , \quad |x| < \frac{1}{k}, \\ 0 & , \quad |x| > \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Показать, что 1) поточечный предел $\rho(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k(x)$ не определяет плотность точечной массы; 2) плотностью является предел последовательности $\rho_1, \rho_2, \dots$ в пространстве $\mathcal{D}'$, и этот предел есть δ -функция.

10.29. Доказать, что если $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$, $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n+m})$, то функция $(g(y), \varphi(x, y)) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

10.30. Если $f(x)$ и $g(y)$ — локально интегрируемые функции в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно, то по теореме Фубини

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx \int_{\mathbf{R}^m} g(y) \varphi(x, y) dy.$$

Это равенство, записанное в виде

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{n+m}),$$

служит определением прямого произведения $f(x) \cdot g(y)$ обобщенных функций $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$. Доказать, что

- 1) прямое произведение ассоциативно;
- 2) $\delta(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot \delta(x)$ (доказательство коммутативности прямого произведения в общем случае см. в [14]);
- 3) $h(x)(f(x) \cdot g(y)) = h(x)f(x) \cdot g(y)$, $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$;
- 4) $(f \cdot g)(x - x_0, y) = f(x - x_0) \cdot g(y)$;
- 5) $\delta(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1) \cdot \delta(x_2) \cdot \dots \cdot \delta(x_n)$.

10.31. Сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ называется функция

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(y) g(x - y) dy.$$

Пусть $f(x), g(x), \int_{\mathbf{R}^n} |f(y) g(x - y)| dy$ — локально интегрируемые в $\mathbf{R}^n$ функции. Доказать, что 1. свертка $f * g$ существует; 2. $f * g$ — локально интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция; 3. $f * g = g * f$.

10.32. Пусть свертка $(f * g)(x)$ — локально интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция. Доказать, что она определяет регулярную обобщенную функцию

$$(f * g, \varphi) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x + y)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$$

при условии существования функционала в правой части (в общем случае $\varphi(x + y)$ не является финитной).

10.33. Доказать, что

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \quad \forall f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) : h(y) = (f(x), \varphi(x+y)) \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

10.34. Доказать, что $f * \delta = \delta * f = f$ (доказательство коммутативности свертки в общем случае дано в [14]). Равенство $f * \delta = f$, записанное в интегральной форме

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y) \delta(y) dy = f(x),$$

имеет следующую физическую трактовку: источник $f(x)$ есть суперпозиция точечных источников $f(x-y) \delta(y)$.

10.35. Вычислить $\eta(t) \sin \omega t * \eta(t) \sin \omega_0 t$.

Пример 10.4. Если $f(x) \in C^m(\mathbf{R}^n)$, $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, то посредством интегрирования по частям устанавливается равенство

$$\int_{\mathbf{R}^n} D^\alpha f(x) \varphi(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx, \quad |\alpha| \leq m,$$

или

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \quad (10.14)$$

Соотношение (10.14), установленное для регулярных обобщенных функций, распространяется (по определению) на все обобщенные функции: функционал $D^\alpha f$, действующий по правилу (10.14), называется обобщенной производной порядка $|\alpha|$ функции $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. При любом α обобщенная производная $D^\alpha f$ является линейным непрерывным функционалом. Линейность:

$$\begin{aligned} (D^\alpha f, \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2) &= (-1)^{|\alpha|} (f, \mu_1 D^\alpha \varphi_1 + \mu_2 D^\alpha \varphi_2) = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \mu_1 (f, D^\alpha \varphi_1) + (-1)^{|\alpha|} \mu_2 (f, D^\alpha \varphi_2) = \\ &= \mu_1 (D^\alpha f, \varphi_1) + \mu_2 (D^\alpha f, \varphi_2). \end{aligned}$$

Непрерывность: если $\varphi_k \rightarrow \varphi$ при $k \rightarrow \infty$, то

$$(D^\alpha f, \varphi_k) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi_k) \rightarrow (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi).$$

Из доказанного свойства следует, что всякая обобщенная функция бесконечно дифференцируема. В дальнейшем, в случае необходимости, классическая производная там, где она существует, будет обозначаться символом $\{D^\alpha f\}$.

10.36. Доказать, что для регулярной обобщенной функции, которая определяется функцией $f(x) \in C^m(\mathbf{R}^n)$,

$$D^\alpha f = \{D^\alpha f\}, \quad |\alpha| \leq m.$$

10.37. Доказать, что сходимость $f_k \rightarrow f$ в $\mathcal{D}'$ влечет при любом α сходимость $D^\alpha f_k \rightarrow D^\alpha f$ в $\mathcal{D}'$.

10.38. Показать, что сходящийся в $\mathcal{D}'$ ряд можно дифференцировать почленно, т.е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \rightarrow f \implies \sum_{k=0}^{\infty} D^m f_k \rightarrow D^m f.$$

10.39. Сходятся ли в пространстве $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ последовательности

$$1. (\cos kx)/k; \quad 2. k^3 \cos kx \text{ при } k \rightarrow \infty?$$

10.40. Построить последовательность обобщенных функций, сходящуюся к $\delta^{(m)}(x)$.

10.41. Установить следующие формулы обобщенного дифференцирования в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

1. $D^m(\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2) = \mu_1 D^m f_1 + \mu_2 D^m f_2$;
2. $D^m(hf) = \sum_{k=0}^m C_m^k D^k h D^{m-k} f$, $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$;
3. $D^m f(ax+b) = a^m (D^m f)(ax+b)$.

10.42. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$

1. $(D^m \delta, \varphi) = (-1)^m D^m \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$;
2. $h(x) D^m \delta(x) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k D^k h(0) D^{m-k} \delta(x)$, $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$.

10.43. Функционалы

$$1. e^{-x} D^m \delta(x); \quad 2. \sin x D^m \delta(x); \quad 3. \cos x D^m \delta(x),$$

определенные в $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, представить в форме линейной комбинации функционалов $D^k \delta(x)$, $k=0, 1, 2, \dots, m$.

Пример 10.5. Пусть $f(x) \in C^1(x \leq x_0) \cap C^1(x \geq x_0)$, т.е. существуют конечные предельные значения функции и ее производной в точке x_0

справа и слева, $[f]_{x_0} = f(x_0+0) - f(x_0-0)$ — скачок $f(x)$ в точке x_0 . По определению (10.14) обобщенной производной

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= -(f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{x_0} f \varphi' dx - \int_{x_0}^{\infty} f \varphi' dx = \\ &= -f \varphi|_{-\infty}^{x_0} + \int_{-\infty}^{x_0} \{f'\} \varphi dx - f \varphi|_{x_0}^{\infty} + \int_{x_0}^{\infty} \{f'\} \varphi dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\} \varphi dx + [f(x_0+0) - f(x_0-0)] \varphi(x_0) = \\ &= (\{f'\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0), \varphi). \end{aligned}$$

Отсюда по определению (10.8)

$$f'(x) = \{f'(x)\} + [f]_{x_0} \delta(x - x_0).$$

10.44. Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ — кусочно-непрерывны в $\mathbf{R}$, $\{x_k\}$ — множество точек разрыва функции $f(x)$. Доказать, что

$$f'(x) = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k} \delta(x - x_k).$$

10.45. Пусть $f(x) \in C^2(x \leq x_0) \cap C^2(x \geq x_0)$, где $x \in \mathbf{R}$, доказать, что

$$f''(x) = \{f''(x)\} + [f]_{x_0} \delta'(x - x_0) + [f']_{x_0} \delta(x - x_0). \quad (10.15)$$

10.46. Вычислить обобщенные производные 1-го и 2-го порядков следующих функций, определенных в $\mathbf{R}$:

- | | |
|------------------------------|--|
| 1. $\eta(x)$; | 5. $\sin x $; |
| 2. $x \eta(x)$; | 6. $\operatorname{sign} x \cos x$; |
| 3. $e^{-x} \eta(x)$; | 7. $(1-x) \operatorname{sign} x$; |
| 4. $\operatorname{sign} x$; | 8. $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x > 0, \\ 1 - x^2 & , \quad x < 0. \end{cases}$ |

10.47. Вычислить обобщенные производные порядка m следующих функций, определенных в $\mathbf{R}$:

1. $h(x) \eta(x)$, $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$; 2. $x^n \eta(x)$, $n \in \mathbf{N}_0$.

10.48. Пусть функция $f(x) \in C^2(x \geq 0)$, где $x \in \mathbf{R}$. Вычислить обобщенные производные 1-го и 2-го порядков функции $f(|x|)$.

10.49. Вычислить обобщенные производные 1-го и 2-го порядков следующих функций, определенных в $\mathbf{R}$:

- | | | |
|-----------------|------------------------|---------------------|
| 1. $ x $; | 3. $\sin x \cos x$; | 5. $x \sin x $; |
| 2. $e^{- x }$; | 4. $ x \cos x$; | 6. $ x e^{- x }$. |

10.50. Пусть функция $f(x) \in C^2(\mathbf{R})$ имеет на каждом конечном промежутке конечное число простых нулей. Вычислить 1) обобщенную производную функции $\text{sign} f(x)$; 2) обобщенные производные 1-го и 2-го порядков функции $|f(x)|$.

10.51. Найти обобщенные производные 1-го порядка определенных в $\mathbf{R}$ функций: 1) $\text{sign}(\sin x)$; 2) $\text{sign}(\cos x)$.

10.52. Вычислить обобщенные производные 1-го и 2-го порядков следующих функций, определенных в $\mathbf{R}$:

1. $|x + 1|$; 2. $|x^2 - 1|$; 3. $|\sin x|$; 4. $|\cos x|$.

10.53. Осуществить обобщенное дифференцирование:

1. $D^m \eta(-x)$; 2. $D^m \eta(ax + b)$.

10.54. Пусть $f(x) = D^m \delta(x)$, где $x \in \mathbf{R}$; найти $f(-x)$.

10.55. Вычислить обобщенную производную $D \ln |x|$, где $x \in \mathbf{R}$.

10.56. Установить следующее правило дифференцирования прямого произведения:

$$D_x^\alpha (f(x) \cdot g(y)) = D^\alpha f(x) \cdot g(y).$$

10.57. Доказать, что $f * D^\alpha \delta = D^\alpha \delta * f = D^\alpha f$.

10.58. Определить плотность заряда одномерного диполя с моментом $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_x$, расположенного в точке $x = 0 \in \mathbf{R}$ (поле диполя зависит только от x).

10.59. Диполь с моментом $\mathbf{p} = p \mathbf{l}$ $|\mathbf{l}| = 1$, находится в точке $x = x_0$ трехмерного пространства. Определить плотность заряда диполя.

10.60. В точке $(0, 0, z_0) \in \mathbf{R}^3$ находится диполь с моментом $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z$. Найти плотность заряда диполя.

10.61. На прямой $\{x, y, z : x=0, y=y_0, -\infty < z < \infty\}$ расположены диполи с линейной плотностью момента $\mathbf{p}$, направление которого составляет угол $\pi/4$ с осью $0x$ и угол $\pi/2$ с осью $0z$. Определить плотность заряда этой системы.

10.62. Доказать, что

$$1. \quad \Delta \ln \frac{1}{|x - x_0|} = -2\pi \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbf{R}^2; \quad (10.16)$$

$$2. \quad \Delta \frac{1}{|x - x_0|} = -4\pi \delta(x - x_0), \quad x \in \mathbf{R}^3. \quad (10.17)$$

Пример 10.6. В задачах математической физики используются обобщенные функции, носители которых принадлежат кусочно-гладким двусторонним поверхностям. Пусть S — такая поверхность, $\mathbf{n}$ — нормаль к S , $\sigma(x)$ и $\nu(x)$ — непрерывные функции, определенные на S ; функционалы $\sigma\delta_S$ и $\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S)$, действующие по правилам

$$(\sigma\delta_S, \varphi) = \int_S \sigma \varphi ds, \quad (10.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial n}(\nu\delta_S), \varphi \right) = - \int_S \nu \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds, \quad (10.19)$$

где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ представляют собой обобщенные функции, носители которых принадлежат S . Эти обобщенные функции называются соответственно простым слоем с плотностью σ на S и двойным слоем с плотностью момента ν на S , ориентированного по нормали $\mathbf{n}$. Обобщенная функция (10.18) описывает пространственную плотность заряда, распределенного на S с поверхностной плотностью σ . Физический смысл обобщенной функции (10.19): она описывает пространственную плотность зарядов заряженной поверхности, на которой распределены диполи с поверхностной плотностью момента ν , направленного по нормали $\mathbf{n}$ к поверхности S .

Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей S , $\Omega_1 = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, функция $f(x) \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega}_1)$; по определению

$$f|_{S^+} = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S \\ x' \in \Omega_1}} f(x'), \quad f|_{S^-} = \lim_{\substack{x' \rightarrow x \in S \\ x' \in \Omega}} f(x'), \quad (10.20)$$

$[f]_S = f|_{S^+} - f|_{S^-}$ — скачок функции на S . Для функции $f(x)$ можно установить следующую формулу обобщенного дифференцирования

$$\Delta f = \{\Delta f\} + \frac{\partial}{\partial n}([f]_S \delta_S) + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S, \quad (10.21)$$

где $\{\Delta f\}$ означает дифференцирование в классическом смысле. Действительно, по определению обобщенной производной (10.14) и на основании 2-й формулы Грина (10.37), в которой $\mathcal{L} = -\Delta$,

$$\begin{aligned} (\Delta f, \varphi) &= (f, \Delta \varphi) = \int_{\Omega} f \Delta \varphi \, dx + \int_{\Omega_1} f \Delta \varphi \, dx = \\ &= \int_{\Omega} \{\Delta f\} \varphi \, dx + \int_S \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_{S^-} ds + \\ &+ \int_{\Omega_1} \{\Delta f\} \varphi \, dx - \int_S \left(f \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial f}{\partial n} \right) \Big|_{S^+} ds = \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \{\Delta f\} \varphi \, dx - \int_S [f]_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \int_S \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \varphi \, ds = \\ &= (\{\Delta f\}, \varphi) + \left(\frac{\partial}{\partial n}([f]_S \delta_S), \varphi \right) + \left(\left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S, \varphi \right) = \\ &= \left(\{\Delta f\} + \frac{\partial}{\partial n}([f]_S \delta_S) + \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S, \varphi \right). \end{aligned}$$

Соотношение (10.21) является следствием определения (10.8).

10.63. На кусочно-гладкой поверхности $S \subset \mathbf{R}^3$ расположен заряд с плотностью $\sigma(x)$. Определить пространственную плотность заряда.

10.64. На гладкой поверхности $S \subset \mathbf{R}^3$ расположены диполи, ориентированные по нормали к S . Определить пространственную плотность заряда, если поверхностная плотность дипольного момента $\mathbf{v}(x)$.

10.65. Наряду с $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ в теории обобщенных функций вводится пространство $\mathcal{J} = \mathcal{J}(\mathbf{R}^n)$: это множество бесконечно дифференцируемых функций, которые вместе со всеми производными убывают при $|x| \rightarrow \infty$

быстрее любой степени $|x|^{-1}$; последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{J}$ называется сходящейся к $\varphi(x) \in \mathcal{J}$ если

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}^n : x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \xrightarrow{\mathbf{R}^n} x^\beta D^\alpha \varphi(x), \quad k \rightarrow \infty.$$

Какие из функций

$$\begin{array}{lll} 1. \sin x / x & ; & 3. e^{-|x|} & ; & 5. x^n e^{-x^2} & ; \\ 2. (1+x^2)^{-n} & ; & 4. e^{-x^2} & ; & 6. x^n \varphi(x) & , \end{array}$$

где $n \in \mathbf{N}_0$, $\varphi \in \mathcal{J}(\mathbf{R})$, принадлежат пространству $\mathcal{J}(\mathbf{R})$?

10.66. Функция $\varphi(x) \in \mathcal{J}$; сходятся ли в $\mathcal{J}$ последовательности:

$$1. \frac{1}{k} \varphi(x); \quad 2. \frac{1}{k} \varphi(kx); \quad 3. \frac{1}{k} \varphi\left(\frac{x}{k}\right)?$$

10.67. Обобщенной функцией f медленного роста называется всякий линейный непрерывный функционал (f, φ) на пространстве $\mathcal{J}$. Множество $\mathcal{J}' = \mathcal{J}'(\mathbf{R}^n)$ обобщенных функций медленного роста, на котором определена сходимости

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \in \mathcal{J}' \iff \forall \varphi(x) \in \mathcal{J} : \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k, \varphi) = (f, \varphi),$$

называется пространством обобщенных функций медленного роста. Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция, растущая на бесконечности не быстрее полинома. Показать, что функционал, действующий по правилу

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{J},$$

(он называется регулярной обобщенной функцией), принадлежит пространству $\mathcal{J}'$.

10.68. Определяют ли локально интегрируемые функции 1) e^x ; 2) $e^x \cos e^x$ функционал в $\mathcal{J}'(\mathbf{R})$?

10.69. В теории интегрального преобразования Меллина используется пространство $\mathcal{Z}_+$ основных функций (см. [19])

$$\psi(p) = \int_0^\infty \varphi(r) r^{p-1} dr, \quad \varphi(r) \in \mathcal{D}_+(\mathbf{R}), \quad p = \sigma + i\lambda,$$

где $\mathcal{D}_+(\mathbf{R})$ — множество функций $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, носитель которых $\text{supp } \varphi \subset [0, \infty)$. Последовательность $\{\psi_k\} \subset \mathcal{Z}_+$ называется сходящейся, если сходится последовательность прообразов $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}_+$. Доказать, что 1) $\psi(p)$ — целая функция; 2) при любом σ функция $\psi(\sigma + i\lambda) \in \mathcal{J}$ по переменной λ ; 3) если $\varphi_k(r) \rightarrow 0$ в $\mathcal{D}_+$, то при любом σ последовательность функций $\psi_k(\sigma + i\lambda) \rightarrow 0$ в $\mathcal{J}$.

10.70. Всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{Z}_+$ называется обобщенной функцией; множество таких функций обозначается символом $\mathcal{Z}'_+$. Пусть при любом σ функция $f(\sigma + i\lambda)$ локально интегрируема по $\lambda \in \mathbf{R}$ и растет не быстрее полинома по λ степени m . Показать, что функционал

$$(f(p), \psi(p)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} f(p) \psi(p) dp, \quad \psi(p) \in \mathcal{Z}_+,$$

называемый регулярной обобщенной функцией, принадлежит пространству $\mathcal{Z}'_+$.

10.2. Обобщенные функции в области

Пример 10.7. Пространством основных функций $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, где область $\Omega \in \mathbf{R}^n$, называется множество функций со следующими свойствами:

1. $\psi(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$;
2. $\forall \psi \exists r : \text{supp } \psi \subset \overline{\Omega} \cap B_r$;
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k = \psi \iff \begin{cases} \exists r \forall k : \text{supp } \psi_k \subset \overline{\Omega} \cap B_r, \\ \forall \alpha : D^\alpha \psi_k \xrightarrow{\overline{\Omega}} D^\alpha \psi, \quad k \rightarrow \infty. \end{cases}$

Если $\overline{\Omega} = [0, \infty)$, то при $x \geq 0$ функция $\omega_\varepsilon(x)$, определенная выражением (10.1), принадлежит пространству $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Если Ω — ограниченная область, то существует такое r , при котором $\overline{\Omega} \cap B_r = \overline{\Omega}$; в этом случае любая функция $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ (например, $\psi=1$) является элементом пространства $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Функция $f(x) \in L(\Omega)$ определяет регулярную обобщенную функцию

$$(f, \psi) = \int_{\Omega} f(x) \psi(x) dx, \quad \psi(x) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Примером сингулярной обобщенной функции служит $\delta(x - x_0)$:

$$(\delta(x - x_0), \psi(x)) = \psi(x_0), \quad \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}), \quad x_0 \in \overline{\Omega}.$$

Равенство нулю обобщенной функции в $\Omega_1 \subset \Omega$, сложение, умножение на $h(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ обобщенных функций в пространстве $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ определяется так же, как и в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Линейное множество обобщенных функций, в котором определена сходимость

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k \rightarrow f \iff \forall \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) : \lim_{k \rightarrow \infty} (f_k \psi) = (f, \psi),$$

называется пространством обобщенных функций $\mathcal{D}'(\overline{\Omega})$. Если $\Omega = (a, b)$ — ограниченный промежуток и $f(x) \in C^m(\overline{\Omega})$, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(m)}(x) \psi(x) dx &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k f^{(m-k-1)}(x) \psi^{(k)}(x) \Big|_a^b + \\ &+ (-1)^m \int_a^b f(x) \psi^{(m)}(x) dx, \end{aligned} \quad (10.22)$$

где $\psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Эта формула служит основой для определения производной обобщенной функции. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ и задано множество (свое для каждой f) чисел $A_k, B_k, k \in \mathbf{N}_0$. Обобщенной производной порядка m функции $f \in \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ называется функционал $f^{(m)}$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} (f^{(m)}, \psi) &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k (B_{m-k-1} \psi^{(k)}(b) - A_{m-k-1} \psi^{(k)}(a)) + \\ &+ (-1)^m (f, \psi^{(m)}). \end{aligned} \quad (10.23)$$

Определению (10.23) можно придать форму (10.22), если ввести обозначения $A_k = f^{(k)}(a), B_k = f^{(k)}(b)$:

$$\begin{aligned} (f^{(m)}, \psi) &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k f^{(m-k-1)}(x) \psi^{(k)}(x) \Big|_a^b + \\ &+ (-1)^m (f, \psi^{(m)}). \end{aligned} \quad (10.24)$$

Частные случаи. 1. Если $f(x)=\delta(x-x_0)$, $x_0 \in [a, b]$, числа $A_k=B_k=0$ для всех $k \in \mathbf{N}_0$, то по определению (10.23)

$$(D^m \delta(x-x_0), \psi(x)) = (-1)^m (\delta(x-x_0), \psi^{(m)}(x)) = (-1)^m \psi^{(m)}(x_0).$$

2. Пусть функция $f(x) \in C^m(a, b)$ и может быть непрерывно продолжена вместе с производными до $(m-1)$ -го порядка на промежуток $[a, b]$, т.е. существуют предельные значения производной $f^{(k)}(a+0)=f^{(k)}(a)$, $f^{(k)}(b-0)=f^{(k)}(b)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$. После интегрирования по частям интеграла $(f, \psi^{(m)})$ в соотношении (10.24) оно принимает форму $(f^{(m)}\psi) = (\{f^{(m)}\}, \psi)$, откуда $f^{(m)}(x) = \{f^{(m)}(x)\}$.

3. Функция $f(x)$ имеет на промежутке (a, b) кусочно-гладкие производные $f^{(k)}(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, и существуют конечные пределы $f^{(k)}(a+0)$, $f^{(k)}(b-0)$ (они, вообще говоря, не совпадают с числами $f^{(k)}(a)$, $f^{(k)}(b)$, задаваемыми произвольно). В этом случае обобщенная производная определяется выражением (10.24). Например, обобщенная производная функции $f(x)=x$, где $x \in (0, 1)$, $f(0)=1$, $f(1)=-1$ представляет собой функционал, действующий по правилу

$$\begin{aligned} (f', \psi) &= f(x)\psi(x)|_0^1 - (f, \psi') = f(1)\psi(1) - f(0)\psi(0) - (f, \psi') = \\ &= -\psi(1) - \psi(0) - \int_0^1 x\psi'(x) dx. \end{aligned}$$

Если $\Omega=(a, \infty)$, $-\infty < a < \infty$, то обобщенная производная функции $f \in \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$ представляет собой функционал

$$(f^{(m)}, \psi) = - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(m-k-1)}(a)\psi(a) + (-1)^m (f, \psi^{(m)}), \quad \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

где $f^{(m-k-1)}(a)$ — заданные числа.

10.71. Дана функция $f(x)$ класса $C^m(a, b)$, для которой существуют конечные пределы $f^{(k)}(a+0)$, $f^{(k)}(b-0)$ и заданы числа $f^{(k)}(a)$, $f^{(k)}(b)$, где $k = 0, 1, \dots, m-1$. Показать, что обобщенная производная

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \{f^{(m)}(x)\} + \\ &+ \sum_{k=0}^{m-1} [f^{(m-k-1)}]_a \delta^{(k)}(x-a) + [f^{(m-k-1)}]_b \delta^{(k)}(x-b), \quad (10.25) \end{aligned}$$

где $[f^{(k)}]_a = f^{(k)}(a+0) - f^{(k)}(a)$, $[f^{(k)}]_b = f^{(k)}(b) - f^{(k)}(b-0)$.

10.72. Найти обобщенные производные 2-го порядка функции $f(x)$, где $x \in (a, b)$, при условии $f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0$, если

1. $f(x) = 1$, $a = 0$, $b = 1$;
2. $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$;
3. $f(x) = |x|$, $a = -1$, $b = 1$;
4. $f(x) = |\cos x|$, $a = 0$, $b = \pi$.

10.73. Вычислить обобщенные производные 2-го порядка функции $f(x)$, где $x \in (a, b)$, если

1. $f(x) = x$, $a = 0$, $b = 1$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$,
 $f(1) = -1$, $f'(1) = -1$;
2. $f(x) = x^2$, $a = 0$, $b = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$,
 $f'(0) = 2$, $f'(1) = 2$.
3. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $a = -1$, $b = 1$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0$,
 $f'(0) = 2$, $f'(1) = 2$.

10.74. Дан линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{\rho(x)} [\operatorname{div}(p(x) \operatorname{grad}) - q(x)], \quad (10.26)$$

$$\begin{aligned} p(x) &\in C^1(\overline{\Omega}), & p(x) &\geq \delta > 0, & \Omega &= (a, b), \\ q(x) &\in C(\overline{\Omega}), & q(x) &\geq 0, & -\infty &< a < b < \infty. \\ \rho(x) &\in C(\overline{\Omega}), & \rho(x) &\geq \delta > 0, \end{aligned}$$

Доказать, что если

1) $f(x) \in \mathcal{D}'(\overline{\Omega})$, то

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) : (\rho \mathcal{L} f, \psi) = (f, \rho \mathcal{L} \psi) + p(f\psi' - f'\psi)|_a^b; \quad (10.27)$$

2) $f(x) \in C^2(\overline{\Omega})$, заданы числа $f(a)$, $f'(a)$, $f(b)$, $f'(b)$ и существуют конечные пределы $f(x)$ при $x \rightarrow a+0$, $x \rightarrow b-0$, то

$$\begin{aligned} \rho \mathcal{L} f = \{\rho \mathcal{L} f\} &- p(a) ([f]_a \delta'(x-a) + [f']_a \delta(x-a)) - \\ &- p(b) ([f]_b \delta'(x-b) + [f']_b \delta(x-b)). \end{aligned} \quad (10.28)$$

10.75. Оператор $\mathcal{L}$, определенный выражением (10.26), встречается во многих задачах математической физики, одна из которых имеет вид

$$\begin{aligned}\rho u_t &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t), & 0 < x < l, & \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= \mu(t), & u(l, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}\tag{10.29}$$

Здесь F , μ , u_0 заданы, а $u(x, t)$ — неизвестная функция. Построение решения $u(x, t)$ упрощается, если $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Доказать, что задача (10.29) эквивалентна следующей

$$\begin{aligned}\rho u_t &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t) - p(0)\mu(t)\delta'(x), \\ 0 < x < l, & \quad 0 < t, \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x).\end{aligned}\tag{10.30}$$

10.76. Доказать, что задачи 1 и 2 эквивалентны:

1. $\rho u_t = -\rho \mathcal{L}u + F, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$
 $u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0;$
2. $\rho u_t = -\rho \mathcal{L}u + F - p(0)\mu(t)\delta(x), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$
 $u_x(0, t) = u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$

10.77. Установить эквивалентность задач 1 и 2:

1. $\rho u_t = -\rho \mathcal{L}u + F, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t,$
 $\alpha u(0, t) - \beta u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$
2. $\rho u_t = -\rho \mathcal{L}u + F - p(0)[A(t)\delta'(x) + B(t)\delta(x)],$
 $0 < x < l, \quad 0 < t,$
 $\alpha u(0, t) - \beta u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0,$

где $A(t)$ и $B(t)$ связаны условием: $\alpha A(t) - \beta B(t) = \mu(t)$.

10.78. Оператор (10.26), определенный на множестве $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ функций $X(x)$ класса $C^2[a, b]$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned}\alpha_1 X(a) - \beta_1 X'(a) &= 0, \\ \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) &= 0,\end{aligned}\tag{10.31}$$

где

$$\alpha_i \geq 0, \quad \beta_i \geq 0, \quad \alpha_i + \beta_i > 0, \quad i = 1, 2,\tag{10.32}$$

эрмитов (см.[14]), т.е.

$$\forall X, Y \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} : (\rho \mathcal{L} Y, X) = (Y, \rho \mathcal{L} X). \quad (10.33)$$

Пусть $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$ — множество функций $f(x) \in \mathcal{D}'[a, b]$ и чисел $f^{(k)}(a)$, $f^{(k)}(b)$, $k=0, 1$, связанных соотношениями (10.31). Доказать, что

$$\forall f \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0 \quad \forall X \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} : (f, \rho \mathcal{L} X) = (\rho \mathcal{L} f, X). \quad (10.34)$$

10.79. Задача

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \quad 0 < x < l, \\ \alpha_1 X(0) - \beta_1 X'(0) &= 0, \\ \alpha_2 X(l) + \beta_2 X'(l) &= 0, \end{aligned} \quad (10.35)$$

где числа α_i , β_i , $i=1, 2$ удовлетворяют условиям (10.32), имеет нетривиальные решения при определенных значениях $\lambda \geq 0$. Пусть $\beta_1 = \beta_2 = 0$, а $X(x)$ — одно из таких решений. Вычислить интеграл $\int_0^l f(x) X(x) dx$ для следующих функций $f(x)$:

$$1. x(l-x); \quad 2. \frac{l}{2} - \left| \frac{l}{2} - x \right|; \quad 3. \left| 1 - \frac{2x}{l} \right|; \quad 4. e^{\alpha x}; \quad 5. \sin \alpha x, \quad \alpha^2 \neq \lambda.$$

10.80. Вычислить $\int_0^l (ax^2 + bx + c) X(x) dx$, где $X(x)$ — нетривиальное решение задачи (10.35) при $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = h$.

10.81. Пусть $X(x)$ — нетривиальное решение задачи

$$\begin{aligned} X'' + \lambda \rho(x) X &= 0, \quad 0 < x < l, \\ X'(0) = X(l) &= 0, \end{aligned}$$

где $\rho(x) \in C[0, l]$, $\rho(x) \geq \delta > 0$. Найти $\int_0^l f(x) X(x) \rho(x) dx$, если

$$1. f(x) = ax + b; \quad 2. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 < x < \frac{l}{2}, \\ \frac{l-x}{l}, & \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

10.82. Функция $X(x)$, удовлетворяющая условиям (10.31), является нетривиальным решением уравнения $\mathcal{L}X = \lambda X$ при $\lambda \neq 0$, где $\mathcal{L}$ — оператор, определенный соотношением (10.26), а функция $f(x)$ — решение уравнения $\mathcal{L}f = A \delta(x - x_0)$, $x_0 \in [a, b]$ при тех же граничных условиях. Вычислить $(\rho X, f)$.

10.83. Оператор (10.26) определен на множестве $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ функций $X(x)$ класса $C^2[a, b]$, удовлетворяющих условиям (10.31). Числа λ , при которых задача $\mathcal{L}X = \lambda X$, $X \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями оператора, а соответствующие нетривиальные решения — его собственными функциями. Собственные функции $X_1, X_2, \dots$ ортогональны на отрезке $[a, b]$ с весом $\rho(x)$

$$\int_a^b X_m X_n \rho dx = \|X_n\|^2 \delta_{mn}$$

и образуют полную систему на множестве $L_2[a, b]$. Доказать, что

$$\delta(x - x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(x_0)X_k(x)}{\|X_k\|^2}, \quad \begin{array}{ll} x_0 \in [a, b], & X_n(a) \neq 0, \\ x_0 \in (a, b], & X_n(b) \neq 0. \end{array}$$

10.84. Вычислить обобщенные производные 1-го и 2-го порядков функции $f(x)$, $x \in (a, \infty)$, если

1. $f(x) = \eta(1 - x)$, $a = 0$, $f(a) = 0$, $f'(0) = 1$;
2. $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $f(1) = -1$, $f'(1) = 0$.

10.85. Пусть $x = x(\xi)$ — биективное бесконечно дифференцируемое отображение $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, абсолютная величина якобиана которого $I(\xi)$. Показать, что на основании свойств регулярных обобщенных функций можно построить функционал $\delta(x(\xi) - x(\xi_0))$ (δ — функция в координатах $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$), который при $I(\xi_0) \neq 0$ определяется соотношением

$$\delta(x(\xi) - x(\xi_0)) = \frac{1}{I(\xi)} \delta(\xi - \xi_0) \quad (10.36)$$

и действует по правилу

$$(\delta(x - x_0), \varphi(x)) = (\delta(\xi - \xi_0), \varphi(x(\xi))).$$

10.86. Записать функционал $\delta(x - x_0)$, $x_0 \neq 0$ 1) в полярных координатах (в $\mathbf{R}^2$); 2) в цилиндрических координатах (в $\mathbf{R}^3$); 3) в сферических координатах (в $\mathbf{R}^3$).

10.87. По тонкому кольцу, радиус которого r_0 , течет ток J . Записать плотность тока в сферической системе координат.

10.88. Используя свойства регулярных обобщенных функций, показать, что можно определить сферически симметричную функцию $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ в сферических координатах как функционал

$$f(x) = \frac{f(r)}{|S_r|}, \quad f(r) \in \mathcal{D}'(\overline{\mathbf{R}}_+),$$

действующий по правилу

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}}_+) : (f(x), \varphi(r(x))) = (f(r), \varphi(r)),$$

или в интегральной форме

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \int_0^\infty f(r) \varphi(r) dr.$$

10.89. Точечный заряд Q находится в начале координат пространства $\mathbf{R}^3$; записать плотность заряда 1) в сферических координатах; 2) в цилиндрических координатах.

10.90. Масса m расположена в точке $z_0 \neq 0$ оси $0z$ пространства $\mathbf{R}^3$. Записать плотность массы 1) в сферических координатах; 2) в цилиндрических координатах.

10.91. Ток J втекает в проводящий шар $(x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2)$ через точку, декартовы координаты которой $(0, 0, -r_0)$, и вытекает через точку $(0, 0, r_0)$. Записать нормальную компоненту плотности тока через поверхность шара в сферических координатах.

10.92. В точке $z_0 \neq 0$ оси $0z$ пространства $\mathbf{R}^3$ расположен диполь с моментом $\mathbf{p} = p \mathbf{e}_z$. Записать плотность заряда диполя в сферических координатах.

10.93. Функция $h(\omega) \in C(S_1)$ определяет функционал

$$(h(\omega), \varphi(r, \omega)) = \int_{S_r} h(\omega) \varphi(r, \omega) ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

Показать, что

1) прямое произведение

$$(h(\omega) \cdot D^m \delta(r - r_0), \varphi) = (h(\omega), (D^m \delta(r - r_0), \varphi)),$$

где $\delta(r - r_0) \in \mathcal{D}'(\overline{\mathbf{R}}_+)$, коммутативно;

2) функционалы (10.18), (10.19) имеют вид

$$h\delta_S = h(\omega) \cdot \delta(r - r_0); \quad \frac{\partial}{\partial r}(h\delta_S) = h(\omega) \cdot \delta'(r - r_0).$$

10.94. Пусть $h(\omega) \in C(S_1)$, $\delta(r - r_0) \in \mathcal{D}'(\overline{\mathbf{R}}_+)$, $\{\psi_k\}_1^\infty$ — полная ортонормированная система функций в $L_2(S_1)$. Доказать, что

$$h(\omega) \cdot D^m \delta(r - r_0) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \psi_k(\omega) \cdot D^m \delta(r - r_0),$$

где $h_k = \int_{S_1} h(\omega) \psi_k(\omega) ds$ — коэффициент Фурье функции $h(\omega)$.

10.95. На сфере $S \subset \mathbf{R}^3$, радиус которой r_0 , распределен заряд с плотностью $\sigma(\theta, \varphi)$. Записать пространственную плотность заряда в сферических координатах.

10.96. Непроводящая сфера $S \subset \mathbf{R}^3$, на которой распределен заряд с постоянной плотностью σ , вращается с угловой скоростью ω относительно своего диаметра. Записать плотность тока в сферических координатах, если радиус сферы r_0 .

10.97. На сфере $S \subset \mathbf{R}^3$, радиус которой r_0 , расположены диполи; диполи направлены по радиусу, их плотность момента $p(\theta, \varphi)$. Записать плотность заряда в сферических координатах.

10.98. На поверхности круглого цилиндра 1) находится заряд, плотность которого $\sigma(\varphi)$; 2) расположены диполи, ориентированные по радиусу, плотность момента которых $p(\varphi)$. Записать пространственную плотность заряда в цилиндрических координатах, если радиус цилиндра r_0 .

10.99. Тонкое заряженное кольцо, радиус которого r_0 , расположено в плоскости $z=0$, центр кольца находится в начале координат. Записать пространственную плотность заряда в сферических координатах, если линейная плотность заряда кольца $q(\varphi)$.

10.100. На круглую мембрану, радиус которой r_0 , действует поперечная сила, распределенная по диаметру с линейной плотностью $p(r)$. Записать силу, действующую на единицу площади мембраны, в полярных координатах.

10.101. На тонком диске, радиус которого r_0 , распределен заряд с плотностью $\sigma(r, \varphi)$. Какова пространственная плотность заряда в сферических координатах?

10.102. На отрезке $[-l, l]$ оси $0z$ пространства $\mathbf{R}^3$ находится тонкий стержень, линейная плотность массы которого $\rho(z)$. Записать пространственную плотность массы 1) в декартовых координатах; 2) в цилиндрических координатах; 3) в сферических координатах.

10.103. Виток с током эквивалентен магнитному диполю. Какова плотность тока в витке, эквивалентном точечному магнитному диполю с моментом $\mathbf{M}$? Ответ дать в сферических координатах.

Пример 10.8. Для оператора (10.26), определенного на функциях класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, где Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей S , справедлива 2-я формула Грина

$$\int_{\Omega} \rho \mathcal{L} u v dx - \int_{\Omega} \rho \mathcal{L} v u dx = \int_S p \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (10.37)$$

На этой формуле основано определение обобщенного оператора. Пусть $f \in \mathcal{D}'(\bar{\Omega})$, $A_0(x)$ и $A_1(x)$ — непрерывные на S функции; обобщенным оператором $\rho \mathcal{L}$ на функциях f называется функционал, действующий по правилу

$$(\rho \mathcal{L} f, \psi) = (f, \rho \mathcal{L} \psi) + \int_S p \left(A_0 \frac{\partial \psi}{\partial n} - A_1 \psi \right) ds, \quad (10.38)$$

где $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Это определение можно записать в форме (10.37), если обозначить $A_0(x) = f|_S$, $A_1(x) = \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S$:

$$(\rho \mathcal{L} f, \psi) = (f, \rho \mathcal{L} \psi) + \int_S p \left(f|_S \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S \psi \right) ds. \quad (10.39)$$

Частный случай. Функция $f(x) \in C^2(\Omega)$ и существуют непрерывные продолжения f и Df на $\bar{\Omega}$ (предельные значения $f|_{S-}$ и $\frac{\partial f}{\partial n} \Big|_{S-}$ (см.(10.20)) не обязательно совпадают с $f|_S$ и $\frac{\partial f}{\partial n} \Big|_S$, так как последние две функции могут быть заданы произвольно). Преобразование

интеграла $(f, \rho \mathcal{L}\psi)$ в соотношении (10.39) с помощью формулы Грина (10.37) приводит к следующему результату

$$(\rho \mathcal{L}f, \psi) = \left(\{\rho \mathcal{L}f\} - \frac{\partial}{\partial n} (p[f]_S \delta_S) - p \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S, \psi \right),$$

где $[f]_S = f|_S - f|_{S^-}$ и т.д. Из полученного равенства (оно справедливо при любой $\psi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$) следует, что

$$\rho \mathcal{L}f = \{\rho \mathcal{L}f\} - \frac{\partial}{\partial n} (p[f]_S \delta_S) - p \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S \delta_S.$$

10.104. Дана функция $f(x) \in C^2(B)$, где $B \subset \mathbf{R}^n$ — шар, радиус которого r_0 , существуют непрерывные продолжения f и Df на $\bar{B} = B \cup S$, на сфере S определены функции $A_0(x) = f|_S$ и $A_1(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S$ класса C . Доказать, что обобщенный оператор Лапласа

$$\Delta f = \{\Delta f\} + [f]_S \cdot \delta'(r - r_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial r} \right]_S \cdot \delta(r - r_0). \quad (10.40)$$

10.105. Функция f определена в круге $B \in \mathbf{R}^2$, радиус которого r_0 , $f|_S = 0$, $\left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S = 0$, где $S = \partial B$; вычислить обобщенный оператор Лапласа Δf , если

$$1. f = r^2; \quad 2. f = r^n \sin n\varphi, \quad n \in \mathbf{N}; \quad 3. f = \ln r.$$

10.106. Функция f определена в шаре $B \in \mathbf{R}^3$, радиус которого r_0 , $f|_S = 0$, $\left[\frac{\partial f}{\partial n} \right]_S = 0$, где $S = \partial B$. Вычислить обобщенный оператор Лапласа Δf , если

$$1. f = 1; \quad 2. f = r_0^2 - r^2; \quad 3. f = r \sin \theta \cos \varphi; \quad 4. f = \frac{1}{r}; \quad 5. f = r.$$

10.107. В шаре $B \in \mathbf{R}^3$, радиус которого r_0 , заданы функции

$$\begin{aligned} 1. f(r) &= r, \quad f|_{r_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial r} \right]_{r_0} = 1; \\ 2. f(r) &= \frac{1}{r}, \quad f|_{r_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial r} \right]_{r_0} = -\frac{1}{r_0^2}. \end{aligned}$$

Вычислить обобщенный оператор Лапласа Δf .

10.108. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей S , $H = \{x, t : x \in \Omega, 0 < t\}$; доказать, что в H задачи а) и б) для функции $u(x, t)$ эквивалентны:

$$\begin{aligned} 1. \text{ а) } \quad \rho u_{tt} &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t), \\ u|_S &= \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \text{ б) } \quad \rho u_{tt} &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t) + \frac{\partial}{\partial n}(p\mu\delta_S), \\ u|_S &= 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ а) } \quad \rho u_{tt} &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t), \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S &= \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ б) } \quad \rho u_{tt} &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t) + p\mu\delta_S, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S &= 0, \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ а) } \quad \rho u_{tt} &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t), \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S &= \mu(x, t), \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ б) } \quad \rho u_{tt} &= -\rho \mathcal{L}u + F(x, t) + \frac{\partial}{\partial n}(pA\delta_S) + pB\delta_S, \\ \left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S &= 0, \quad u(x, 0) = u_t(0) = 0 \end{aligned}$$

при условии $\alpha A(x, t) + \beta B(x, t) = \mu(x, t)$.

10.109. Дана ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с кусочно-гладкой границей S ; на S заданы функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, такие, что

$$\alpha \in C(S), \quad \beta \in C(S), \quad \alpha \geq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta > 0. \quad (10.41)$$

Оператор $\mathcal{L}$ (10.26), определенный на множестве $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ функций $u(x, t)$ класса $C^2(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условию

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_S = 0, \quad (10.42)$$

эрмитов (см. [14]), т.е.

$$\forall u, v \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} : (\rho \mathcal{L} v, u) = (v, \rho \mathcal{L} u). \quad (10.43)$$

Пусть $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0$ — множество функций $f(x) \in D'(\overline{\Omega})$ и непрерывных на S функций $f|_S$ и $\frac{\partial f}{\partial n}\Big|_S$, связанных условием (10.42). Доказать, что

$$\forall f \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}^0 \quad \forall u \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}} : (f, \rho \mathcal{L} u) = (\rho \mathcal{L} f, u). \quad (10.44)$$

10.110. Существуют положительные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, которым соответствуют нетривиальные сферически-симметричные решения $u_1, u_2, \dots$ задачи

$$\begin{aligned} \Delta u(x) + \lambda u(x) &= 0, \quad x \in B, \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial r})\Big|_S &= 0, \quad r = |x|, \end{aligned} \quad (10.45)$$

где $B \subset \mathbf{R}^3$ — шар, радиус которого r_0 , $S = \partial B$, функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ удовлетворяют условиям (10.41). При $\beta=0$ вычислить интеграл $\int_B f(x) u_n(x) dx$, если 1) $f=1 - \frac{r^2}{r_0^2}$; 2) $f = \frac{1}{r}$; 3. $f = r$.

10.111. Функция u_n — нетривиальное сферически симметричное решение задачи (10.45), соответствующее значению $\lambda_n > 0$. При $\alpha=0$ вычислить интеграл $I_n = \int_B (r - r_0)^2 u_n dx$.

10.112. Вычислить интеграл $I_n = \int_B (1 - \frac{r_0}{r}) u_n dx$, где $u_n(x)$ — нетривиальное сферически симметричное решение задачи (10.45) при постоянных значениях $\alpha=h$, $\beta=1$.

10.113. Пусть $B \subset \mathbf{R}^2$ — круг, радиус которого r_0 , $S = \partial B$. Функция $f(x)$ класса $C^2(B \setminus \{x_0\}) \cap C^1(\overline{B} \setminus \{x_0\})$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$\Delta f(x) = -a \delta(x - x_0)$, $x \in B$, $x_0 \in B$, и граничным условиям (10.42), а функция $u(x) \in C^2(B) \cup C^1(\overline{B})$ — нетривиальное решение уравнения $\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0$, $x \in B$, $\lambda > 0$, удовлетворяющее тому же граничному условию. Вычислить интеграл $\int_B f(x) u(x) dx$.

10.114. При построении интегрального преобразования Ганкеля (см. [19]) с ядром $r J_n(r)$, $n \in \mathbf{N}_0$, вводится пространство $\mathcal{H}_n$ основных функций

$$\psi(\lambda) = \int_0^\infty \varphi(r) J_n(\lambda r) r dr, \quad \varphi(r) \in \mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}}_+).$$

Последовательность $\{\psi_k(\lambda)\} \subset \mathcal{H}_n$ называется сходящейся, если сходится последовательность $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\overline{\mathbf{R}}_+)$. Доказать, что

$$\psi(\lambda) \in C^\infty(\overline{\mathbf{R}}_+), \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \psi(\lambda) = 0.$$

10.115. Всякий линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{H}_n$ называется обобщенной функцией, множество которых обозначается символом $\mathcal{H}'_n$. Пусть $f(r)$ — локально интегрируемая функция на $(0, \infty)$ и

$$\int_0^\infty |f| \sqrt{r} dr < \infty.$$

Доказать, что функционал f , заданный соотношением

$$(f(r), r\psi(r)) = \int_0^\infty f(r) \psi(r) r dr, \quad \psi(r) \in \mathcal{H}_n,$$

принадлежит пространству $\mathcal{H}'_n$.

10.116. Доказать, что функционал $\frac{1}{r}\delta(r-r_0)$, действующий по правилу

$$\left(\frac{1}{r} \delta(r-r_0), r\psi(r) \right) = \psi(r_0), \quad \psi \in \mathcal{H}_n, \quad r_0 \geq 0,$$

принадлежит пространству $\mathcal{H}'_n$.

10.3. Ответы

10.1. 1. $[0, \infty)$; 2. $(-\infty, \infty)$; 3. $[-a, 0]$ при $a \leq 1$, $[-a, 0] \cup [1, a]$ при $a > 1$.

10.2. $\text{supp } \varphi = \{x: |x_j| \leq \varepsilon_j, j = \overline{1, n}\}$. **10.3.** $h(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. **10.7.** Нет.

10.8. Сходятся к 1. $h(x) \varphi(x)$; 2. $\varphi(Ax + b)$.

10.11. 1. $(f, \varphi) = \int_{-\infty}^\infty \varphi dx$; 2. $(\eta, \varphi) = \int_0^\infty \varphi dx$;

3. $(h, \varphi) = \int_0^\pi \sin x \varphi(x) dx$.

10.12. Решение. Линейность: по определению δ -функции

$$(\delta, \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2) = \mu_1 \varphi_1(0) + \mu_2 \varphi_2(0) = \mu_1(\delta, \varphi_1) + \mu_2(\delta, \varphi_2).$$

Непрерывность: при $k \rightarrow \infty$.

$$(\delta, \varphi_k) = \varphi_k(0) \rightarrow \varphi(0) = (\delta, \varphi).$$

Сингулярность: если бы существовала такая локально интегрируемая в пространстве $\mathbf{R}^n$ функция $f(x)$, что $\int f(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$, то для $\varphi(x) = \omega_\varepsilon(x)$,

где ε достаточно мало,

$$\omega_\varepsilon(0) = \left| \int f(x) \omega_\varepsilon(x) dx \right| \leq \omega_\varepsilon(0) \int_{B_\varepsilon} |f| dx < \omega_\varepsilon(0);$$

второе неравенство — следствие локальной интегрируемости: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B_\varepsilon} |f| dx = 0$.

10.13. Решение. Линейность вытекает из линейности интеграла. Непрерывность: пусть $\varphi_k \rightarrow \varphi$, $\text{supp } \varphi_k \subset B_r$, тогда при $k \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |(\mathcal{P}_x \frac{1}{x}, \varphi_k) - (\mathcal{P}_x \frac{1}{x}, \varphi)| &= \left| \int_0^r \frac{\varphi_k(x) - \varphi(x) - (\varphi_k(-x) - \varphi(-x))}{x} dx \right| = \\ &= \left| \int_0^r \frac{\varphi'_k(\tilde{x}) - \varphi'(\tilde{x})}{x} 2x dx \right| \leq 2r \max_{B_r} |\varphi'_k - \varphi'| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Сингулярность: пусть $\varphi(x) = x \omega_\varepsilon(x)$, тогда $(\mathcal{P}_x \frac{1}{x}, x \omega_\varepsilon(x)) = \int \omega_\varepsilon(x) dx = 1$; если бы $\mathcal{P}_x \frac{1}{x} = f(x)$ была локально интегрируемой в $\mathbf{R}$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. решение предыдущей задачи)

$$\left| \int f(x) x \omega_\varepsilon(x) dx \right| \leq \varepsilon \omega_\varepsilon(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)| dx = \omega_1(0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f(x)| dx \rightarrow 0.$$

10.14. 1. $(-\infty, \infty)$; 2. $[0, \infty)$; 3. $[0, \pi]$; 4. $\{0\}$. **10.15.** Указание. $(\tilde{\delta}, \psi) = (\delta, \varphi)$, где $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\psi^{(k)}(0) = \varphi^{(k)}(0)$, $k = 0, 1, \dots, m$.

10.23. Указание. Воспользоваться последовательностью (10.2) и определением (10.12). **10.27.** Сходятся к нулю. **10.33.** Доказательство. Так как функционал линеен, то

$$\Delta h = h(y + \Delta y) - h(y) = (f, \Delta \varphi).$$

Из непрерывности функционала следует, что

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta h = (f, \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta \varphi) = (f, 0) = 0.$$

Таким образом, $h \in C(\mathbf{R}^n)$. Аналогично проводится доказательство существования производных.

10.35. $\frac{\omega_0 \sin \omega t - \omega \sin \omega_0 t}{\omega_0^2 - \omega^2}$, $\omega \neq \omega_0$, $\frac{1}{2\omega} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$, $\omega = \omega_0$.

10.39. Сходятся к нулю. **10.40.** Если $f_k \rightarrow \delta(x)$ (см. пример 10.3 и задачу 10.26), то $f_k^{(m)} \rightarrow \delta^{(m)}$. **10.43** 1. $\sum_{k=0}^m C_m^k D^k \delta(x)$;

2. $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^{k+1} C_m^{2k+1} D^{m-2k-1} \delta(x)$, $\sum_0^{-1} = 0$; 3. $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^k C_m^{2k} D^{m-2k} \delta(x)$.

10.44. Доказательство. Если $\{x'_l\}$ — точки разрыва $f'(x)$, то

$$\begin{aligned} (f', \varphi) &= -(f, \varphi') = - \int_{-\infty}^{\infty} f \varphi' dx = - \sum_l \int_{x'_l}^{x'_{l+1}} f \varphi' dx = \\ &= - \sum_l \left(f \varphi \Big|_{x'_l}^{x'_{l+1}} - \int_{x'_l}^{x'_{l+1}} \{f'\} \varphi dx \right) = \sum_l [f]_{x'_l} \varphi(x'_l) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'\} \varphi dx = \\ &= (\{f'\} + \sum_l [f]_{x'_l} \delta(x - x'_l), \varphi). \end{aligned}$$

Если x'_l не есть точка разрыва $f(x)$, то $[f]_{x'_l} = 0$. В проделанной выкладке сумма конечна, так как φ — финитна.

- 10.46.** 1. $\delta(x)$, $\delta'(x)$; 2. $\eta(x)$, $\delta(x)$;
 3. $-e^{-x}\eta(x) + \delta(x)$, $e^{-x}\eta(x) - \delta(x) + \delta'(x)$;
 4. $2\delta(x)$, $2\delta'(x)$; 5. $\cos x \operatorname{sign} x$, $-\sin|x| + 2\delta(x)$,
 6. $-\sin|x| + 2\delta(x)$, $-\cos x \operatorname{sign} x + 2\delta'(x)$;
 7. $-\operatorname{sign} x + 2\delta(x)$, $-2\delta(x) + 2\delta'(x)$;
 8. $f'(x) = -2x + (2x+1)\eta(x) - \delta(x)$, $f''(x) = -2 + 2\eta(x) + \delta(x) - \delta'(x)$.
10.47. 1. $\eta(x) D^m h(x) + \sum_{k=0}^{m-1} D^k h(0) D^{m-k-1} \delta(x)$; 2. Если $m > n$, то $n! D^{m-n-1} \delta(x)$, если $m \leq n$, то $\frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m} \eta(x)$.
10.48. $f'(|x| \operatorname{sign} x$, $f''(|x|) + 2f'(0) \delta(x)$.
10.49. 1. $\operatorname{sign} x$, $2\delta(x)$; 2. $-e^{-|x|} \operatorname{sign} x$, $e^{-|x|} - 2\delta(x)$;
 3. $\cos 2x \operatorname{sign} x$, $-2\sin 2|x| + 2\delta(x)$;
 4. $(\cos x - x \sin x) \operatorname{sign} x$, $-2\sin|x| - |x| \cos x + 2\delta(x)$;
 5. $\sin|x| + |x| \cos x$, $(2\cos x - x \sin x) \operatorname{sign} x$;
 6. $(1 - |x|) e^{-|x|} \operatorname{sign} x$, $(|x| - 2) e^{-|x|} + 2\delta'(x)$.
10.50. 1. $2 \sum_k \operatorname{sign} f'(x_k) \delta(x - x_k)$, где $\{x_k\}$ — множество нулей $f(x)$;
 2. $f'(x) \operatorname{sign} f(x)$, $f''(x) \operatorname{sign} f(x) + 2 \sum_k |f'(x_k)| \delta(x - x_k)$.
10.51. 1. $2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \delta(x - \pi k)$; 2. $2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} \delta(x - \frac{2k+1}{2} \pi)$.
10.52. 1) $\operatorname{sign}(x+1)$, $2\delta(x+1)$;
 2) $2x \operatorname{sign}(x^2 - 1)$, $2 \operatorname{sign}(x^2 - 1) + 4\delta(x+1) + 4\delta(x-1)$;
 3) $\cos x \operatorname{sign}(\sin x)$, $-|\sin x| + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi k)$;
 4) $-\sin x \operatorname{sign}(\cos x)$, $-|\cos x| + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - \frac{2k+1}{2} \pi)$.
10.53. 1. $(-1)^m \delta(x)$; 2. $a^m \delta^{m-1}(ax+b)$. **10.54.** $(-1)^m D^m \delta(x)$. **10.55.** $\mathcal{P} \frac{1}{x}$.
10.58. $-p \delta'(x)$.

Решение. Чтобы получить точечный диполь нужно устремить к нулю расстояние Δx между зарядами $-q$ и q в конечном диполе при условии постоянства произведения $q\Delta x = p$, где p — дипольный момент. Плотность $\rho(x)$ является пределом плотности заряда конечного диполя, образованного зарядами $-q$ и q в точках $x = 0$ и Δx соответственно:

$$\rho(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [q \delta(x - \Delta x) - q \delta(x)]$$

при условии $q\Delta x = p$. По определению сходимости в $\mathcal{D}'$ при $\Delta x \rightarrow 0$ $(q \delta(x - \Delta x) - q \delta(x), \varphi(x)) = q(\varphi(\Delta x) - \varphi(0)) = p \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \rightarrow p \varphi'(0) = (-p \delta'(x), \varphi(x))$.

10.59. $-p \frac{\partial \delta(x-x_0)}{\partial l}$. **10.60.** $-p \delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \delta'(z - z_0)$.

10.61. $-\frac{p}{\sqrt{2}} (\delta'(x) \cdot \delta(y - y_0) + \delta(x) \cdot \delta'(y - y_0))$. **10.62.** Доказательство для $n=2$. Для функции $\varphi \in \mathcal{D}$, $\operatorname{supp} \varphi \subset B_r$ применимо представление (см. [14])

$$2\pi \varphi(x_0) = \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial}{\partial n} \varphi(x) \ln \frac{1}{|x-x_0|} - \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{|x-x_0|} \right) ds -$$

$$- \int_{B_r} \Delta \varphi(x) \ln \frac{1}{|x-x_0|} dx,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль, согласно которому

$$2\pi\varphi(x_0) = - \int_{B_r} \Delta\varphi \ln \frac{1}{|x-x_0|} dx = - \int \Delta\varphi \ln \frac{1}{|x-x_0|} dx.$$

По определению обобщенной производной

$$\begin{aligned} \left(\Delta \ln \frac{1}{|x-x_0|}, \varphi(x) \right) &= \left(\ln \frac{1}{|x-x_0|}, \Delta\varphi(x) \right) = \\ &= \int \Delta\varphi(x) \ln \frac{1}{|x-x_0|} dx = -2\pi\varphi(x_0) = (-2\pi\delta(x-x_0), \varphi(x)). \end{aligned}$$

10.63. $\sigma\delta_S$. **10.64.** $-\frac{\partial}{\partial n}(\mu\delta_S)$. **10.65.** 4; 5; 6. **10.66.** 1; 3.

10.68. 1. Нет. 2. да.

10.71. Указание. Применить (10.24).

10.72. 1) $\delta'(x) - \delta'(x-1)$; 2) $-\sin x + \delta(x) + \delta(x-\pi)$;
3) $2\delta(x) - \delta(x-1) - \delta(x+1) - \delta'(x-1) + \delta'(x+1)$;
4) $-|\cos x| + 2\delta(x - \frac{\pi}{2}) + \delta'(x) - \delta'(x-\pi)$.

10.73. 1) $\delta(x) - 2\delta(x-1) - \delta'(x) - 2\delta'(x-1)$; 2) $2 - 2\delta(x) - \delta'(x-1)$;
3) $2\delta(x-1) - 2\delta(x+1) + 2\delta'(x) - \delta'(x-1) - \delta'(x+1)$.

10.75. Доказательство. Пусть

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ u(x, t), & 0 < x \leq l, \end{cases} \quad \tilde{u}_x(x, t) = u_x(x, t),$$

где $u(x, t)$ — решение задачи 10.22. В соответствии с (10.28)

$$\rho\mathcal{L}\tilde{u} = \{\rho\mathcal{L}\tilde{u}\} - p(0)[\tilde{u}]_{x=0}\delta'(x) = \{\rho\mathcal{L}u\} - p(0)\mu(t)\delta'(x)$$

(там, где $\{\tilde{u}_{xx}\}$ существует, она совпадает с $\{u_x\}$, а $\tilde{u}_{tt} = u_{tt}$.) Следовательно, подстановка u_{tt} и $\{\rho\mathcal{L}u\}$ в исходное уравнение преобразует его к виду

$$\rho\tilde{u}_{tt} = -\rho\mathcal{L}\tilde{u} + F - p(0)\mu(t)\delta'(x)$$

при этом $\tilde{u}(0, t) = \tilde{u}(l, t) = \tilde{u}_x(0, t) = 0$. Если $\tilde{u}(x, t)$ — решение задачи 10.23, то из уравнения вытекает, что $[\tilde{u}]_{x=0} = \mu(t)$, т.е., $\tilde{u}(+0, t) - \tilde{u}(0, t) = \mu(t)$, следовательно, $\tilde{u}(+0, t) = \mu(t)$. Так как $\delta'(x) = 0$ при $x \in (0; l]$, то функция $\tilde{u}(x, t)$ удовлетворяет всем условиям задачи 10.22.

10.77. Указание. Ввести функцию

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= u(x, t), & \tilde{u}_x(x, t) &= u_x(x, t), & 0 < x \leq l, \\ \tilde{u}(0, t) &= u(0, t) - A(t), & \tilde{u}_x(0, t) &= u_x(0, t) - B(t), \end{aligned}$$

где $\alpha A(t) - \beta B(t) = \mu(t)$. **10.78.** Доказательство. При $x = b$ подстановка в соотношении (10.27)

$$I(b) = p(b)[f(b)X'(b) - f'(b)X(b)] = 0.$$

Действительно, если $\beta_2 = 0$, то по (10.31) $X(b) = 0$, $f(b) = 0$; если $\beta_2 \neq 0$, то $X'(b) = -\frac{\alpha_2}{\beta_2}f(b)$, $f'(b) = \frac{\alpha_2}{\beta_2}f(b)$, так что $I(b) = 0$. Аналогично устанавливается равенство $I(a) = 0$.

10.79. 1. $\frac{2}{\lambda^2}[X'(0) - X'(l)]$; 2. $\frac{2}{\lambda}X(\frac{l}{2})$; 3. $\frac{1}{\lambda}[X'(0) - X'(l) - \frac{4}{l}X(\frac{l}{2})]$;
4. $\frac{X'(0) - X'(l)e^{\alpha l}}{\lambda + \alpha^2}$; 5. $\frac{\sin \alpha l}{\alpha^2 - \lambda}X'(l)$.

Решение п.4. Вычисление интеграла основано на свойстве (10.31). Пусть

$$\tilde{f} = \begin{cases} 0, & x = 0, x = l, \\ f, & 0 < x < l, \end{cases} \quad \tilde{f}'(x) = f'(x),$$

тогда

$$(f, X) = (\tilde{f}, X) = -\frac{1}{\lambda}(\tilde{f}, X'') = -\frac{1}{\lambda}(\tilde{f}', X') = -\frac{1}{\lambda}(\alpha^2 f + \delta'(x) - f(l)\delta'(x-l), X),$$

откуда следует ответ. **10.80.** $\left(\frac{a^2+bl+c}{h} + 2al + b - \frac{2a}{\lambda h}\right) \frac{X(l)}{\lambda} + \left(c - \frac{2a}{\lambda}\right) \frac{X'(0)}{\lambda}$.

10.81. 1. $-\frac{1}{\lambda}[aX(0) + (al+b)X'(l)]$; 2. $\frac{1}{\lambda l}X\left(\frac{l}{2}\right)$. **10.82.** $\frac{1}{\lambda}A\rho(x_0)X(x_0)$; если $\beta_1 = 0$, то $x_0 \neq a$, если $\beta_2 = 0$, то $x_0 \neq b$. Решение.

$$\begin{aligned} (\rho X, f) &= \frac{1}{\lambda}(f, \rho \mathcal{L}X) = \frac{1}{\lambda}(f, \rho \mathcal{L}f, X) = \frac{1}{\lambda}(\rho A \delta(x-x_0), X) = \\ &= \frac{A}{\lambda}(\delta(x-x_0), \rho X) = \frac{1}{\lambda}A\rho(x_0)X(x_0). \end{aligned}$$

10.83. Указание. Последовательность $\delta_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{X_k(x_0)X_k(x)}{\|X_k\|^2}$ сходится в пространстве $\mathcal{D}'[a; b]$ к $\delta(x-x_0)$.

10.84. 1. $f'(x) = \delta(x) - \delta(x-1)$, $f''(x) = -\delta(x) + \delta'(x) - \delta'(x-1)$;
2. $f'(x) = \frac{1}{x} + \delta(x-1)$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \delta(x-1) + \delta'(x-1)$.

10.85. Решение. Формула замены переменных

$$\int f(x) \varphi(x) dx = \int f(x(\xi)) \varphi(x(\xi)) I(\xi) d\xi$$

приводит к определению

$$(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = (I(\xi) \delta(x(\xi) - x(\xi_0)), \varphi(x(\xi))).$$

С другой стороны, $(\delta(x-x_0), \varphi(x)) = \varphi(x_0) = \varphi(x(\xi_0)) = (\delta(\xi-\xi_0), \varphi(x(\xi)))$.

10.86. 1. $\frac{1}{\delta(r-r_0)} \cdot \delta(\varphi - \varphi_0)$; 2. $\frac{1}{r} \delta(r-r_0) \cdot \delta(\varphi - \varphi_0) \cdot \delta(z-z_0)$;
3. $\frac{\delta(r-r_0)}{r^2} \cdot \frac{\delta(\theta-\theta_0)}{\sin \theta} \cdot \delta(\varphi - \varphi_0)$, $\theta_0 \in (0, \pi)$.

10.87. $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi J \frac{\delta(r-r_0)}{r} \cdot \delta(\theta - \frac{\pi}{2})$. **10.88.** Решение. Сферически симметричную функцию $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ достаточно задать на сферически симметричных основных функциях $\varphi(r)$ (задача 10.23). Для сферически симметричной регулярной обобщенной функции

$$\begin{aligned} (f(x), \varphi(r(x))) &= \int_0^\infty dr \int_{S_r} f(x) \varphi(r) ds = \int_0^\infty |S_r| f(r) \varphi(r) dr = \\ &= \int_0^\infty f(r) \varphi(r) dr = (f(r), \varphi(r)), \quad \text{где } f(r) = |S_r| f(x). \end{aligned}$$

10.89. 1. $Q \frac{\delta(r)}{4\pi r^2}$; 2. $Q \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot \delta(z)$. **10.90.** 1. $\frac{m}{2\pi} \frac{\delta(r-z_0)}{r^2} \cdot \frac{\delta(\theta)}{\sin \theta}$, 2. $m \frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot \delta(z-z_0)$.

10.91. $j_n = \frac{J}{2\pi r_0^2} \left[\frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} - \frac{\delta(\theta-\pi)}{\sin \theta} \right]$. **10.92.** $\rho = -\frac{p}{2\pi} \begin{cases} \frac{\delta'(r-z_0)}{r^2} \cdot \frac{\delta(\theta)}{\sin \theta}, & z_0 > 0, \\ \frac{\delta'(r-z_0)}{r^2} \cdot \frac{\delta(\theta-\pi)}{\sin \theta}, & z_0 < 0. \end{cases}$

10.94. Решение. Ряд Фурье функции $h \in L^2(\Omega)$ по полной ортонормальной в $L^2(\Omega)$ системе функций можно почленно интегрировать, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n h_k \psi_k(\omega) \cdot D^m \delta(r-r_0), \varphi(r, \omega) \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n h_k \psi_k(\omega), (-1)^m \varphi_r^{(m)}(r_0, \omega) \right) = \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n h_k \psi_k(\omega), (-1)^m \varphi_r^{(m)}(r_0, \omega) \right) = \left(h(\omega), (-1)^m \varphi_r^{(m)}(r_0, \omega) \right) = \\ &= (h(\omega) \cdot D^m \delta(r-r_0), \varphi(r, \omega)). \end{aligned}$$

10.95. $\sigma(\theta, \varphi) \cdot \delta(r - r_0)$. **10.96.** $\mathbf{j} = \mathbf{e}_\varphi \sigma \omega r_0 \sin \theta \cdot \delta(r - r_0)$.

10.97. $-p(\theta, \varphi) \cdot \delta'(r - r_0)$. **10.98.** 1. $\sigma(\varphi) \cdot \delta(r - r_0)$; 2. $-p(\varphi) \cdot \delta'(r - r_0)$.

10.99. $\frac{\delta(r - r_0)}{r} \cdot \delta(\theta - \frac{\pi}{2}) \cdot q(\varphi)$.

10.100. $f(r, \varphi) = \frac{p(r)}{r} \cdot [\delta(\varphi) + \delta(\varphi - \pi)]$. **10.101.** $\rho(r, \theta, \varphi) = \frac{\sigma(r, \varphi) \eta(r_0 - r)}{r} \cdot \frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{\sin \theta}$.

10.102. 1. $\delta(x) \cdot \delta(y) \cdot \rho(z) \eta(l - |z|)$; 2. $\frac{\delta(r)}{2\pi r} \cdot \rho(z) \eta(l - |z|)$;

3. $\frac{\rho(r) \eta(l - r)}{2\pi r^2} \cdot \frac{\delta(\theta)}{\sin \theta} + \frac{\rho(-r) \eta(l - r)}{2\pi r^2} \cdot \frac{\delta(\theta - \pi)}{\sin \theta}$.

10.103. $\mathbf{j} = \frac{Mc}{\pi} \frac{\delta(r)}{r^3} \cdot \frac{\delta(\theta - \frac{\pi}{2})}{\sin \theta} \cdot \mathbf{e}_\varphi$. **10.104.** Указание. См. задачу 10.93.

10.105. 1. $4 - 2r_0 \delta(r - r_0) - r_0^2 \delta'(r - r_0)$;

2. $(-nr_0^{n-1} \delta(r - r_0) - r_0^n \delta'(r - r_0)) \cdot \sin n\varphi$;

3. $-2\pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) - \ln r_0 \delta'(r - r_0)$.

10.106. 1. $-\delta'(r - r_0)$; 2. $-6 + 2r_0 \delta(r - r_0)$;

3. $(-r_0 \delta'(r - r_0) - \delta(r - r_0)) \cdot \sin \theta \cos \varphi$; 4. $\frac{r}{r_0} + \delta(r - r_0) - r_0 \delta'(r - r_0)$;

5. $-4\pi \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{r_0^2} \delta(r - r_0) - \frac{1}{r_0} \delta'(r - r_0)$.

10.107.

$$1. \Delta f = \frac{2}{r} - r_0 \delta'(r - r_0);$$

$$2. \Delta f = -4\pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{r_0} \delta'(r - r_0). \quad (10.46)$$

Указание к п.2. Применить (10.17). **10.109.** Указание. В соотношении (10.26) интеграл по S равен нулю.

10.110. 1. $-\frac{24\pi}{\lambda_n^2} u'_n(r_0)$; 2. $\frac{4\pi}{\lambda_n} [u_n(0) - r_0 u'_n(r_0)]$; 3. $\frac{4\pi}{\lambda_n^2} [r_0(2 - \lambda_n r_0^2) u'_n(r_0) - 2u_n(0)]$.

Решение п.1, п.2. 1. Вычисление основано на соотношении (10.42) (оно применимо, так как $f \in \mathcal{M}_L$) и формуле Грина (10.37):

$$\begin{aligned} \int_B f u_n dx &= (f, u_n) = -\frac{1}{\lambda_n} (f, \Delta u_n) = -\frac{1}{\lambda_n} (\Delta f, u_n) = \frac{6}{r_0^2 \lambda_n} (1, u_n) = \\ &= \frac{6}{r_0^2 \lambda_n} \int_B u_n dx = -\frac{6}{r_0^2 \lambda_n^2} \int_B \Delta u_n dx = -\frac{6}{r_0^2 \lambda_n^2} \int_S u'_n ds - \frac{24\pi}{\lambda_n^2} u'_n(r_0). \end{aligned}$$

2. Так как $f \in \mathcal{M}_L$, то соотношение (10.43) неприменимо. Можно построить такую функцию $\tilde{f}$, что $\tilde{f} \in \mathcal{M}_L$ и $I_n(f) = I_n(\tilde{f})$:

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(r), & r < r_0, \\ 0, & r = r_0, \end{cases} \quad \tilde{f}'(r_0) = \frac{1}{r_0^2}.$$

В силу (10.44) и (10.46) $I_n(f) = (\tilde{f}, u_n) = -\frac{1}{\lambda_n} (\tilde{f}, \Delta u_n) = -\frac{1}{\lambda_n} (\Delta \tilde{f}, u_n) =$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\lambda_n} \left(-4\pi \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{r_0} \delta'(r - r_0) \right), u_n = -\frac{1}{\lambda_n} \left(-4\pi u_n(0) + \frac{1}{r_0} u'_n(r_0) 4\pi r_0^2 \right) = \\ &= \frac{4\pi}{\lambda_n} [u_n(0) - r_0 u'_n(r_0)]. \end{aligned}$$

10.111. $\frac{16\pi r_0}{\lambda_n} [u_n(r_0) - u_n(0)]$. **10.112.** $\frac{4\pi r_0}{\lambda_n} [u_n(r_0) - u_n(0)]$.

10.113. $\frac{a u(x_0)}{\lambda_n}$. Решение. На основании (10.44)

$$\int_B f u dx = (f, u) = -\frac{1}{\lambda} (f, \Delta u) = -\frac{1}{\lambda} (\Delta f, u) = \frac{a}{\lambda} (\delta(x - x_0), u) = \frac{a u(x_0)}{\lambda}.$$

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ

Дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах. Декартовы координаты (x_1, x_2, x_3) некоторой точки $x \in \mathbf{R}^3$ и ее криволинейные координаты (q_1, q_2, q_3) связаны известными соотношениями $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$, $i=1, 2, 3$. Пусть A_1, A_2, A_3 — компоненты вектора $\mathbf{A}$ в криволинейной системе, u — скалярная функция, dl — элемент длины, h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламе, тогда

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2,$$

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(\nabla u)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 A_3) \right],$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 A_1) \right],$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial u}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial u}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial u}{\partial q_3} \right) \right].$$

Цилиндрические координаты.

$$(\nabla u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (\nabla u)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad (\nabla u)_z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (\operatorname{rot} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты.

$$(\nabla u)_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (\nabla u)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (\nabla u)_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}.$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\varphi) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi},$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi),$$

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta},$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Гамма-функция $\Gamma(z)$ **и бета-функция** $B(z, \zeta)$.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad \operatorname{Re} z > -n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Гамма-функция не имеет нулей. Основные соотношения: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+1/2), \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

$$B(z, \zeta) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\zeta-1} dt; \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0, \quad B(z, \zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}.$$

Логарифмическая производная Γ -функции $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Неполная

гамма-функция $\gamma(z, a) = \int_0^a t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$.

Числа Бернулли. Ряд Лорана

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^\infty \frac{\beta_n}{n!} z^n$$

сходится в кольце $0 < |z| < 2\pi$. Числа $B_n = (-1)^n \beta_{2n}$ — положительные и называются числами Бернулли. Несколько первых чисел Бернулли:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{40}, \quad B_4 = \frac{1}{30}, \quad B_5 = \frac{1}{66}, \quad B_6 = \frac{691}{2730}, \quad B_7 = \frac{7}{6}.$$

Дзета-функция Римана. По определению

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^x}, \quad x > 1.$$

$$\text{Интегральное представление: } \zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{t^{x-1} dt}{e^t - 1}.$$

При $x = 2m, m \in \mathbf{N}$

$$B_{2m} = \frac{2(2m)!}{(2\pi)^{2m}} \zeta(2m).$$

Эллиптические интегралы. Эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi,$$

Полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

$$K(k) = F(\pi/2, k), \quad E(k) = E(\pi/2, k).$$

Интегралы вероятности.

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf} x, \quad \operatorname{erf} \infty = 1;$$

$$\mathcal{E}rf x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erf} x + \mathcal{E}rf x = 1.$$

Асимптотическое разложение: $\sqrt{\pi} x e^{x^2} \mathcal{E}rf x = 1 + \frac{1}{8x^2} + o(\frac{1}{x^2}), \quad x \rightarrow +\infty$.

Цилиндрические функции. Функция Бесселя первого рода порядка ν

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m+\nu+1)}$$

удовлетворяет уравнению Бесселя

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0.$$

$J_\nu(z)$ — аналитическая функция переменной z с особыми точками $z = 0$ (при нецелом ν) и $z = \infty$. $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n \in \mathbf{N}_0$,

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(z \sin \varphi - n\varphi)} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(z \sin \varphi - n\varphi) d\varphi, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Асимптотические формулы.

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad x \rightarrow +\infty.$$

Функция Бесселя второго рода порядка ν

$$Y_\nu(z) = \frac{\cos \pi\nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu}, \quad \nu \notin \mathbf{Z}; \quad Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z), \quad n \in \mathbf{Z}.$$

является решением уравнения Бесселя. $Y_\nu(z)$ — аналитическая функция переменной z с особыми точками $z = 0$ и $z = \infty$ и целая функция переменной ν .

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad x \rightarrow +\infty.$$

Функции Ганкеля.

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z).$$

Рекуррентные соотношения для цилиндрических функций

$$Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z), \quad ,$$

где C_1 и C_2 не зависят ни от z , ни от ν :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z^\nu Z_\nu(z)) &= z^\nu Z_{\nu-1}(z), & \frac{d}{dz}(z^{-\nu} Z_\nu(z)) &= -z^{-\nu} Z_{\nu+1}(z), \\ zZ'_\nu(z) + \nu Z_\nu(z) &= zZ_{\nu-1}(z), & Z_{\nu-1}(z) + Z_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Z_\nu(z), \\ zZ'_\nu(z) - \nu Z_\nu(z) &= -zZ_{\nu+1}(z), & Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z) &= 2Z'_\nu(z). \end{aligned}$$

Вронскианы и некоторые формулы.

$$W[J_{\nu u}, J_{-\nu}] = -\frac{2 \sin \pi}{\pi z}, \quad W[J_{\nu u}, Y_\nu] = \frac{2}{\pi z},$$

$$W[J_{\nu u}, H_\nu^{(1),(2)}] = \pm \frac{2i}{\pi z}, \quad W[H_{\nu u}^{(1)}, H_\nu^{(2)}] = -\frac{4i}{\pi z},$$

$$J_\nu(z)J_{-\nu+1}(z) + J_{-\nu}(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{2 \sin \pi\nu}{\pi z}, \quad J_\nu(z)Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{2}{\pi z}.$$

Модифицированные функции Бесселя $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ являются решениями модифицированного уравнения Бесселя

$$u'' + \frac{1}{z}u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0.$$

$$I_\nu(z) = e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} J_\nu(iz) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

$$K_\nu(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)}{\sin \pi\nu}, & \nu \notin \mathbf{Z}, \\ \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z), & n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

$$K_\nu(z) = \frac{i\pi}{2} e^{\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(1)}(iz) = -\frac{i\pi}{2} e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} H_\nu^{(2)}(-iz),$$

$$I_{-n}(z) = I_n(z), \quad n \in \mathbf{N}_0, \quad K_{-\nu}(z) = K_\nu(z).$$

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{z \cos \varphi - in\varphi} d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \varphi} \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

$$K_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1/2) z^\nu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos t \, dt}{(z^2 + t^2)^{\nu+1/2}}.$$

Асимптотические формулы.

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad x \rightarrow +\infty.$$

Рекуррентные соотношения.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(z^\nu I_\nu(z)) &= z^\nu I_{\nu-1}(z), & \frac{d}{dz}(z^{-\nu} I_\nu(z)) &= z^{-\nu} I_{\nu+1}(z), \\ zI'_\nu(z) + \nu I_\nu(z) &= zI_{\nu-1}(z), & I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \\ zI'_\nu(z) - \nu I_\nu(z) &= zI_{\nu+1}(z), & I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) &= 2I'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz}(z^\nu K_\nu(z)) &= -z^\nu K_{\nu-1}(z), & \frac{d}{dz}(z^{-\nu} K_\nu(z)) &= -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z), \\ zK'_\nu(z) + \nu K_\nu(z) &= -zK_{\nu-1}(z), & K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \\ zK'_\nu(z) - \nu K_\nu(z) &= -zK_{\nu+1}(z), & K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) &= -2K'_\nu(z). \end{aligned}$$

Вронскианы и некоторые формулы.

$$\begin{aligned} W[I_\nu, I_{-\nu}] &= -\frac{2\sin\pi}{\pi z}, & W[I_\nu, K_\nu] &= -\frac{1}{z}, \\ I_\nu(z)I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z) &= -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z}, \\ I_\nu(z)K_{\nu+1}(z) + K_\nu(z)I_{\nu+1}(z) &= \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Классические ортогональные полиномы. Полиномы Лежандра

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

ортогональны на промежутке $(-1, 1)$ с весом $\rho(x) = 1$ и удовлетворяют уравнению Лежандра: $(1-x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$.

Свойство четности: $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$. Квадрат нормы $\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$.

Рекуррентные соотношения:

$$xP_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}P_{n+1}(x) + \frac{n+1}{2n+1}P_{n-1}(x), \quad P_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)}{2n+1}, \quad n \geq 1.$$

Производящая функция

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n, \quad |t| < 1.$$

Несколько первых полиномов: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$,

$P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$, $P_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}$. Частные значения:

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}.$$

Второе решение уравнения Лежандра — функции Лежандра второго рода:

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad Q_1(x) = \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad Q_3(x) = \frac{1}{4}(3x^2-1) \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{3}{2}x, \dots;$$

функции $Q_n(x)$ удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и полиномы Лежандра:

$$xQ_n(x) = \frac{n+1}{2n+1}Q_{n+1}(x) + \frac{n+1}{2n+1}Q_{n-1}(x).$$

Полиномы Чебышева-Лагерра

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}), \quad \alpha > -1,$$

ортогональны с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ на полуоси $(0, \infty)$ и удовлетворяют уравнению

$$xu'' + (1 + \alpha - x)u' + nu = 0.$$

Квадрат нормы $\|L_n^\alpha\|^2 = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}$. Рекуррентные соотношения:

$$xL_n^\alpha(x) = -n + 1L_{n+1}^\alpha(x) + (2n + \alpha + 1)L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x),$$

$$\frac{d}{dx}L_n^\alpha(x) = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad n \geq 1.$$

Производящая функция

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n, \quad |t| < 1.$$

$$L_0^{\alpha}(x) = 1, \quad L_1^{\alpha}(x) = 1 + \alpha - x, \quad L_2^{\alpha}(x) = (\alpha + 2)(\alpha + 1) - 2(\alpha + 2)x + x^2.$$

Полиномы Чебышева-Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

ортгоналъны с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$ на оси $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяют уравнению

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0.$$

Свойство четности: $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$.

Квадрат нормы $\|H_n\|^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}$. Рекуррентные соотношения:

$$xH_n(x) = \frac{1}{2}H_{n+1}(x) - nH_{n-1}(x), \quad H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1.$$

Производящая функция

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n.$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

Присоединенные функции Лежандра

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} P_n^{(m)}(x), \quad m, n \in \mathbb{N}$$

ортгоналъны на промежутке $(-1, 1)$ с весом $\rho(x) = 1$ и удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]u = 0.$$

Квадрат нормы $\|P_n^m\|^2 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{2}{2n+1}$. Если $x = \cos \theta$, то

$$\begin{aligned} P_0^0(\cos \theta) &= 1, & P_1^0(\cos \theta) &= \cos \theta, & P_1^1(\cos \theta) &= \sin \theta, \\ P_2^0(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1), & P_2^1(\cos \theta) &= 3 \sin \theta \cos \theta, & P_2^2(\cos \theta) &= 3 \sin^2 \theta, \\ P_3^0(\cos \theta) &= \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta), & P_3^1(\cos \theta) &= \frac{15 \cos^2 \theta - 3}{2} \sin \theta, \\ P_3^2(\cos \theta) &= 15 \sin^2 \theta \cos \theta, & P_3^3(\cos \theta) &= 15 \sin^3 \theta, \\ P_4^0(\cos \theta) &= \frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3), & P_4^1(\cos \theta) &= \frac{5}{2} \sin \theta \cos \theta (7 \cos^2 \theta - 3), \\ P_4^2(\cos \theta) &= \frac{15}{2} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1), & P_4^3(\cos \theta) &= 105 \sin^3 \theta \cos \theta, \\ P_4^4(\cos \theta) &= 105 \sin^4 \theta. & P_4^4(\cos \theta) &= \frac{(2n)!}{2^n n!} \sin^n \theta. \end{aligned}$$

Сферические функции. Сферическими функциями $Y_n(\theta, \varphi)$ порядка n называются однородные гармонические многочлены $u_n(\mathbf{r})$ степени n , рассматриваемые на единичной сфере. Функции $Y_n(\theta, \varphi)$ выражаются через фундаментальные сферические функции:

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=-n}^{m=n} Y_n^m(\theta, \varphi).$$

Фундаментальные сферические функции

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^{|m|}(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi, & m = 1, 2, \dots, n, \\ \cos m\varphi, & m = 0, -1, \dots, -n \end{cases}$$

ортогональны (с весом $\rho = 1$) на единичной сфере

$$\int_{S_1} Y_n^m(\mathbf{s}) Y_{n'}^{m'}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = 0 \quad (m, n) \neq (m', n')$$

и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + n(n+1)u = 0, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Квадрат нормы $\|Y_n^m\|^2 = \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \frac{2\pi(1+\delta_{nm})}{2n+1}$.

Несколько первых фундаментальных сферических функций:

$$\begin{aligned} Y_1^1(\theta, \varphi) &= \sin \theta \sin \varphi, & Y_2^1(\theta, \varphi) &= 3 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi, \\ Y_2^2(\theta, \varphi) &= 3 \sin^2 \theta \sin 2\varphi, & Y_3^1(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2}(15 \cos^2 \theta - 3) \sin \theta \sin \varphi, \\ Y_3^2(\theta, \varphi) &= 15 \sin^2 \theta \cos \theta \sin 2\varphi, & Y_3^3(\theta, \varphi) &= 15 \sin^3 \theta \sin 3\varphi, \\ Y_4^1(\theta, \varphi) &= \frac{5}{4} \sin 2\theta (7 \cos^2 \theta - 3) \sin \varphi, & Y_4^2(\theta, \varphi) &= \frac{15}{2} \sin^2 \theta (7 \cos^2 \theta - 1) \sin 2\varphi, \\ Y_4^3(\theta, \varphi) &= 105 \sin^3 \theta \cos \theta \sin 3\varphi, & Y_4^4(\theta, \varphi) &= 105 \sin^4 \theta \sin 4\varphi. \end{aligned}$$

Теорема сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n((\mathbf{s}, \mathbf{s}')) = \sum_{m=-n}^n \frac{2}{1+\delta_{0m}} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} Y_n^m(\mathbf{s}) Y_n^m(\mathbf{s}'), \quad \mathbf{s}, \mathbf{s}' \text{ — единичные векторы.}$$

Гипергеометрические функции. По определению

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}: (\lambda)_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) \dots (\lambda+n-1), & n \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n n!} z^n, \quad \gamma \neq -1, -2, -3, \dots$$

сходится в круге $|z| < 1$ и определяет аналитическую (относительно аргумента z) функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, называемую гипергеометрической функцией. Функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ симметрична относительно первых двух аргументов: $F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z)$; при $\alpha = -n$, $n \in \mathbf{N}_0$ гипергеометрическая функция $F(-n, \beta, \gamma, z) = p_n(z)$, где $p_n(z)$ — многочлен степени n . Решения гипергеометрического уравнения (уравнения Гаусса)

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0$$

в окрестностях особых точек $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$ выражаются через гипергеометрические ряды:

в окрестности $|z| < 1$, точки $z = 0$

$$u_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z), \quad u_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z);$$

в окрестности $|z-1| < 1$, точки $z = 1$

$$\begin{aligned} u_3(z) &= F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z), \\ u_4(z) &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z); \end{aligned}$$

в окрестности $|z| > 1$, точки $z = \infty$

$$u_5(z) = z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{z}), \quad u_6(z) = z^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{z}).$$

Аналитическое продолжение гипергеометрического ряда, определенного в круге $|z| < 1$, на всю комплексную плоскость определяет многозначную аналитическую функцию с особыми точками $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$. Гипергеометрические функции от аргументов z , $1 - z$, $1 - 1/z$ связаны следующими соотношениями (они являются средством аналитического продолжения гипергеометрической функции):

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z), \\ |arg(1 - z)| &< \pi, \\ F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, z^{-1}) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, z^{-1}), \quad |arg(-z)| < \pi, \\ F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (1 - z)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1, (1 - z)^{-1}) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F(\beta, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1, (1 - z)^{-1}), \quad |arg(1 - z)| < \pi. \end{aligned}$$

Асимптотика при $z \rightarrow \infty$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} + \mathcal{O}(z^{-\alpha}), & \operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} \beta, \\ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} + \mathcal{O}(z^{-\beta}), & \operatorname{Re} \alpha > \operatorname{Re} \beta. \end{cases}$$

Вырожденная гипергеометрическая функция определяется рядом

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n z^n}{(\gamma)_n n!}, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots,$$

радиус сходимости которого $R = \infty$, и является решением дифференциального уравнения Куммера:

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0.$$

Необходимые условия экстремума функционалов:

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^x F(x, y, y') dx \implies F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0;$$

$$\Phi(y_1, y_2, \dots, y_n) = \int_{x_0}^x F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y'_1, y'_2, \dots, y'_n) dx \implies$$

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y'_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$\Phi(y) = \int_{x_0}^x F(x, y', y'', \dots, y^n) dx \implies$$

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^n} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n;$$

$$\Phi((z(x, y))) = \int_D F(x, y, z, z_x, z_y) dx dy = 0 \implies$$

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} [F_p] - \frac{\partial}{\partial y} [F_q] = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} [F_p] = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [F_q] = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}, \quad p = z_x, \quad q = z_y.$$

В таблице преобразований Лапласа формулы для функций Бесселя J_ν и I_ν применимы при $\operatorname{Re} \nu > -1$.

Интегральное преобразование Лапласа.

оригинал	изображение	оригинал	изображение
$t^a, a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}}$	$e^{-p_0 t}$	$\frac{1}{p-p_0}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega^2}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$	$e^{-\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2 + \omega^2}$
$t \sin \omega t$	$\frac{2p\omega}{p^2 + \omega^2)^2}$	$t \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$\frac{\sin at}{t}$	$\arccot g \frac{a}{p}$	$\frac{ab \sin at * \sin bt}{b^2 - a^2}$	$\frac{1}{p^2 + a^2} - \frac{1}{p^2 + b^2}$
$sh at$	$\frac{a}{p^2 - a^2}$	$ch at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$J_\nu(at)$	$\frac{(\sqrt{p^2 + a^2} - p)^\nu}{a^\nu \sqrt{p^2 + a^2}}$	$I_\nu(at)$	$\frac{(p - \sqrt{p^2 - a^2})^\nu}{a^\nu \sqrt{p^2 - a^2}}$
$(\frac{t}{a})^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2a\sqrt{t})$	$\frac{1}{p^{\frac{\nu}{2}+1}} e^{-\frac{a}{p}}, a \geq 0$	$(\frac{t}{a})^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(2a\sqrt{t})$	$\frac{1}{p^{\frac{\nu}{2}+1}} e^{\frac{a}{p}}, a \geq 0$
$\frac{J_1(at)}{at}$	$\frac{1}{p + \sqrt{p^2 + a^2}}$	$e^{-at} I_0(bt)$	$\frac{1}{\sqrt{(p+a)^2 - b^2}}$
$Ln(t)$	$\frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$	$\frac{1}{\sqrt{1+t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{p} e^p \mathcal{E}rf \sqrt{p}$
$\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{a}{t}} \frac{1}{t+a}, a \geq 0$	$e^{ap} \mathcal{E}rf \sqrt{ap}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{a^2}{p}} \mathcal{E}rf \frac{a}{\sqrt{p}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{2\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{1}{p}} \mathcal{E}rf \frac{1}{\sqrt{p}}$	$erf(\frac{t}{2})$	$\frac{1}{p} e^{p^2} erf \frac{1}{\sqrt{p}}$
$erf(\frac{1}{2}) \sqrt{\frac{a}{t}}, a \geq 0$	$\frac{e^{\sqrt{ap}} - 1}{p}$	$e^{-a^2 t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2 a } e^{\frac{p^2}{4a^2}} \mathcal{E}rf \frac{p}{2 a }$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\alpha^2}{4t}}, \alpha \geq 0$	$\frac{\sqrt{p}}{2} e^{\frac{p^2}{4a^2}} \mathcal{E}rf \frac{p}{2a}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-2at}, a \geq 0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{p} e^p \mathcal{E}rf \sqrt{p}$
$1 - 2e^{a^2 t} \mathcal{E}rf(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} \frac{a - \sqrt{p}}{a + \sqrt{p}}, a \geq 0$	$erf(\sqrt{at}), a \geq 0$	$\frac{\sqrt{a}}{p\sqrt{p+a}}$
$\frac{e^{-\sqrt{at}}}{\sqrt{at}} + \sqrt{a} erf(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{p+a}}{p}, a \geq 0$	$e^{a^2 t} erf(a\sqrt{t})$	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{p(p-a^2)}}$
$1 - e^{a^2 t} \mathcal{E}rf(a\sqrt{t})$	$\frac{a}{p(\sqrt{p+a})}, a \geq 0$	$e^{a^2 t} \mathcal{E}rf(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p+a})}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - a e^{a^2 t} \mathcal{E}rf(a\sqrt{t})$	$\frac{1}{\sqrt{p+a}}$	$\mathcal{E}rf \frac{a}{2\sqrt{t}}, a \geq 0$	$\frac{1}{p} e^{-ap}$
$\frac{\sin 2\sqrt{t}}{\pi t}$	$erf \frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{1}{p}} erf \frac{1}{\sqrt{p}}$
$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin at$	$\sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + a^2} - p}{p^2 + a^2}}$
$ber_0(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$	$bei_0(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{p} \sin \frac{1}{p}$

Список литературы

1. Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987.
2. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — М.: Мир, 1984.
3. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции.—М.: Наука, 1986.
4. Артышев С.Г., Горюнов А.Ф. Методы решения нелинейных задач математической физики. Учебное пособие. — М.: МИФИ, 1992.
5. Баренблатт Г.И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. — М.: Недра, 1972.
6. Бейтмен Г., Зрдей А. Высшие трансцендентные функции, т. 1,2. — М.: Наука, 1973, 1974.
7. Бейтмен Г., Зрдей А. Таблицы интегральных преобразований, т.1,2. — М.: Наука, 1969, 1970.
8. Бицадзе А.В., Калининченко Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физике. — М. Наука: Физматлит, 1999.
9. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций — М.: Наука, 1977.
10. Будак Б.Н., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Физматлит, 2003.
11. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. — М.: Физматлит, 2002.
12. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков Ф.П. Теория волн. — М.: Наука, 1990.
13. Владимиров В.С. Обобщенные функции и их приложение. — М.:Знание, Математика, кибернетика. №1, 1990.
14. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. — М.: Физматлит, 2003.
15. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного — М.: Физматлит, 2002.

16. Габов С.А. Введение в теорию нелинейных волн. — М.: Издательство МГУ, 1988.
17. Галанин А.Д. Введение в теорию ядерных реакторов на тепловых нейтронах. — М.: Энергоатомиздат, 1990.
18. Галицкий И.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике. М.:Наука, 1992.
19. Галицын А.С., Жуковский А.Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. — М, Едиториал УРСС, 2001.
20. Годунов С.К., Золотарева Е.В. Сборник задач по уравнениям математической физики. — Новосибирск.: Наука, 1974.
21. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. — М.: Издательство МГУ, 1987.
22. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. — М.: Мир, 1988.
23. Евграфов М.А. Сборник задач по теории аналитических функций. — М.: Международная программа образования, 1996.
24. Захаров В.Е., Манахов С.В., Питаевский Л.П. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
25. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. — М.: Наука, 1971.
26. Инфельд Э. Нелинейные волны, солитоны и хаос. — М.:Физматлит, 2005.
27. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — М.: Наука, 1986.
28. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1989.
29. Котляр Я.М. Методы математической физики и задачи гидродинамики. — М.: Высшая школа, 1991.
30. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.
31. Кочина-Полубаринова П.Я. Гидродинамика и теория фильтрации. — М.:Наука, 1991.
32. Кошляков Н.С., Глиннер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. — М.: Высшая школа, 1970.
33. Краснов М.Л., Кисилев А.Н., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. — М.: УРСС, 2003.
34. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа т 1,2. — М.: Дрофа, 2006.
35. Кудряшов Н.А. Автомодельные задачи движения газа в пористой среде. — М.: МИФИ, 1984.

36. Кудряшов Н.А. Аналитические методы в теории нелинейных уравнений в частных производных. — М.: МИФИ, 1993.
37. Кудряшов Н.А. Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. — М.: МИФИ, 2002.
38. Кудряшов Н.А. Методы нелинейной математической физики. — М.: МИФИ, 2008.
39. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 1,2. — М.: Гостехиздат, 1961.
40. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Дань, 2002.
41. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. т.3. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.:Физматгиз, 2001.
42. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. т.6. Гидродинамика. — М.: Наука, 1986.
43. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. т.7. Теория упругости. — М.: Наука, 1987.
44. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. т.8. Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука, 2001.
45. Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С. Сборник задач по математической физике. — М.: Гостехиздат, 1955.
46. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: Наука, 1981.
47. Локшин А.А., Сагомоян Е.А. Нелинейные волны в механике твердого тела. — МГУ, 1989.
48. Лэм Дж.Л. Введение в теорию солитонов. — М.: Меркурий-Пресс, 1983.
49. Мегреблиан Р., Холмс Д. Теория реакторов. — М.: Гостехиздат, 1962.
50. Муратов Р.З. Потенциалы эллипсоида. — М.: Атомиздат, 1976.
51. Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
52. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. — Долгопрудный: Интеллект, 2007.
53. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: МГУ, 1984.
54. Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. Справочник по точным решениям уравнений по тепло- и масспереносу. — М.: Факториал, 1998.
55. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. — М.: Физматлит, 2002.
56. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005.
57. Полянин А.Д., Манжиров А.Ф. Справочник по интегральным уравнениям. — М.: Физматлит, 2003.

-
58. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
 59. Рождественский Б.Л., Яненко И.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
 60. Сборник задач по уравнениям математической физики./ под ред. В.С. Владимирова — 4-е изд., стереотип. — М.: Физматгиз, 2003.
 61. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. — М.: Наука, 1999.
 62. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966.
 63. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.В. Теория функций переменного. — М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
 64. Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1978.
 65. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. 2,4. — М.: Физматгиз, 1967, 1958.
 66. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975
 67. Соболев В.В. Точечный источник света между параллельными плоскостями. — ДАН СССР, т.42, №4, 1944.
 68. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1992.
 69. Солитоны. Под редакцией Буллаф Р., Кодри Ф. — М.: Мир, 1983.
 70. Стернин Л.Е. Основы газовой динамики. — М.: МАИ, 1995.
 71. Тамм И.Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1989.
 72. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: МГУ, Наука, 2004.
 73. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. инженеров. — М.: Мир, 1985.
 74. Флогге З. Задачи по квантовой механике. т.2. — Череповец.: Меркурий-Пресс, 2000.
 75. Эльсгольц Л.Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб.: Лань, 2002.
 76. Шапиро А., Тьюколски С. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды. т. 1,2. — М.: Мир, 1985.
 77. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник упражнений по операционному исчислению. — 4-е изд., стереотип. — М.:Старс, 2006.

Горюнов Анатолий Федорович

**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ
В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ
Часть II**

Учебное пособие

Редактор Н.В. Егорова

Подп. в печать 01.10.2008.	Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 33,0.	Печ. л. 33,0.
Изд. № 4/115.	Тираж 150 экз.
	Заказ №

*Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.*

*Типография издательства „Тровант”.
г. Троицк Московской обл.*